


Digitized by Google

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Vierzehnter Jahrgang.

Mit 8 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1869.

Inhalt.

I.

Die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen in elementarer Darstellung.

Von

Dr. E. Lommel.

Professor der Physik an der Universität Erlangen.

(Taf. I, Fig. 1—40).

Vorwort. Die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen, welche durch ihr theoretisches Interesse, durch die Leichtigkeit ihrer Beobachtung und durch die Mannichfaltigkeit ihrer Formen gleich anziehend sind, haben bisher in den Lehrbüchern der Physik nur eine lückenhafte Darstellung gefunden und finden können. Gewöhnlich wird nur der einfachste Fall eines schmalen Spaltes ausführlicher behandelt, für die immer noch einfachen Fälle der parallelogrammförmigen und dreieckigen Oeffnung aber, selbst wenn die Construction des Bildes angegeben wird, muss auf Schwerd's classisches Originalwerk*) oder auf Littrow's Darstellung**) verwiesen werden, und zwar mit gutem Rechte. Denn zur Herstellung des Intensitätsausdruckes sind entweder weitläufige Summationen, oder die Anwendung der Integralrechnung nöthig, wozu einerseits der Raum, andererseits die Hilfsmittel eines elementaren Compendiums nicht ausreichen. Eine elementare Darstellung, wie sie sich für die Bedürfnisse eines Lehrbuches eignet, das auf ausgedehntere analytische Entwickelungen verzichten muss, ist mir bisher nicht bekannt geworden.

Die folgenden Blätter sind dazu bestimmt, eine solche mit den elementarsten Hilfsmitteln durchgeführte Darstellung zu geben, und wir werden sehen, dass sich auf diesem Wege nicht nur die Construction des Bildes für Parallelogramm, Dreieck etc., sondern sogar die Intensitätsverhältnisse für die wichtigsten Bildpunkte in genügender Weise ableiten lassen. Der allgemeine Intensitätsausdruck freilich kann und soll durch diese synthetische Methode nicht hergestellt werden; das ist und bleibt die Aufgabe der Analyse. Dagegen hat unsere Betrachtungsweise wieder andere Vortheile vor der analytischen voraus; sie gewährt nämlich besser als diese einen Einblick in die Genesis der Erscheinungen, wir sehen die dunkeln Linien und Punkte gleichsam unter unseren Augen entstehen und erkennen

*) Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

**) Littrow, im Artikel „Undulation" in Gehler's physikal. Wörterbuch. Bd IX.

die geometrischen Gründe für das Gesetz der Intensitätsvertheilung. Von dieser Seite aufgefasst, bildet die synthetische Darstellung eine erwünschte, wenn nicht nothwendige Ergänzung der analytischen, und bietet selbst Demjenigen noch neue Gesichtspunkte, welcher mit der analytischen Betrachtungsweise bereits vertraut ist.

Nebst dem wesentlichen Inhalt des Schwerd'schen Werkes war ich bestrebt, auch einige allgemeinere Sätze, welche ich in einer früheren Abhandlung veröffentlichte*), in das elementare Gewand zu kleiden. Ausserdem glaube ich in dem letzten Paragraphen dieses Schriftchens auf einen wichtigen neuen Satz (vom Minimum des Beugungswinkels) aufmerksam gemacht zu haben. Auf ihn lässt sich nämlich eine neue Methode zur Messung der Wellenlängen gründen, welche wirklich in Ausführung zu bringen mir leider bisher nicht vergönnt war.

1. Einleitung. Auf einen undurchsichtigen, mit einer oder mehreren Oeffnungen versehenen Schirm treffe, von einem sehr weit entfernten leuchtenden Punkt herkommend, ein Bündel paralleler, homogener Lichtstrahlen, oder, was dasselbe ist, eine ebene Lichtwelle. Die in der Ebene des Schirmes und innerhalb einer Oeffnung gelegenen Aethertheilchen werden, durch die einfallende Welle erregt, dem Principe des Huyghens zufolge, ihrerseits zu Bewegungsmittelpunkten, und senden demgemäss nach allen Richtungen Elementarstrahlen hinter den Schirm, welche sich in unendlich viele Bündel paralleler Strahlen gruppiren lassen. Dasjenige unter ihnen, welches die einfallenden Strahlen fortsetzt, nennen wir direct, die übrigen gebeugt. Der Winkel, welchen ein gebeugtes Bündel mit der Richtung der directen Strahlen bildet, heisst sein Beugungswinkel.

Befindet sich nun hinter dem Schirm eine Linse (das Objectiv eines Fernrohres oder die Krystalllinse des Auges), so werden durch dieselbe alle Strahlen einer solchen Gruppe in einem einzigen Punkte vereinigt. Man findet diesen Punkt, indem man durch den optischen Mittelpunkt O der Linse mit der Richtung des betrachteten Strahlenbündels eine Parallele zieht und auf dieser von O aus gegen den Beobachter hin die Brennweite der Linse abträgt.

Da eine Linse bekanntlich an den Gangunterschieden der durch sie gebrochenen Strahlen nichts ändert, so kommen diese im Vereinigungspunkt vermöge der Gangunterschiede, mit welchen sie von der beugenden Oeffnung ausgegangen sind, zur Interferenz. Da der Grad der Uebereinstimmung oder des Gegensatzes der einem Bündel angehörigen Elementarstrahlen je nach dessen Richtung ein verschiedener ist, so werden die Vereinigungspunkte in gesetzmässiger Abstufung verschieden starke Erleuchtung zeigen, und so in ihrer Gesammtheit eine Zeichnung bilden, welche wir das Beugungsbild nennen. Das Beugungsbild entsteht demnach

*) Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichtes. Grun. Arch. Th. XXXVI.

auf einer vom optischen Mittelpunkt O des Objectivs aus mit dessen Brennweite als Radius beschriebenen Halbkugel, welche von einer durch O zur Schirmebene parallel gelegten Ebene andererseits begrenzt ist.

Aus dieser Betrachtung geht sofort zweierlei hervor. Verschiebt man die Oeffnung in der Ebene des Schirmes parallel mit sich selbst, jedoch so, dass sie stets im Bereiche des Objectivs bleibt, so wird dadurch das Beugungsbild weder verschoben, noch erleidet es sonst eine Aenderung. Eben so wenig wird dasselbe geändert, wenn man der Fernrohraxe verschiedene Neigungen zur Schirmebene ertheilt. Bei jeder Neigung wird immer derjenige Theil desselben gesehen, welcher dem Gesichtsfelde des Fernrohres entspricht.

Bei Beobachtung mit blossem Auge fällt das Bild, falls das Auge für den als Lichtquelle benutzten Punkt accommodirt ist, auf die Netzhaut und kommt so unmittelbar zur Wahrnehmung. Die Anwendung eines Fernrohres gewährt den Vortheil, dass alle Dimensionen des Beugungsbildes, im Verhältniss der Brennweiten des Objectives und des Oculars, vergrössert erscheinen.

Statt nun das wirkliche halbkugelige Bild zu untersuchen und zu construiren, denken wir uns jeden seiner Punkte senkrecht auf die Grundfläche der Halbkugel projicirt, und legen jedem Punkte der Projection diejenige Lichtstärke bei, welche seinem entsprechenden Punkte auf der Kugelfläche zukommt. Wir erhalten so ein in der Ebene ausgeführtes Gemälde, den Grundriss des Beugungsbildes; von ihm aus kann man augenblicklich durch Errichten von Senkrechten wieder zum halbkugeligen Bilde zurückkehren.

Der Einfachheit wegen nehmen wir vorerst an, dass die directen Strahlen sowohl, als die Axe des Fernrohres zur Schirmebene senkrecht stehen. Der Vereinigungspunkt der directen Strahlen, d. h. das Bild des leuchtenden Punktes, liegt alsdann in der Fernrohraxe selbst (am Kreuzungspunkte der Fäden) und projicirt sich in die Mitte des Grundrisses.

2. Die Elementarstreifen. Sei nun AB (Fig. 1) ein unendlich schmaler Streifen einer beugenden Oeffnung, AD und BE die Randstrahlen des von ihm ausgehenden elementaren Strahlenbündels, sei ferner BC senkrecht zu AD, so ist AC, d. h. die Projection der Streifenlänge AB auf die Strahlenrichtung, der Gangunterschied der Randstrahlen für dieses Elementarbündel.

Beträgt dieser Unterschied eine ganze Wellenlänge, so vernichten sich sämmtliche Strahlen bei ihrer Vereinigung; denn zu jedem Strahle lässt sich ein anderer angeben, der um eine halbe Wellenlänge gegen ihn verschoben ist.

Dasselbe findet statt, wenn der Gangunterschied der Randstrahlen eine beliebige Anzahl ganzer Wellenlängen ausmacht; denn theilt man das

Streifchen in so viele gleiche Theile, als diese Anzahl beträgt, so differiren die Endstrahlen jeder Abtheilung um eine ganze Wellenlänge und es tritt wie vorhin Vernichtung ein.

Beträgt dagegen der Unterschied der Randstrahlen eine halbe Wellenlänge, so können sich nur die beiden Endstrahlen vernichten; die übrigen, welche unter sich um weniger als eine halbe Wellenlänge differiren, werden sich zu einem resultirenden Strahle zusammensetzen, dessen Schwingungsweite (Amplitude) unter sonst gleichen Umständen der Länge des Streifchens proportional ist. (Wir vergleichen überhaupt nur Streifchen von gleicher, aber unendlich kleiner Breite mit einander.)

Differiren die Randstrahlen in ihrem Gange um drei halbe Wellenlängen, so kann man die Strahlen des Bündels in zwei Gruppen zerlegen, so dass die Endstrahlen der einen Gruppe um eine ganze, die der anderen um eine halbe Wellenlänge gegen einander verschoben sind. Die der ersten Gruppe werden sich nach dem Vorhergehenden gegenseitig aufheben, die der letzteren aber, welche dem dritten Theile des Streifchens entsprechen, zu einem resultirenden Strahle vereinigen, dessen Amplitude $\frac{1}{3}$, dessen Lichtstärke folglich $\frac{1}{3^2}$ von derjenigen ist, welche bei dem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge für dasselbe Streifchen stattfand.

Wenn ferner die Gangunterschiede der Randstrahlen 5, 7, 9, ... überhaupt $2m+1$ halbe Wellenlängen betragen, so erhält man in derselben Weise resultirende Strahlen, deren Amplituden der Reihe nach $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{2m+1}$ und deren Intensitäten demnach $\frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{9^2}, \ldots \frac{1}{(2m+1)^2}$ von derjenigen sind, welche dem Gangunterschied von einer halben Wellenlänge zugehört.

Wäre überhaupt der Gangunterschied der Randstrahlen $m+\frac{p}{q}$ Wellenlängen, wo m eine ganze Zahl, $\frac{p}{q}$ einen echten Bruch bedeutet, so kann man, indem man das Streifchen im Verhältniss von $m : \frac{p}{q}$ abtheilt, aus dem Strahlenbündel m Gruppen bilden, deren Endstrahlen je um eine ganze Wellenlänge differiren und welche daher jede für sich verschwinden; als wirksam bleibt noch eine Gruppe zurück, welche einen Endstrahlenunterschied von $\frac{p}{q}\lambda$ (unter λ die Wellenlänge verstanden) besitzt und dem Bruchtheil $\frac{p}{m\,q+p}$ des Streifchens entspricht; dieselbe liefert einen resultirenden Strahl, dessen Amplitude $\frac{p}{mq+p}$ und dessen Intensität $\left(\frac{p}{mq+p}\right)^2$ von der-

jenigen ist, welche das ganze Streifchen bei dem Gangunterschied $\frac{p}{q}\lambda$ geben würde. Bezeichnen wir die bei dem Randstrahlenunterschied $x\lambda$ resultirende Amplitude mit $A(x\lambda)$, so können wir diesen Satz durch die Gleichung

$$A\left[\left(m+\frac{p}{q}\right)\lambda\right]=\frac{p}{mq+p}\cdot A\left(\frac{p}{q}\lambda\right)$$

ausdrücken.

Man erkennt hieraus, dass jedes elementare Bündel auf ein anderes zurückgeführt werden kann, dessen Randstrahlenunterschied weniger als eine ganze Wellenlänge beträgt. Sollte der Gangunterschied des letzteren grösser sein als ein halbe Wellenlänge, so lässt es sich wiederum auf ein anderes reduciren, dessen Gangunterschied um eben so viel kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Denn sei (Fig. 1) $AC=\left(\frac{1}{2}+\frac{p'}{q'}\right)\lambda$, wo $\frac{p'}{q'}<\frac{1}{2}$, und macht man $AR=BP$ so gross, dass $Pp=\frac{1}{2}\lambda$ und demnach $Rr=\frac{p'}{q'}\lambda$ wird, so vernichten sich die Bündel $ADPQ$ und $RSBE$, weil zu jedem Strahle im ersten ein Strahl im zweiten vorhanden ist, der gegen ihn um $\frac{1}{2}\lambda$ zurückbleibt. Die Wirkung reducirt sich also auf diejenige des Streifchens PR, dessen Randstrahlenunterschied $\left(\frac{1}{2}-\frac{p'}{q'}\right)\lambda$ ist und das sich zum ganzen Streifen AB verhält wie $\frac{1}{2}-\frac{p'}{q'}$ zu $\frac{1}{2}+\frac{p'}{q'}$. Die resultirende Amplitude für $AC=\left(\frac{1}{2}+\frac{p'}{q'}\right)\lambda$ ist daher $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{p'}{q'}}{\frac{1}{2}+\frac{p'}{q'}}$ von der für das ganze Streifchen bei $AC=\left(\frac{1}{2}-\frac{p'}{q'}\right)\lambda$ geltenden, oder man hat

$$A\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{p'}{q'}\right)\lambda\right]=\frac{q'-2p'}{q'+2p'}\cdot A\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{p'}{q'}\right)\lambda\right].$$

Zwei elementare Strahlenbündel, welche von verschieden langen Streifchen ausgehen, aber denselben Randstrahlenunterschied haben, wollen wir ähnlich nennen. Es ist klar, dass wir auf dem eingeschlagenen Wege nur ähnliche Strahlenbündel hinsichtlich ihrer Wirkung mit einander vergleichen können, was auch für unsere Zwecke vollkommen genügt. Nennen wir die resultirende Amplitude, welche ein Streifchen von der Länge 1, dessen Elementarstrahlen die Einheit der Amplitude besitzen, bei irgend einem Randstrahlenunterschied liefert, die für diesen Gangunterschied charakteristische Amplitude, so erhalten wir für ein mit diesem ähnliches Strahlenbündel die resultirende Schwingungsweite, wenn wir die charakteristische Amplitude mit der Länge des neuen Streifchens und mit der Amplitude seiner Elementarstrahlen multipliciren.

3. Gangunterschied des resultirenden Strahles. Zwei Lichtstrahlen

von gleicher Amplitude und gleicher Wellenlänge, welche sich nach derselben Richtung fortpflanzen, setzen sich zu einem resultirenden Strahle von derselben Wellenlänge zusammen, welcher dem einen componirenden Strahle um dieselbe Weglänge vorauseilt, um welche er gegen den anderen zurück ist, oder der Gangunterschied des resultirenden Strahles ist das arithmetische Mittel aus den Gangunterschieden der beiden componirenden Strahlen, wenn man alle Gangunterschiede auf einen und denselben nach der nämlichen Richtung sich fortpflanzenden Strahl bezieht. Auf diesen evidenten Satz gestützt, kann man leicht den Gangunterschied angeben, welcher der Resultante aus allen Elementarstrahlen eines Streifchens zukommt. Vereinigt man nämlich je zwei gleichweit von der Mitte M des Streifchens abstehende Strahlen PQ und RS (Fig. 1), so ist der Gangunterschied des resultirenden Strahles in Beziehung auf den einen Randstrahl AD gleich dem arithmetischen Mittel aus den Gangunterschieden Pp und Rr der componirenden, also gleich Mm. Die einzelnen Resultanten, welche man so erhält, haben nun zwar verschiedene Amplituden, jedoch gegenüber dem Randstrahl AD alle den gleichen Unterschied Mm. Durch ihre Vereinigung wird man daher einen Strahl erhalten, dessen Amplitude gleich ist der Summe der Amplituden der Einzelresultanten, welcher aber denselben Gangunterschied Mm besitzt, d. h. der resultirende Strahl eines schmalen Streifchens befindet sich in demselben Schwingungszustand, wieder von dessen Mitte ausgehende Elementarstrahl.

Es ist wohl zu bemerken, dass Alles in §§. 2 und 3 von den Elementarstreifen Gesagte unverändert gilt, mag nun die Ebene BAD des Strahlenbündels zur Ebene des Streifchens senkrecht stehen oder nicht.

4. Parallelogrammförmige Oeffnung. Ist die beugende Oeffnung ein Parallelogramm $ABCD$ (Fig. 2), so legen wir durch denjenigen Eckpunkt A, welcher von irgend einer zu dem betrachteten Strahlenbündel senkrechten Ebene $abcd$ die kleinste Entfernung hat, eine Ebene $A\beta\gamma\delta$ zu den gebeugten Strahlen senkrecht, also parallel zur beliebigen Wellenebene $abcd$, und bemerken, dass die Entfernungen $B\beta$ und $C\gamma$ der mit A benachbarten Eckpunkte B und C von der Ebene $A\beta\gamma\delta$, welche nichts anderes als die Projectionen der Seiten $AB=a$ und $AC=b$ auf die Strahlenrichtung sind, zusammen der Entfernung $D\delta$ der dritten Ecke D von derselben Ebene gleichkommen. Diese Strecken $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ sind alsdann die Gangunterschiede der Eckstrahlen Bb, Cc und Dd gegenüber dem Eckstrahl Aa.

Ist nun $B\beta$ einer ganzen Wellenlänge gleich, so denken wir uns das Parallelogramm durch gerade Linien parallel mit AB in schmale Streifchen zerlegt; der Gangunterschied der Endstrahlen eines jeden Streifchens beträgt alsdann eine ganze Wellenlänge; die Strahlen eines jeden Streifchens vernichten sich daher, und demnach auch die der ganzen Oeffnung.

Dasselbe findet statt, wenn $B\beta$ eine beliebige Anzahl ganzer Wellenlängen ausmacht.

Ebenso werden sich die Strahlen eines jeden Bündels vernichten, für welches die Projection $C\gamma$ der Seite AC auf die Strahlenrichtung gleich einer Anzahl ganzer Wellenlängen ist; man würde das wie vorhin erkennen, wenn man die Oeffnung parallel mit AC in schmale Streifchen zerlegte.

Das gebeugte Strahlenbündel wird also vernichtet, so oft die Projection einer Parallelogrammseite auf dessen Richtung einer Anzahl ganzer Wellenlängen gleich ist.

5. Construction des Grundrisses. Um daher einen dunkeln Punkt des Beugungsbildes zu finden, denken wir uns zunächst in der Grundrissebene durch den Punkt O, in welchem sich der Sammelpunkt der directen Strahlen projicirt, zwei Gerade OA und OB resp. parallel mit den Seiten a und b des Parallelogramms gezogen. Jede Gerade nun, welche durch O so gezogen ist, dass die Projection einer Parallelogrammseite auf sie eine oder mehrere ganze Wellenlängen beträgt, wird auf der Halbkugel einen dunkeln Punkt angeben. Damit nun die Projection der Seite a auf diese Gerade m Wellenlängen ausmache, muss letztere mit der Richtung OA der Seite a einen gewissen Winkel bilden, und alle Geraden, welche mit OA diesen Winkel machen, werden eben so gut auf der halbkugeligen Bildfläche dunkle Punkte bezeichnen. Alle diese Linien bilden aber in ihrer Gesammtheit die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Spitze in O und dessen Axe OA ist. Dieser Kegel schneidet die Kugelfläche längs eines Kreises, dessen Ebene senkrecht zu OA steht; die Durchschnittslinie der letzteren Ebene mit der Grundrissebene steht alsdann ebenfalls senkrecht zu OA und ist die Projection jenes, aus lauter dunkeln Punkten gebildeten Kugelkreises.

Es wird sonach eine Reihe dunkler Parallelkreise auf der Kugelfläche angegeben durch eine Reihe von geraden Kegeln, welche ihre Spitze in O und die Gerade OA zur gemeinschaftlichen Axe haben; diese dunkeln Kreise erscheinen im Grundriss als eine Reihe dunkler Geraden, welche senkrecht stehen zu OA.

Ebenso wird eine zweite Reihe dunkler Parallelkreise durch eine Reihe von Kegeln bestimmt, welche ihre Spitze ebenfalls in O und die Gerade OB zur gemeinschaftlichen Axe haben; sie projiciren sich als dunkle Gerade senkrecht zu OB.

Nun werde durch OA eine Ebene (die Zeichnungsebene der Fig. 3) senkrecht zur Grundrissebene gelegt; sie schneidet einen beliebigen Kegel der ersten Reihe längs seiner Erzeugenden OF (wo $OF=f$ gleich der Brennweite des Objectives ist). Alsdann trage man $O\alpha=a$ auf OA auf und fälle FE senkrecht auf OA und $\alpha\alpha'$ senkrecht auf OF, so muss $O\alpha'=m\lambda$ sein, und man hat die Lage des Punktes E, wo im Grundriss eine dunkle Linie die Gerade OA kreuzt, zu bestimmen. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OEF und $O\alpha'\alpha$ erhält man aber

$$OE : f = m\lambda : a,$$

daher

$$OE = \frac{f m \lambda}{a}.$$

Durch dieselbe auf OB und einen zugehörigen Kegel angewandte Construction findet man

$$OE_1 = \frac{f n \lambda}{b}$$

als Abstand des Punktes E_1, in welchem OB von einer dunkeln Linie der zweiten Reihe geschnitten wird.

Die dunkeln Linien einer jeden Reihe folgen demnach im Grundriss in gleichen Abständen auf einander, und zwar gilt für die erste Reihe der Abstand $\frac{f\lambda}{a}$, für die zweite der Abstand $\frac{f\lambda}{b}$. Diese Grössen verhalten sich aber wie die zu a und b als Grundlinien gehörigen Höhen h und h_1 des gegebenen Parallelogramms. Um daher im Grundriss das Netz der dunkeln Linien zu entwerfen, ziehe man zuerst durch O die Geraden OA und OB resp. parallel zu den Seiten a und b der Oeffnung, trage auf OA von O aus beiderseits gleiche Stücke ab, welche proportional (oder gleich) der zugehörigen Höhe h sind, und ebenso auf OB gleiche Stücke proportional (oder gleich) der zweiten Höhe h_1; in den Theilpunkten errichte man Senkrechte resp. auf OA und OB, so sind diese die gesuchten dunkeln Linien.

Zieht man ausserdem noch XOX' (Fig. 4) senkrecht zu OA und YOY' senkrecht zu OB, so wird durch diese beiden Linienschaaren der Grundriss in lauter unter sich congruente Parallelogramme zerschnitten, welche der gegebenen Oeffnung ähnlich, aber um 90° gegen dieselbe gedreht sind. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich folgende bequemere Construction für das Liniennetz.

Man ziehe durch die Bildmitte O zwei Gerade XX' und YY' resp. senkrecht zu den Seiten a und b des Parallelogramms, trage auf ihnen beiderseits von O gleiche Stücke auf, welche resp. a und b proportional (oder gleich) sind. Durch die Theilpunkte ziehe man Parallele mit YY' und XX', so sind diese die verlangten dunkeln Linien.

Die beiden Geraden XX' und YY', welche durch O gehen und nicht zu den dunkeln Linien gehören, sollen die Hauptaxen des Grundrisses, die dunkel umrahmten Felder, aus denen er zusammengesetzt ist, Spectra genannt werden. Das mittlere Spectrum, welches in seiner Mitte den Vereinigungspunkt O der directen Strahlen enthält, besteht aus vier der vorhin erwähnten Parallelogramme; die beiderseits von ihm längs der Hauptaxen aufgereihten Hauptspectra enthalten deren zwei und bilden mit dem Mittelspectrum ein Kreuz, dessen Arme zu den Seiten der Oeffnung senkrecht stehen. In den Winkeln dieses Kreuzes stehen die Winkelspectra, von denen jedes nur aus einem der obigen Parallelogramme besteht.

6. Die Intensität auf den Hauptaxen. Die Linie XX' ist die Projection des zur ersten Schaar dunkler Parallelkreise gehörigen Aequators. Die in den Punkten des letzteren sich vereinigenden Strahlenbündel stehen sämmtlich senkrecht zur Axe AO, d. h. zur Seite a des Parallelogramms, oder, was dasselbe ist, die Projection $B\beta$ (Fig. 2) von a auf die Strahlenrichtung ist Null. Die Normalebene der gebeugten Strahlen ($AB\gamma\delta$, Fig. 5) geht alsdann durch AB und es wird $C\gamma = D\delta$. Ist nun $C\gamma$ gleich einer Anzahl ganzer Wellenlängen, so wird das ganze Bündel ausgelöscht, wie man leicht erkennt, wenn man die Oeffnung parallel AC in Streifchen zerlegt; es entspricht dieser Fall den bereits bekannten Punkten, in welchen die mit YY' parallelen dunkeln Streifen die Hauptaxe XX' durchschneiden.

Ist dagegen $C\gamma = D\delta = \frac{1}{2}\lambda$, so kann keine vollständige Vernichtung eintreten, sondern die Strahlen werden sich zu einem resultirenden vereinigen, dessen Amplitude und Intensität wir zum Ausgangspunkt der Verchung wählen wollen. Bei $C\gamma = D\delta = \frac{3}{2}\lambda$ wird von jedem Streifchen nur das letzte Drittheil wirksam bleiben, dessen Endstrahlen um eine halbe Wellenlänge differiren; die resultirende Amplitude wird daher für jedes Streifchen nur $\frac{1}{3}$ von der vorigen sein, und da alle Streifchen unter sich in vollkommener Uebereinstimmung sind, so beträgt auch für das ganze Parallelogramm die Amplitude $\frac{1}{3}$, die Intensität sonach $\frac{1}{3^2}$ von der vorigen. Enthält ferner $C\gamma$ 5, 7, 9, ... $(2m+1)$ halbe Wellenlängen, so werden, wie man durch dieselbe Betrachtungsweise leicht findet, die resultirenden Amplituden der Reihe nach $\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{2m+1}$, und die zugehörigen Intensitäten $\frac{1}{5^2}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{9^2}, \ldots \frac{1}{(2m+1)^2}$ betragen. Wir können diese Intensitäten mit Schwerd „Maxima auf der Hauptaxe" nennen*). Die entsprechenden Punkte des Grundrisses, welche offenbar die Strecken zwischen den dunkeln Punkten der Hauptaxe halbiren, sind in Taf. I, Fig. 4 *a* mit 3′, 5′, 7′ ... bezeichnet. Der zwischen O und dem erste Minimum in der Mitte liegende Punkt 1′ kann nicht einmal genähert als ein Maximum betrachtet werden; das ihm entsprechende Maximum liegt in O selbst.

Sei endlich allgemein $C\gamma = D\delta = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ (Fig. 5), wo m eine ganze, $\frac{p}{q}$ eine echt gebrochene Zahl bezeichnet, so ziehe man, nachdem auf $C\gamma$ m Wellenlängen bis ε abgetragen sind, $\varepsilon\eta$ parallel $A\gamma$ und $\eta\zeta$ parallel AB,

---

*) Diese sogenannten Maxima sind nicht die wirklichen; diese liegen etwas vor jenen gegen die Mitte des Bildes zu, nähern sich ihnen aber um so mehr, je weiter man auf der Hauptaxe hinausgeht.

so vernichten sich die vom Parallelogramm $CD\eta\zeta$ ausgehenden Strahlen und es bleibt nur die Wirkung des schmalen Parallelogramms $AB\eta\zeta$ übrig, für welches der Gangunterschied der von A und η ausgehenden Eckstrahlen $\frac{p}{q}\lambda$ beträgt. Es verhält sich aber

$$A\eta : AC = \gamma\varepsilon : C\gamma$$

oder

$$A\eta : b = \frac{p}{q}\lambda : \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda.$$

Also ist

$$A\eta = \frac{p}{mq+p} \,.\, b$$

und der Flächeninhalt des wirksamen Theiles $AB\eta\zeta$ verhält sich zu dem des ganzen Parallelogramms $ABCD$ wie $\frac{p}{mq+p}$ zu 1. Das von $AB\eta\zeta$ ausgehende Strahlenbündel ist aber ähnlich mit dem Strahlenbündel, das mit dem Gangunterschiede $C\gamma = D\delta = \frac{p}{q}\lambda$ von dem ganzen Parallelogramm ausgeht; denn würde die Oeffnung parallel AC in Streifchen zerlegt, so wären die Strahlenbündel der einzelnen Streifchen von $AB\eta\zeta$ unter dieser Voraussetzung ähnlich denjenigen von $ABCD$. Die bei dem Gangunterschied $C\gamma = D\delta = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ resultirende Amplitude beträgt daher $\frac{p}{mq+p}$, die Intensität $\left(\frac{p}{mq+p}\right)^2$ von derjenigen, welche bei dem Gangunterschied $C\gamma = D\delta = \frac{p}{q}\lambda$ statthaben würde, oder es ist, wenn wir die oben eingeführte Bezeichnung auch hier gebrauchen, vom Vorzeichen abgesehen:

$$A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda\right] = \frac{p}{mq+p} \,.\, A\left(\frac{p}{q}\lambda\right).$$

Wären sonach die Intensitäten aller zwischen O und dem ersten Minimum gelegenen Punkte bekannt, so könnte man auch die Intensitäten für alle übrigen Punkte der Hauptaxe sofort angeben. Ja, durch eine Betrachtung, welche sich von der in §. 2 für ein Streifchen durchgeführten in nichts unterscheidet, lässt sich leicht zeigen, dass hierzu nur die Kenntniss der zwischen O und $1'$ enthaltenen Intensitäten nöthig ist.

Für die zweite Hauptaxe YY' würde man durch dieselbe Betrachtungsweise offenbar ganz die nämliche Reihe von Intensitäten finden.

7. Intensität in einem beliebigen Punkte des Bildes. Es sei ganz allgemein (Fig. 6) $C\gamma = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ und $B\beta = \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda$, wo wieder m und n ganze Zahlen, $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ echte Brüche bedeuten, so trage man

auf $C\gamma$ m, auf $B\beta$ aber n ganze Wellenlängen von C und B aus ab, und ziehe durch die letzten Theilpunkte ε und ϑ resp. $\varepsilon\eta$ und $\vartheta\iota$ parallel mit $A\gamma$ und $A\beta$, sodann $\eta\zeta$ parallel AB und $\iota\varkappa$ parallel AC, so vernichten sich die Strahlen des Parallelogramms $CD\eta\zeta$ und ebenso diejenigen des Parallelogramms $B\iota\varkappa\zeta$ aus bekannten Gründen, und es bleibt nur übrig die Wirkung des kleinen Parallelogramms $A\eta\iota\varkappa$, dessen Eckstrahlen in η und ι resp. um $\frac{p}{q}\lambda$ und $\frac{r}{s}\lambda$ gegen den Eckstrahl in A zurück sind. Das von $A\eta\iota\varkappa$ ausgehende Strahlenbündel kann als mit dem von dem ganzen Parallelogramm ausgehenden, für welches $C\gamma=\frac{p}{q}\lambda$ und $B\beta=\frac{r}{s}\lambda$ wäre, ähnlich bezeichnet werden; denn man kann beide Bündel in eine gleiche Zahl der Reihe nach ähnlicher Elementarbündel zerlegen. Da nun $A\eta=\frac{p}{mq+p}\cdot b$ und $A\iota=\frac{r}{ns+r}\cdot a$ ist, so verhält sich der Flächeninhalt des Parallelogramms $A\eta\iota\varkappa$ zu dem des ganzen wie $\frac{p}{mq+p}\cdot\frac{r}{ns+r}$ zu 1, die von jenem erzeugte Amplitude ist also $\frac{p}{mq+p}\cdot\frac{r}{ns+r}$ von derjenigen, welche stattfinden würde, wenn $\frac{p}{q}\lambda$ und $\frac{r}{s}\lambda$ die Verzögerungen der Eckstrahlen in C und B für das ganze Parallelogramm wären.

Sei daher (Taf. I, Fig. 2) $C\gamma=\frac{p}{q}\lambda$, $B\beta=\frac{r}{s}\lambda$, so zerlege man das Parallelogramm $ABCD$ in Streifchen parallel AC; für jedes derselben ist der Gangunterschied der Endstrahlen $\frac{p}{q}\lambda$, also die resultirende Amplitude $b.A\left(\frac{p}{q}\lambda\right)$, wenn die charakteristische Amplitude für den Gangunterschied $\frac{p}{q}\lambda$ gleich $A\left(\frac{p}{q}\lambda\right)$ und die Amplitude jedes Elementarstrahls gleich 1 gesetzt wird. Jeder resultirende Strahl hat gegenüber dem Eckstrahl in A denselben Gangunterschied, wie der von der Mitte des entsprechenden Streifchens ausgehende Elementarstrahl; die resultirenden Strahlen in ihrer Gesammtheit bilden daher wieder ein Streifchen, dessen Lage hinsichtlich seiner Gangunterschiede durch die Mittellinie EF des Parallelogramms angegeben wird. Der Gangunterschied seiner Endstrahlen $E\varepsilon$ und $F\varphi$ beträgt offenbar $\frac{r}{s}\lambda$; die Amplitude des resultirenden Strahles (welcher den nämlichen Gangunterschied gegenüber A hat, wie der von der Mitte M ausgehende Elementarstrahl), wäre daher $a.A\left(\frac{r}{s}\lambda\right)$, wenn die Amplitude

jedes einzelnen Strahles im Streifchen EF gleich 1 wäre; da dieselbe aber $b \, . \, A\left(\frac{p}{q}\lambda\right)$ ist, so hat man als Amplitude der Gesammtresultante

$$ab \, . \, A\left(\frac{p}{q}\lambda\right) . \, A\left(\frac{r}{s}\lambda\right).$$

Vernachlässigt man den für alle Bildpunkte constanten Factor ab, so ist also die für $C\gamma = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ und $B\beta = \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda$ resultirende Amplitude

$$A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right] = \frac{p}{mq+p} \cdot \frac{r}{ns+r} \, . \, A\left(\frac{p}{q}\lambda\right) . \, A\left(\frac{r}{s}\lambda\right).$$

Nun haben wir oben gezeigt, dass

$$\frac{p}{mq+p} \, . \, A\left(\frac{p}{q}\lambda\right) = A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda\right],$$

also auch

$$\frac{r}{ns+r} \, . \, A\left(\frac{r}{s}\lambda\right) = A\left[\left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right]$$

ist. Wir erhalten demnach als resultirende Amplitude

$$A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right] = A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda\right] . \, A\left[\left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right]$$

und als resultirende Intensität

$$J = \left\{A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda\right]\right\}^2 . \left\{A\left[\left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right]\right\}^2.$$

Alle Strahlenbündel, für welche $C\gamma = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ ist, haben ihre Vereinigungspunkte in einem Parallelkreise, welcher sich in einer Geraden parallel YY' projicirt; ebenso entspricht den Strahlenbündeln, für welche $B\beta = \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda$ ist, im Grundriss eine zu XX' parallele Gerade. Der Durchschnittspunkt P dieser beiden Geraden ist die Projection des Bildpunktes, für welchen $C\gamma = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$ und $B\beta = \left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda$ zu gleicher Zeit gilt. In den Punkten, in welchen die beiden Geraden den Hauptaxen XX' und YY' begegnen (wir nennen sie die zu P coordinirten Punkte), finden aber nach §. 6 die Intensitäten

$$\left\{A\left[\left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda\right]\right\}^2 \text{ und } \left\{A\left[\left(n + \frac{r}{s}\right)\lambda\right]\right\}^2$$

Statt. Wir sehen also, dass die Intensität in irgend einem Punkte des Bildes gleich ist dem Producte der Intensitäten, welche in den ihm coordinirten Punkten auf den Hauptaxen herrschen.

So ist namentlich die Intensität in den Punkten, welche den Gangunterschieden $C\gamma = \frac{2m+1}{2}\lambda$ und $B\beta = \frac{2n+1}{2}\lambda$ entsprechen, ausgedrückt

durch $\frac{i}{(2m+1)^2} \cdot \frac{i}{(2n+1)^2}$, wenn die Intensität der in Fig. 4*a* mit 1′ und 1″ bezeichneten Stellen gleich *i* angenommen wird. Diese Punkte liegen in der Mitte der Winkelspectra und sind in der Figur mit den Nennern ihrer Intensitätsausdrücke bezeichnet. Wir können diese Intensitäten in dem nämlichen Sinne, wie oben, Maxima nennen. — Aus den obigen Betrachtungen ergiebt sich noch wie von selbst der Satz, dass der resultirende Strahl sich stets in demselben Schwingungszustande befindet, wie der vom Kreuzungspunkte der Diagonalen ausgehende Elementarstrahl. (Vergl. §. 11.)

8. Der schmale Spalt. Lässt man die eine Seite *a* des Parallelogramms immer grösser werden, während die andere *b* unverändert bleibt, so rücken die zu *a* senkrechten, mit XX' parallelen dunkeln Linien immer näher zusammen, während die zu YY' parallelen ihre Lage unverändert beibehalten. Ist *a* endlich im Verhältniss zur Wellenlänge so ausserordentlich gross geworden, dass seine Projection auf eine beliebige Strahlenrichtung, selbst wenn diese mit *a* einen Winkel von nahe 90° bilden sollte, eine sehr grosse Anzahl ganzer Wellenlängen enthält, so wird für jede solche Strahlenrichtung von der ganzen Oeffnung nur ein sehr kleiner Theil wirksam bleiben. Die Intensität wird daher in allen Punkten des Bildes verschwindend klein ausfallen, mit Ausnahme von denjenigen, deren Strahlenbündel zur Seite *a* senkrecht stehen, welche also in der Hauptaxe XX' projicirt sind. Die durch einen schmalen Spalt hervorgebrachte Beugungserscheinung wird daher aus einer einzigen, durch *O* gehenden und zu den Spalträndern senkrechten hellen Linie bestehen, welche in gleichen Abständen von dunkeln Stellen unterbrochen ist und im Uebrigen die nämlichen Intensitätsverhältnisse aufweist, wie die Hauptaxe bei einem gleichbreiten Parallelogramm.

Bei dem Versuch mit der Spaltöffnung wählt man als Lichtquelle in der Regel nicht einen Lichtpunkt, sondern eine zu den Spalträndern parallele Lichtlinie. Die Lichtstrahlen, welche von den einzelnen Punkten der Lichtlinie ausgehen, interferiren unter sich nicht (sie sind „incohärent“); jeder dieser Lichtpunkte liefert alsdann eine solche durch sein Bild *O* gehende, zu den Spalträndern senkrechte helle Linie; alle diese Lichtlinien fügen sich mit ihren Punkten gleicher Intensität stetig zu dem Beugungsbilde zusammen; die dunkeln Punkte geben dunkle zu den Spalträndern parallele Streifen, welche das Beugungsbild in einzelne Spectra zerfällen, von denen das mittlere doppelt so breit ist, als die Seitenspectra, und deren Höhe der scheinbaren Höhe der Lichtlinie gleichkommt.

Die erwähnten dunkeln Streifen werden offenbar von jenen Strahlenbündeln hervorgebracht, deren Randstrahlenunterschied eine ganze Anzahl von Wellenlängen beträgt, für welche also $b \sin \psi = m\lambda$ ist, wenn mit ψ der Beugungswinkel und mit *b* die senkrecht zu den Rändern gemessene Breite des Spaltes bezeichnet wird.

9. Von Parallelcurven begrenzte Spalte. Ist die beugende Oeffnung ein Spalt mit geradlinigen parallelen Rändern, dessen obere Begrenzungscurve mit der untern congruent und parallel ist (Fig. 7), so dass, wenn *EF* parallel zum Rande *AB* gezogen wird, die Tangente in *E* parallel läuft zur Tangente in *F*, so lässt sich der Spalt parallel *AB* in schmale oder gleichlange Parallelogramme zerlegen. Die Wirkung eines jeden dieser Streifchen verschwindet, sobald die Projection der Randlänge *AB* (welche hier nicht als unendlich gross im Vergleich zur Wellenlänge angenommen wird) auf die Richtung der gebeugten Strahlen eine Anzahl ganzer Wellenlängen beträgt; man sieht hieraus sogleich, dass der Grundriss des Beugungsbildes, von welcher Natur übrigens die Begrenzungscurven sein mögen, von dunkeln Streifen senkrecht zum Spaltrande durchschnitten wird, welche um so enger zusammenrücken, je grösser die Randlänge wird. Es sind dies genau dieselben Streifen, welche ein Parallelogramm von gleicher Randlänge senkrecht zu dieser hervorbringen würde.

Ferner findet auf der durch *O* senkrecht zum Rande gezogenen Hauptaxe dieselbe Intensitätsvertheilung statt, welche ein Parallelogramm von gleicher Breite und Randlänge daselbst erzeugen würde; denn die Streifchen, in welche man die Oeffnung parallel *AB* zerlegen kann, sind der Reihe nach identisch mit denen des Parallelogramms, und ihre resultirenden Strahlen haben unter sich die nämlichen Gangunterschiede wie dort.

Ehe wir zur Untersuchung des Beugungsbildes einer dreieckigen Oeffnung übergehen, sei es gestattet, in den beiden folgenden Paragraphen noch einige allgemeinere Betrachtungen hier anzuschliessen.

10. Oeffnungen, deren Ordinaten sich für dieselben Abscissen nur durch einen constanten Factor unterscheiden. Denken wir uns eine ganz beliebig begrenzte Oeffnung und den Grundriss ihres Beugungsbildes auf ein und dasselbe durch *O* gelegte rechtwinklige Coordinatensystem bezogen, und zerlegen wir dieselbe parallel der (willkürlich zu wählenden) Ordinatenaxe in Streifchen von gleicher Breite, so können wir jedes derselben als ein schmales Rechteck betrachten. Eine ganz beliebige Richtung der gebeugten Strahlen denken wir uns angegeben durch die gemeinschaftliche Erzeugende zweier gerader Kegel, deren gemeinsame Spitze in *O* liegt, und von denen der eine die Abscissen-, der andere die Ordinatenaxe zur Axe hat. Die Projectionen der beiden Kreise, welche von diesen Kegeln auf der halbkugeligen Bildfläche angegeben werden, sind Gerade, welche resp. senkrecht zur Abscissen- und Ordinatenaxe stehen und deren Durchschnitt der dem betrachteten Strahlenbündel entsprechende Punkt des Grundrisses ist. Jetzt werde die Länge eines der obigen Rechteckchen dadurch geändert, dass man sie mit der Zahl *k* multiplicirt, während die Breite ungeändert bleibt. Damit das Strahlenbündel, welches von dem neuen Rechteckchen ausgeht, mit dem früheren ähnlich bleibe, muss sich

die Oeffnung des zweiten Kegels ändern (und zwar kleiner oder grösser werden, je nachdem k grösser oder kleiner als 1 ist), während der erste Kegel derselbe bleibt. In Fig. 3 sei OA die Ordinatenaxe, FOA die durch sie senkrecht zur Grundrissebene gelegte Ebene, und $FO = f$ die in letzterer enthaltene Erzeugende des zweiten Kegels; ist nun für das ursprüngliche Rechteckchen $O\alpha = y$ dessen Länge und $OE = Y$ die Ordinate des Bildpunktes, sind ferner $O\alpha = ky$ und $OE = Y'$ die entsprechenden Grössen für das veränderte Rechteckchen, so muss, wenn die Strahlenbündel einander ähnlich sein sollen, in beiden Fällen $O\alpha'$ den nämlichen Werth $\mu\lambda$ haben, und es ergiebt sich

$$Y = \frac{f\mu\lambda}{y}$$

und

$$Y' = \frac{f\mu\lambda}{ky}.$$

Folglich ist

$$Y' = \frac{Y}{k}.$$

Verfährt man so mit allen Rechteckchen, d. h. multiplicirt man sämmtliche Ordinaten der Oeffnung mit dem nämlichen Factor k, so sieht man, dass die einzelnen elementaren Strahlenbündel den früheren der Reihe nach ähnlich bleiben, wenn man nur den Abstand der zur Abscissenaxe parallelen Geraden, welche die Projection der Grundfläche des zweiten Kegels ist, in demselben Verhältniss kleiner oder grösser macht, in welchem man die Ordinaten der Begrenzungscurve vergrössert oder verkleinert hat. Der neue Bildpunkt, den man so erhält, hat die nämliche Intensität wie der frühere, abgesehen von einem constanten Factor k^2, welcher durch die Aenderung des Flächeninhalts der Oeffnung (derselbe ist das k-fache des vorigen) bedingt ist. Aendert man also eine Oeffnung derart, dass man ihre Ordinaten alle mit der nämlichen Zahl k multiplicirt, so erhält man das neue Beugungsbild, indem man die Ordinaten des früheren durch dieselbe Constante k dividirt. Die Linien gleicher Intensität des ursprünglichen Bildes verwandeln sich also durch diese Behandlung in die Linien gleicher Intensität im Bilde der geänderten Oeffnung.

Für eine kreisförmige Oeffnung ist klar, dass die Punkte gleicher Intensität, also namentlich auch die völlig dunkeln, sich in Kreislinien um O als Mittelpunkt gruppiren werden. Lässt man nun die kreisförmige Oeffnung in eine elliptische übergehen, deren grosse Axe in die Ordinatenaxe fällt, indem man jede Ordinate mit k (> 1) multiplicirt, so wird jeder Kreis im Beugungsbilde, indem man seine Ordinaten durch k dividirt, in eine Ellipse verwandelt, deren grosse Axe in die Abscissenaxe zu liegen kommt. Eine Ellipse liefert demnach, als beugende Oeff-

nung gebraucht, elliptische Ringe, welche mit ihr ähnlich, aber um 90° gegen sie gedreht sind.

Multiplicirt man sowohl die Abscissen als die Ordinaten einer Oeffnung mit einem und demselben Factor k, so muss man gleichzeitig die Abscissen und Ordinaten des Beugungsbildes durch k dividiren. Die neue Oeffnung ebenso wie ihr Beugungsbild bleiben alsdann den ursprünglichen ähnlich, nur sind die Dimensionen des letzteren in demselben Verhältniss kleiner geworden, in dem man die der ersteren vergrössert hat, und umgekehrt. Wollte man daher, um an Lichtstärke zu gewinnen, immer grössere und grössere Oeffnungen anwenden, so würde man bald eine Grenze erreichen, für welche das Beugungsbild nicht mehr deutlich gesehen wird, weil seine hellen und dunkeln Linien sich zu enge zusammendrängen. Der Hauptvortheil der Fernrohrbeobachtung vor der mit blossem Auge beruht gerade darauf, dass man bei gleicher Deutlichkeit des Bildes grössere Oeffnungen anwenden und dadurch eine (im Verhältniss der Quadrate der Flächeninhalte) grössere Lichtstärke erzielen kann.

11. Oeffnungen mit Mittelpunkt und (mindestens) **einem Paar conjugirter Durchmesser.** Betrachten wir jetzt eine Oeffnung, deren Contur einen Mittelpunkt besitzt, d. h. einen Punkt, in welchem alle durch ihn gezogenen Sehnen halbirt werden. Legen wir durch diesen zwei conjugirte Durchmesser (deren jeder die mit dem anderen parallelen Sehnen halbirt) und zerlegen wir die Oeffnung parallel mit dem einen in lauter gleichbreite Streifchen, welche wir als schmale Parallelogramme betrachten können. Zwei dieser Streifchen, welche beiderseits gleichweit vom Mittelpunkt abstehen, sind von gleicher Länge und senden, welches auch die Richtung der gebeugten Strahlen sein mag, ähnliche Strahlenbündel aus; sie geben daher, jedes für sich, Resultanten von gleicher Amplitude, welche den nämlichen Gangunterschied gegenüber einem beliebig gewählten Strahle besitzen, wie die von den Mitten der Streifchen ausgehenden Elementarstrahlen. Diese beiden Resultanten, wiederum mit einander vereinigt, liefern einen Strahl, welcher denselben Gangunterschied hat, wie der durch den Mittelpunkt der Oeffnung gehende Elementarstrahl. So lassen sich die Wirkungen aller Streifchen, indem man sie je zwei und zwei zusammenfasst, ersetzen durch die Wirkung von durch den Mittelpunkt der Oeffnung gehenden Strahlen, welche zwar unter sich verschiedene Amplituden, aber alle denselben Gangunterschied haben. Der resultirende Strahl einer mit einem Mittelpunkt begabten Oeffnung befindet sich also stets in demselben Schwingungszustand, wie der durch den Mittelpunkt gehende Elementarstrahl.

Dieser Satz findet Anwendung auf das Parallelogramm (s. §. 7), indem man dessen Diagonalen oder dessen Mittellinien als conjugirte Durchmesser betrachten kann; ebenso auf jedes regelmässige Vieleck von gerader Seitenzahl; ferner auf den Kreis, die Ellipse etc.

12. Dreieckige Oeffnung. Wir legen durch den Eckpunkt A (Fig. 8) des Dreiecks, welcher einer beliebigen Normalebene der gebeugten Strahlen am nächsten liegt, zu diesen eine Ebene senkrecht; $B\beta$ und $C\gamma$, die Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von dieser Ebene, oder, was dasselbe ist, die Projectionen der Dreiecksseiten $AC = c$ und $AB = b$ auf die Richtung der gebeugten Strahlen, sind alsdann die Gangunterschiede der Eckstrahlen in B und C gegenüber dem Eckstrahl in A.

Sei nun beispielsweise $B\beta$ gleich einer, $C\gamma$ gleich zwei ganzen Wellenlängen, und man zieht von B aus die Gerade BD nach dem Halbirungspunkt der Gegenseite, so werden alle von dem Streifen BD ausgehende Strahlen unter sich in gleichem Schwingungszustand, und zwar hinter dem Strahl AA' um eine Wellenlänge zurück, dagegen dem Strahl $C\gamma$ um eben so viel voraus sein. Ueberhaupt wird jeder mit BD parallele Streifen Strahlen aussenden, welche unter sich in gleichen Schwingungszuständen sind. Zwei solche Streifen, welche die Grundlinie AC in zwei um $AD = \frac{1}{2}AC$ entfernten Punkten treffen, sind um eine ganze Wellenlänge in ihrem Gange verschieden; zwei Streifen aber, welche um $\frac{1}{4}AC$ von einander abstehen, differiren unter sich um eine halbe Wellenlänge. Zieht man daher durch einen beliebigen Punkt (a Fig. 9) der Seite AC, der um weniger als $\frac{1}{4}AC$ von A absteht, eine Parallele zu BD, ebenso durch die Punkte (b, c, d), welche resp. um $\frac{1}{4}AC$, $\frac{2}{4}AC$, $\frac{3}{4}AC$ von a abstehen, so sind die Streifen aa' und cc', ebenso bb' und dd' unter sich in vollkommener Uebereinstimmung, da ihr Gangunterschied eine ganze Wellenlänge beträgt; hingegen stehen aa' und cc' mit bb' und dd' in directem Gegensatz, da zwischen ihnen ein Gangunterschied von einer halben Wellenlänge herrscht. Da nun, wie sich aus dem blosen Anblick der Figur ergiebt, die Summe der Streifen aa' und cc' gleich ist der Summe der Streifen bb' und dd', so vernichten sich ihre Strahlen gegenseitig. Da sich aber zu jedem beliebigen Streifen auf diese Weise noch drei hinzufinden lassen, welche mit ihm die Lichtstärke Null geben, so vernichten sich alle von der dreieckigen Oeffnung kommenden Strahlen, sobald die Projection der einen Seite auf die Strahlenrichtung eine, die der zweiten Seite zwei, die der dritten demnach ebenfalls eine ganze Wellenlänge beträgt.

Allgemein lässt sich behaupten, dass die Wirkung des gebeugten Bündels Null ist, sobald die Projectionen zweier Dreiecksseiten auf die Strahlenrichtung zwei verschiedenen Zahlen ganzer Wellenlängen gleich sind (nothwendig ist dann auch die Projection der dritten Seite auf dieselbe Richtung gleich einer Anzahl ganzer Wellenlängen). Sei, um diese Behauptung zu erhärten, $B\beta = m\lambda$, $C\gamma = (m+n)\lambda$, so theile man AC in $m+n$ gleiche Theile, ziehe durch den m^{ten} Theilpunkt (M), von A aus gerechnet, BM, so wird jeder mit BM parallele Streifen Strahlen liefern, welche unter sich in gleichem Schwingungszustande sind; je zwei Streifen, welche durch zwei benachbarte Theilpunkte gehen, werden unter sich um

eine ganze Wellenlänge im Gange verschieden sein, und dasselbe wird überhaupt gelten für je zwei solche, welche um $\frac{AC}{m+n}$, auf AC gemessen, von einander abstehen. Zwei Streifen dagegen, welche auf AC das Stück $\frac{AC}{2(m+n)}$ zwischen sich fassen, differiren unter sich um eine halbe Wellenlänge. Zieht man nun durch einen Punkt a, welcher um weniger als $\frac{AC}{2(m+n)}$ von A absteht, und durch alle Punkte $b, c, d, \ldots$, die von a um $\frac{AC}{2(m+n)}$, $2 \cdot \frac{AC}{2(m+n)}$, $3 \cdot \frac{AC}{2(m+n)}$ u. s. f. entfernt sind, Streifen parallel BM, so treffen auf AM $2m$, auf MC $2n$ solcher Streifen. Unter diesen sind die Streifen aa', cc', ... unter sich, ebenso bb', dd', ... unter sich in Uebereinstimmung, die erste Gruppe befindet sich aber zur zweiten in vollem Gegensatz. Bezeichnet man die Länge des ersten Streifens mit x, die des letzten oder $2(m+n)^{\text{ten}}$ mit y, und die Linie BM mit d, so ist im Dreieck ABM jeder folgende Streifen um $\frac{d}{2m}$ länger, im Dreieck BMC aber jeder folgende um $\frac{d}{2n}$ kürzer als der vorhergehende. Die verschiedenen Streifenlängen sind demnach:

1)	$x,$	2)	$\frac{d}{2m}+x,$
3)	$\frac{2d}{2m}+x,$	4)	$\frac{3d}{2m}+x,$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$2m-1)$	$\frac{(2m-2)d}{2m}+x,$	$2m)$	$\frac{(2m-1)d}{2m}+x,$
$2m+1)$	$\frac{(2n-1)d}{2n}+y,$	$2m+2)$	$\frac{(2n-2)d}{2n}+y,$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$2m+2n-3)$	$\frac{3d}{2n}+y,$	$2m+2n-2)$	$\frac{2d}{2n}+y,$
$2m+2n-1)$	$\frac{d}{2n}+y,$	$2m+2n)$	$y.$

Addirt man jede dieser beiden Gruppen, so erhält man als Summe der Streifen von ungerader Ordnungszahl

$$\left(\frac{2+4+\ldots+(2m-2)}{2m}+\frac{1+3+\ldots(2n-1)}{2n}\right)d+mx+ny$$

und als Summe der Streifen von gerader Ordnungszahl

$$\left(\frac{1+3+\ldots+(2m-1)}{2m}+\frac{2+4+\ldots+(2n-2)}{2n}\right)d+mx+ny.$$

Nun ist aber die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2m-1$ gleich m^2, und die der geraden von 2 bis $2m-2$ gleich $m(m-1)$; man hat sonach als Summe der ungeraden Streifen

$$\frac{m+n-1}{2}d+mx+ny$$

und als Summe der geraden ebenfalls

$$\frac{m+n-1}{2}d+mx+ny.$$

Da diese beiden Summen einander gleich, ihre Wirkungen aber gerade entgegengesetzt sind, so heben sie sich gegenseitig auf. Dasselbe würde von jeder anderen derartigen Streifenreihe gelten. Das gebeugte Bündel wird also zerstört, wenn jede der Projectionen zweier Dreiecksseiten gleich einer anderen Anzahl ganzer Wellenlängen ist. Im Bilde erscheint also überall da, wo ein solches Bündel vereinigt wird, ein dunkler Punkt.

13. Construction des Grundrisses. Um im Grundrisse die dunkeln Punkte zu bestimmen, ziehe man (Fig. 10) OB parallel der Dreiecksseite $AC(b)$ und OC parallel $AB(c)$ und trage auf diesen Linien von O aus beiderseits Stücke auf, welche resp. gleich $\frac{f\lambda}{b}$ und $\frac{f\lambda}{c}$, welche sich also umgekehrt wie die Dreiecksseiten b und c, oder direct wie die zugehörigen Höhen h' und h'' verhalten. In den Theilpunkten errichte man Senkrechte resp. zu OB und OC; da, wo sich zwei dieser Senkrechten, die Theilpunkten von ungleicher Ordnungszahl entsprechen, durchschneiden, treten im Bilde dunkle Punkte auf. Diese Construction ergiebt sich durch dieselbe Schlussreihe, welche oben beim Parallelogramm angewendet wurde. Es wird daher nicht nöthig sein, dieselbe hier zu wiederholen.

Eine andere bequemere Construction ergiebt sich durch folgende Betrachtung.

Ist wie vorhin OB (Fig. 10) parallel AC, OC parallel AB gezogen, ferner $O\beta$ proportional (oder $=$) h'', $O\gamma$ proportional (oder $=$) h' gemacht worden, so ist Dreieck $O\beta\gamma$ ähnlich dem gegebenen Dreieck ACB, weil Winkel $\beta O\gamma = \angle A$ und $O\beta : O\gamma = h'' : h' = b : c$. Errichtet man nun, um die beiden ersten Geraden der obigen zwei Liniensysteme zu erhalten, $\beta\delta$ senkrecht zu OC und $\gamma\delta$ senkrecht zu OB, zieht ferner durch $O\,XX'$ parallel $\beta\delta$ und YY' parallel $\gamma\delta$, und verbindet O mit δ, so ist Dreieck $\varepsilon\delta O$ ähnlich dem Dreieck $O\beta\gamma$ (ε ist der Durchschnittspunkt von $\gamma\delta$ mit XX'); denn Winkel $O\varepsilon\delta$ ist gleich $\angle\beta O\gamma = \angle A$, weil ihre Schenkel auf einander senkrecht stehen; ferner würde ein über $O\delta$ als Durchmesser beschriebener Kreis durch β und γ gehen; es ist daher $\angle O\delta\gamma = \angle O\beta\gamma = \angle C$ als Peri-

pheriewinkel über dem gleichen Bogen; Dreieck $\varepsilon\delta O$ ist daher ähnlich mit Dreieck $O\beta\gamma$ und folglich auch mit dem gegebenen ACB, und zwar verhält sich $O\delta:\delta\varepsilon:O\varepsilon = a:b:c$. Aus dieser Aehnlichkeit folgt weiter noch, dass die Gerade $O\delta$ oder ZZ', welche die Durchschnittspunkte je zweier zu Theilpunkten von gleicher Ordnungszahl gehörigen Senkrechten enthält, senkrecht steht zu der dritten Dreiecksseite a.

Um daher das Liniennetz, dessen Knoten dunkle Punkte sind, zu entwerfen, ziehe man XX' senkrecht zur Seite c der dreieckigen Oeffnung, YY' senkrecht zu b, trage auf ersterer Linie gleiche Stücke proportional c, auf letzterer Stücke proportional b auf, und ziehe durch die Theilpunkte Parallele resp. zu YY' und XX'; die dritte zur Seite a durch O gelegte Senkrechte ZZ' geht dann durch alle jene Schnittpunkte, welche keine Nullpunkte sind (ebenso wenig wie die auf XX' und YY' selbst gelegenen Theilpunkte) und wird durch sie in Stücke abgetheilt, die proportional a sind. Man hätte statt XX' oder YY' ebenso gut ZZ' der Construction zu Grunde legen können; die durch die Theilpunkte von XX' oder YY' mit ihr parallel gelegten Geraden gehen nothwendig durch die nämlichen vorhin schon erhaltenen Knotenpunkte. Ueber den Grundriss ist also ein aus drei Schaaren paralleler Geraden gebildetes Netz ausgebreitet, welche resp. zu den Seiten der dreieckigen Oeffnung senkrecht stehen und sich je drei in den nämlichen Punkten durchkreuzen; sie zerschneiden den Grundriss in congruente Dreiecke, welche mit der Oeffnung ähnlich, aber nach der einen oder andern Seite hin um 90^0 gegen sie gedreht sind. Alle Knotenpunkte sind Nullpunkte, mit Ausnahme derjenigen, welche auf den drei durch die Bildmitte gehenden Geraden XX', YY', ZZ' liegen. Wir wollen diese drei Geraden die Hauptaxen des Bildes nennen (Fig. 11).

14. Die Intensität auf den Hauptaxen. In einer Hauptaxe (z. B. ZZ') erscheinen diejenigen Bildpunkte projicirt, deren erzeugende Strahlenbündel senkrecht zur entsprechenden Dreiecksseite (a) stehen, so dass die Projectionen der beiden anderen Seiten auf die Strahlenrichtung einander gleich werden.

Sei demnach $B\beta = C\gamma$ (Fig. 8), so sendet jeder mit BC parallele Streifen Strahlen von gleichem Schwingungszustande aus; ist nun zunächst $B\beta = C\gamma = \lambda$ und man zieht (Taf. I, Fig. 12) DE durch die Mitte D von AB parallel mit BC, ebenso DF parallel AC, so vernichten sich die Wirkungen der Dreieckchen ADE und DBF, denn zu jedem Streifen des ersten lässt sich ein anderer gleichgrosser im zweiten angeben, der gegen ihn einen Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$ hat; es bleibt also nur die Wirkung des Parallelogramms $EDFC$ übrig, dessen Endstrahlen längs CF gegen diejenigen längs ED um $\frac{1}{2}\lambda$ zurück sind, und welches dem Flächeninhalte nach die Hälfte des Dreiecks ABC ist.

Ist weiter $B\beta = C\gamma = m\lambda$, so theile man AC (Fig. 13) in m gleiche

Theile, ziehe durch die Theilpunkte Parallele zu AB und BC; die Wirkung eines jeden der so entstandenen Parallelogramme ist aus bekannten Gründen Null. Die noch übrig gebliebenen kleinen Dreiecke, deren jedes $\frac{1}{m^2}$ vom ganzen ist, kann man ebenso behandeln wie vorher; es bleibt alsdann von jedem noch die Wirkung eines kleinen Parallelogramms übrig, welches die Hälfte des entsprechenden Dreieckchens, also $\frac{1}{2m^2}$ vom ganzen Dreieck ist (die wirksamen Parallelogramme sind in der Figur schraffirt). Die Strahlenbündel, welche diesen Parallelogrammchen zugehören, sind aber ähnlich mit dem Strahlenbündel des Parallelogramms $EDFC$ im vorigen Falle (Fig. 12), da ihr Randstrahlenunterschied wie dort $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt; ausserdem ist jedes derselben gegen das benachbarte um eine ganze Wellenlänge verschoben, so dass alle unter sich in vollem Einklange stehen. Die aus der Wirkung aller resultirende Amplitude beträgt daher, weil m solcher Parallelogramme vorhanden sind, $\frac{m}{2m^2}$ oder $\frac{1}{2m}$, und die Intensität mithin $\frac{1}{(2m)^2}$, vorausgesetzt, dass Amplitude und Intensität im vorigen Falle, d. h. für $m=1$, resp. gleich $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$ angenommen werden.

In den Punkten der Hauptaxe also, welche den Gangunterschieden $B\beta = C\gamma = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots m\lambda, \ldots$ entsprechen, d. h. in den bei der Construction des Grundrisses auf der Axe aufgetragenen Theilpunkten, verhalten sich die Intensitäten umgekehrt wie die Quadrate der geraden Zahlen, also wie

$$\frac{1}{2^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{6^2}, \ldots \frac{1}{(2m)^2} \ldots.$$

In Fig. 11a sind diese Punkte mit $2', 4', 6', \ldots; 2'' 4'', 6'', \ldots; 2''', 4''', 6''', \ldots$ beziffert.

Sei nun weiter $B\beta = C\gamma = \frac{1}{2}\lambda$, so behaupte ich, dass die Wirkung des Dreiecks ABC grösser sei, als diejenige des gleichgrossen Parallelogramms $ABFG$ (Fig. 14), dessen Randstrahlen in BF gegen die in AG um $\frac{1}{2}\lambda$ differiren. Zieht man nämlich durch die Mitte D von AB DE parallel BC und DF parallel AC, sodass die Strahlen des Streifens BC um eine halbe, die von DE um eine Viertel-Wellenlänge gegen den von A oder die von AG ausgehenden Strahlen zurück sind, so erscheint die Resultante des Dreiecks ABC zusammengesetzt aus den Resultanten des Parallelogramms $ADFE$ und der beiden kleineren Dreiecke DBF und EFC, diejenige des Parallelogramms $ABFG$ aber aus der Resultante des nämlichen kleineren Parallelogramms $ADFE$ und den Resultanten der Dreieckchen DBF und EGA. Während aber die Wirkung des Dreieckchens DBF im ersten Falle von der des Dreieckchens EFC durchweg unterstützt wird, wird dieselbe im

zweiten Falle durch die Wirkung des Dreieckchens EGA theilweise aufgehoben, woraus das oben Behauptete unmittelbar folgt.

Hat man nun allgemein $B\beta = C\gamma = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, so theile man AC (Fig. 15) in $2m+1$ gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte Parallele mit AB und BC, so wird dadurch das Dreieck ABC zerlegt: 1) in Dreieckchen, deren jedes $\frac{1}{(2m+1)^2}$ vom ganzen Dreieck ist; die Wirkungen von je zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden heben sich auf, weil zu jedem Streifchen im einen Dreieckchen ein gleichgrosses im andern existirt, dessen Strahlen gegen jene um eine halbe Wellenlänge verschoben sind; wirksam bleibt also nur das letzte unpaare Dreieckchen abC; 2) in Parallelogramme, deren Endstrahlenunterschied abwechselnd eine gerade oder eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt; die Wirkung der ersteren ist Null, von jedem der letzteren aber bleibt ein kleines Parallelogramm übrig, dessen Endstrahlenunterschied $\frac{1}{2}\lambda$ und welches doppelt so gross als eines jener Dreieckchen, also $\frac{2}{(2m+1)^2}$ von ABC ist. Solcher Parallelogrammchen, deren Strahlenbündel übrigens unter sich in völligem Einklange sind, sind m vorhanden. Also setzt sich die Gesammtwirkung zusammen aus der Wirkung der m Parallelogrammchen, deren Oberfläche $\frac{2m}{(2m+1)^2}$ von ABC beträgt, und aus der des Dreieckchens abC von der Oberfläche $\frac{1}{(2m+1)^2}$. Die Wirkung des letzteren ist aber nach dem Vorausgehenden grösser, als die des gleichgrossen Parallelogramms $abfg$; also ist die gesuchte Resultante grösser als die Wirkung der Parallelogrammchen, deren Gesammtoberfläche

$$\frac{2m}{(2m+1)^2} + \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{2m+1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{2m+1}$$

ist. Die resultirende Amplitude beträgt aber für diese, wenn man wegen der Aehnlichkeit der Strahlenbündel dieselbe Einheit zu Grunde legt, wie oben für den Fall $B\beta = C\gamma = m\lambda$, $\frac{1}{2m+1}$, die Intensität sonach $\frac{1}{(2m+1)^2}$. Die Intensitätsverhältnisse in den Punkten der Hauptaxe, welche den Gangunterschieden $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda, \ldots \frac{2m+1}{2}\lambda, \ldots$ entsprechen (sie liegen mitten zwischen den Punkten 0, $2'$, $4'$, $6'$, ... etc. und sind in der Fig. 11 a mit $1'$, $3'$, $5'$, ... etc. beziffert), werden also durch Zahlenwerthe ausgedrückt, welche resp. grösser sind als die umgekehrten Quadrate der ungeraden Zahlen, also resp. grösser als

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots \frac{1}{(2m+1)^2} \ldots$$

Die Grösse, welche diesen Zahlen jedesmal noch hinzuzufügen wäre, um die genauen Verhältnisse zu erhalten, rührt offenbar von der Wirkung des kleinen Dreiecks abC her, dessen Oberfläche sich zur ganzen wirksamen Fläche wie 1 zu $2m+1$ verhält. Je grösser daher die Zahl m wird, desto mehr verschwindet die Wirkung des Dreieckchens gegenüber der Gesammtwirkung und desto mehr nähern sich die vorstehenden Werthe den wahren Intensitätsverhältnissen*).

Ueberhaupt kann auf einer Hauptaxe, d. h. wenn $B\beta = C\gamma$ ist, die Wirkung der Strahlen nie Null sein; denn sei allgemein $B\beta = C\gamma = \left(m + \frac{p}{q}\right)\lambda$, so theile man CA (Fig. 16) in c im Verhältniss von $m : \frac{p}{q}$, zerlege Cc wieder in m gleiche Theile und ziehe durch die Theilpunkte Parallele mit AB und BC, so bleibt 1) die Wirkung des Dreieckchens Abc, dessen Strahlen längs bc gegen den in A um $\frac{p}{q}\lambda$ zurück sind; 2) die Wirkung von m Parallelogrammchen, welche $\frac{1}{2}\lambda$ zum Randstrahlenunterschied haben und deren Strahlenbündel je gegen das folgende um eine ganze Wellenlänge verschoben sind.

Angenommen, die Normalebene der gebeugten Strahlen gehe durch eine Dreiecksseite, z. B. durch BC (Fig. 17), so sind die Projectionen der Seiten AB und AC auf die Strahlenrichtung beide gleich $A\alpha$, und dieser Fall unterscheidet sich im Wesen nicht von dem eben behandelten $B\beta = C\gamma$. Wenn das bisher Gesagte zunächst nur für die Hälfte OX der Hauptaxe galt, so bezieht sich der gegenwärtige Fall auf die andere Hälfte OX'; man findet für sie durch dieselben Betrachtungen die nämliche Reihe von Intensitäten.

15. Intensität in anderen Bildpunkten. Der Eckstrahl in B (Fig. 18) sei um eine halbe, derjenige in C aber um eine ganze Wellenlänge gegen den Eckstrahl in A zurück, so ziehe man durch die Mitte D von AC die Linien DE und DF resp. parallel mit BC und AB; alsdann werden sich die Wirkungen der beiden Dreieckchen ADE und DCF gegenseitig aufheben, weil ihre homologen zu BD parallelen Streifchen einen Gangunterschied von je einer halben Wellenlänge besitzen; übrig bleibt nur die Wirkung des Parallelogramms $DEBF$, welches die Hälfte des Dreiecks ABC ausmacht und dessen Eckstrahlen in D und B beide um $\frac{1}{2}\lambda$ gegen den in E zurück sind.

Ist allgemein der Eckstrahl in B (Fig. 19) um eine ungerade, der in C um eine gerade Anzahl halber Wellenlängen gegen den Eckstrahl in A zurück, d. h. beträgt die Projection der Dreiecksseite AB auf die Strahlen-

*) Der genaue Ausdruck für das Intensitätsverhältniss in den fraglichen Punkten ist $\frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{(2m+1)^4}$.

richtung $\frac{2m+1}{2}\lambda$, diejenige von $AC(m+n+1)\lambda$ und demnach die Projection der dritten Seite $\frac{2n+1}{2}\lambda$, so theile man AC in $2m+2n+2$ gleiche Theile, verbinde den $(2m+1)^{\text{ten}}$ Theilpunkt M (von A aus gerechnet) mit B, und ziehe durch die übrigen Theilpunkte Parallele mit MB; dadurch wird AB in $2m+1$, BC in $2n+1$ unter sich gleiche Theile getheilt (in Fig. 19 ist $m=1$ und $n=2$). Den auf BC zunächst B gelegenen Theilpunkt D verbinde man mit A, so verschwindet die Wirkung des Dreiecks ACD vollständig; denn die Projectionen der Seiten AC und AD auf die Strahlenrichtung sind verschiedenen Zahlen ganzer Wellenlängen gleich, nämlich erstere $=(m+n+1)\lambda$, letztere $=(m+1)\lambda$. Verbindet man jetzt noch D mit E, dem auf AB zunächst B befindlichen Theilpunkt, so verschwindet ebenso die Wirkung des Dreiecks ADE, denn die Projectionen von AD und AE betragen resp. $(m+1)\lambda$ und $m\lambda$. Wirksam bleibt also nur noch das Dreieckchen EBD, dessen Eckstrahlen in B und D resp. um $\frac{1}{2}\lambda$ und λ gegen den in E verzögert sind; behandelt man dasselbe wie oben, so reducirt sich seine Wirkung auf die des kleinen Parallelogramms $deBf$, dessen Eckstrahlen in d und B wie vorhin um $\frac{1}{4}\lambda$ gegen den in e zurückbleiben, dessen Strahlenbündel also mit jenem des vorigen speciellen Falles (Fig. 18) ähnlich ist.

Nun ist Dreieck ABD $\frac{1}{2n+1}$ von ABC, und Dreieck BDE $\frac{1}{2m+1}$ von ABD, also Dreieck BDE $\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{1}{2n+1}$ von ABC. Demnach ist die resultirende Amplitude $\frac{1}{2m+1}\cdot\frac{1}{2n+1}$ und die Intensität $\frac{1}{(2m+1)^2}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}$ von derjenigen im obigen besonderen Fall.

Betrachten wir weiter den speciellen Fall, wenn (Fig. 20) die Eckstrahlen in B und C resp. um $\frac{1}{2}\lambda$ und $\frac{3}{2}\lambda$ gegen den in A zurückbleiben. Zieht man durch die Mitte D von BC die Geraden DE und DF resp. parallel mit AC und AB, so heben sich die Wirkungen der Dreiecke EBD und FDC gegenseitig auf, weil ihre entsprechenden zu Bf ($Af=\frac{1}{3}AC$) parallelen Streifen einen Gangunterschied von je $\frac{1}{2}\lambda$ haben; wirksam bleibt nur noch das Parallelogramm $AEDF$ $(=\frac{1}{2}ABC)$, dessen Eckstrahlen in E und F gegen den in A resp. um $\frac{1}{4}\lambda$ und $\frac{3}{4}\lambda$ zurück sind. Theilt man dasselbe durch die zu AB parallelen Geraden ae und fd in drei gleiche Theile, so vernichten sich wiederum die Wirkungen von $AEea$ und $fdDF$, weil ihre gleichen Resultanten einen Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$ besitzen, und nur die Wirkung des (schraffirten) Parallelogramms $aedf$ bleibt übrig. Da seine Eckstrahlen in e und f je um $\frac{1}{4}\lambda$ gegen den in a zurück sind, so ist sein Strahlenbündel ähnlich mit dem des vorigen speciellen Falles (Fig. 18); die jetzige Amplitude verhält sich also zu jener wie $\frac{1}{6}$ zu $\frac{1}{2}$, oder wie $\frac{1}{3}$ zu 1,

demnach ist die resultirende Intensität $\frac{1}{3^2}$ von der überhaupt in diesem Paragraph zur Einheit gewählten.

Sei nun allgemein (Fig. 21) der Eckstrahl in B um $\frac{2m+1}{2}\lambda$, der in C um $\frac{2m+2n+1}{2}\lambda$ gegen den Eckstrahl in A zurück, so theile man AC in $2m+2n+1$ gleiche Theile, verbinde den $(2m+1)^{\text{ten}}$ Theilpunkt M (von A aus gerechnet) mit B und ziehe durch die übrigen Theilpunkte Parallele zu BM, so wird dadurch AB in $2m+1$, BC in $2n$ unter sich gleiche Theile zerlegt. Verbindet man jetzt den auf AB zunächst an A gelegenen Theilpunkt D mit C, so verschwindet die Wirkung des Dreiecks DBC, weil die Projection von DB auf die Strahlenrichtung offenbar $m\lambda$, die von DC aber $(m+n)\lambda$ beträgt; verbindet man ferner D mit dem dritten Theilpunkt E auf AC (von A aus gerechnet), so ist die Wirkung des Dreiecks DEC ebenfalls Null; denn die Projectionen der Seiten DE und DC betragen resp. λ und $(m+n)\lambda$. Die ganze Wirkung ist also zurückgeführt auf die des Dreieckchens ADE, welches in D und E die Gangunterschiede $\frac{1}{2}\lambda$ und $\frac{3}{2}\lambda$ besitzt und daher ganz wie vorher behandelt werden kann.

Das Dreieck ACD ist aber $\frac{1}{2m+1}$ vom ganzen Dreieck ABC, ferner Dreieck $ADE = \frac{3}{2m+2n+1}$ von ACD, folglich:

$$\text{Dreieck } ADE = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{3}{2m+2n+1} \cdot ABC.$$

War also die Amplitude im Specialfall (Fig. 20) $\frac{1}{3}$, so ist sie jetzt

$$\frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{2m+2n+1},$$

und die Intensität sonach $\frac{1}{(2m+1)^2} \cdot \frac{1}{(2m+2n+1)^2}$, immer auf die oben gewählte Einheit bezogen.

Wir können jetzt das Ergebniss des gegenwärtigen Paragraphen zusammenfassen in dem Satze: Betragen die Projectionen zweier Dreiecksseiten auf die Strahlenrichtung jede eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen, so ist die Intensität in dem entsprechenden Bildpunkt ausgedrückt durch das Product der reciproken Quadrate jener beiden ungeraden Zahlen, wenn die Lichtstärke der Punkte, für welche die Projectionen der drei Seiten resp. $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda$, λ sind, zur Einheit genommen wird. Dabei dürfen die beiden ungeraden Zahlen auch einander gleich sein, wenn nur die Projection der dritten Seite nicht gleichzeitig Null ist, in welchem Falle man es mit einem Punkte der bereits abgehandelten Hauptaxen zu thun hätte; die Projection der dritten Seite muss vielmehr stets einer Anzahl ganzer Wellenlängen gleich sein.

Die hier in Rede stehenden Bildpunkte projiciren sich im Grundriss (Fig. 11) in den Mittelpunkten und den Berührungspunkten der Ellipsen, welche für jeden Sextanten des Bildes in diejenigen Parallelogramme eingezeichnet wurden, deren Seiten mit den beiden ihn einschliessenden Hauptaxen parallel laufen. In Fig. 11*a* ist ein solcher Sextant in grösserem Maassstabe besonders gezeichnet und jedem der erwähnten Punkte der Nenner seines Intensitätsausdruckes beigeschrieben worden. Aus dieser graphischen Uebersichtstabelle erkennt man, dass von den fünf für jede Ellipse angegebenen Intensitäten die des Mittelpunktes die grösste ist; wir können daher diese Punkte Maximalpunkte nennen (obgleich die wirklichen Maxima etwas mehr gegen die Mitte des Bildes zu liegen). Denken wir uns in jedem Punkte des Grundrisses die zugehörige Intensität als Ordinate errichtet, so stellt sich die ganze Erscheinung als ein zusammenhängendes Lichtgebirge dar; über jeder Ellipse erhebt sich ein Berg, dessen Gipfel (nahezu) über deren Mittelpunkt liegt; jeder Lichtberg ist von vier Kesselthälern (den dunkeln Punkten) umgeben und hängt mit den Nachbarbergen durch sattelförmige Pässe zusammen. Entlang den Hauptaxen verlaufen, nach Aussen stetig abfallend, sechs Gebirgszüge, deren Kämme die benachbarten isolirten Gipfel allenthalben überragen und in dem mittleren höchsten Gebirgsknoten ihren gemeinschaftlichen Culminationspunkt erreichen.

16. Beugungsbild einer Oeffnung, welche aus zwei zu einander symmetrisch gelegenen Parallelogrammen gebildet ist. Theils um zu zeigen, wie die bisher entwickelten Sätze sich auch zur Bestimmung der Beugungsphänomene anderer Oeffnungen verwerthen lassen, theils um einer später folgenden Anwendung willen, soll hier noch die Erscheinung betrachtet werden, welche durch zwei congruente symmetrisch zusammenstossende Parallelogramme (Fig. 22) hervorgebracht wird. Dunkle Stellen können im Bilde nur da auftreten, wo entweder die Wirkung jedes Parallelogramms für sich verschwindet, oder da, wo die Wirkung des einen aufgehoben wird durch die Wirkung des anderen. Jedes Parallelogramm giebt aber für sich die Wirkung Null, 1) wenn die Projection der gemeinschaftlichen Seite AD auf die Strahlenrichtung eine Anzahl ganzer Wellenlängen beträgt; 2) wenn die Projectionen von AB und AC gleichzeitig jede eine beliebige Anzahl von ganzen Wellenlängen ausmachen. Um die entsprechenden dunkeln Stellen im Grundriss zu finden, hat man daher dieselbe Construction zu machen, als wollte man für jedes Parallelogramm einzeln das Beugungsbild entwerfen. Man ziehe nämlich durch O die Gerade XX' senkrecht zu AD, YY' und ZZ' resp. senkrecht zu AB und AC, trage auf XX' von O aus beiderseits gleiche Stücke proportional AD auf und auf YY' (oder ZZ') gleiche Stücke proportional AB; durch die letzteren Theilpunkte ziehe man Parallele zu XX', so werden diese in ihrer ganzen Länge vollkommen schwarz erscheinen (vgl. hierzu §. 9). Durch die Theilpunkte auf XX'

ziehe man Parallele sowohl zu YY' als ZZ'; da, wo dieselben sich durchschneiden, auch auf XX' selbst, erscheinen dunkle Punkte.

Die Wirkungen der beiden Parallelogramme können sich nur dort gegenseitig aufheben, wo ihre resultirenden Strahlen mit gleichen Amplituden, aber einem Gangunterschied von einer ungeraden Anzahl halber Wellenlängen sich vereinigen. Es ist leicht einzusehen, dass nur in Punkten der Axe XX' beiden Bedingungen gleichzeitig genügt werden kann, und zwar werden diese neuen dunkeln Punkte gerade in der Mitte liegen zwischen denjenigen, welche auf der X-Axe bereits gefunden sind (namentlich jederseits auch einer zwischen der Bildmitte und dem ersten der vorigen dunkeln Punkte). Denn ist für einen Punkt der Axe XX' der Eckstrahl in B gegen den in A um $\frac{2n+1}{2}\lambda$ verschoben, so wird auch der resultirende Strahl, welcher von der Mitte β des ersten Parallelogramms ausgeht, gerade um $\frac{2n+1}{2}\lambda$ gegen den von γ ausgehenden resultirenden Strahl des zweiten Parallelogramms verschoben sein. Die angegebenen Bildpunkte sind aber gerade diejenigen, für welche die Verschiebung des Eckstrahls in B gegen den in A $\frac{2n+1}{2}\lambda$ beträgt.

Da die in Rede stehende Oeffnung zu der in §. 9 besprochenen Classe gehört, so hätte man die Intensität auf der Axe XX' auch vermöge des dort gegen Ende ausgesprochenen Satzes angeben können. Danach herrscht auf XX' dieselbe Reihe von Intensitäten, welche daselbst ein Rechteck von der Grundlinie BC und der Höhe AD (Rechteck $BCEF$, Fig. 22) hervorbringen würde.

Nach diesen Angaben lässt sich der Grundriss des Bildes mit allen seinen dunkeln Stellen ohne Schwierigkeit construiren, wie dies in Figur 23 geschehen ist.

17. Kreisförmige Oeffnung. Die Beugungserscheinung einer kreisrunden Oeffnung ist für eine synthetische Behandlung wenig geeignet. Dennoch wollen wir es versuchen, wenigstens die Lage der beiden ersten dunkeln Ringe annähernd zu bestimmen.

Da im Beugungsbilde des Kreises alle von der Bildmitte gleichweit entfernten Punkte offenbar auch die gleiche Lichtstärke besitzen, so genügt es, blos eine durch die Bildmitte gezogene Gerade zu betrachten. Sei OA (Fig. 24) eine solche Gerade, so denken wir uns die kreisförmige Oeffnung senkrecht zu OA in schmale Streifen zerlegt, so dass die Strahlen eines jeden Streifens unter sich in Uebereinstimmung sind. So lange nun die Projection des Durchmessers $AB = d$ auf die Strahlenrichtung weniger als eine halbe Wellenlänge beträgt, wird keiner dieser Streifen mit einem andern in directem Gegensatz sein können; beträgt diese Projection etwas mehr als eine halbe Wellenlänge, so dass etwa (Fig. 24) die Projec-

tion von $AD = \frac{1}{2}\lambda$ ist, so mache man $BC = AD$ und beschreibe von Punkten, welche auf AB um OC resp. über A und B hinaus liegen, mit dem Radius der Oeffnung die Kreisbogen MCN und PDQ; die Wirkungen der linsenförmigen Stücke $MANC$ und $PDQB$ werden sich alsdann, weil ihre entsprechenden Streifen einen Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$ haben, aufheben, während das Mittelstück $MNQP$ noch wirksam bleibt. Wird die Projection des Durchmessers bei wachsendem Beugungswinkel immer grösser, so nehmen auch jene linsenförmigen Stücke zu, bis sie, wenn jene gleich einer ganzen Wellenlänge geworden ist, im Mittelpunkte O zusammenstossen, und nur noch das Mittelstück $MONQP$ (Fig. 25) als wirksam übrig lassen. Eine vollständigere Vernichtung, als in diesem Falle, wird eintreten, wenn die Projection des Durchmessers eine ganze Wellenlänge etwas übersteigt; denn seien (Fig. 26) die Projectionen von $OC = OD$ jede gleich $\frac{1}{2}\lambda$, und man beschreibt von C und D aus mit dem Radius der Oeffnung Kreisbogen, welche auf der zu AB in O errichteten Senkrechten in U und V sich begegnen, und errichtet ferner EF und GH resp. in den Punkten C und D senkrecht zu AB, so vernichten sich die Wirkungen der Stücke $EMUVNF$ und $UPGHQV$; was die noch übrigen Theile, nämlich die zwei Segmente $AECF$ und $DGBH$ und die beiden Zwickel MPU und NQV betrifft, so stehen ihre längsten und darum wirksamsten Streifchen mit einander in directem Gegensatz, z. B. die zur Rechten nächst RU und SV liegenden mit dem rechts zunächst EF befindlichen. Sorgt man also dafür, dass diese wirksamsten Streifchen sich völlig aufheben, so wird die resultirende Intensität sehr klein ausfallen müssen. Dies tritt nun ein, wenn $RU = CE$ gleich dem halben Radius (r) geworden ist; dann ist aber $OC = \frac{1}{2}\sqrt{3} \,.\, r = 0{,}866 \,.\, r$; $AC = 0{,}134 \,.\, r$, und es verhält sich $AC : OC = 0{,}134 : 0{,}866$, oder $AC : OC = 0{,}155 : 1$, woraus weiter $CD : AB = 1 : 1{,}155$ folgt. Beträgt also die Projection von CD eine, so beträgt die des ganzen Durchmessers 1,155 Wellenlängen oder nahezu $1{,}2\lambda$. Der erste dunkle Ring tritt also (beiläufig) ein, wenn die Projection des Durchmessers auf die Strahlenrichtung $1\frac{1}{5}$ Wellenlänge ausmacht*).

Setzt man diese Betrachtungen weiter fort, so findet man, dass ein zweites Minimum eintreten muss, wenn die Endstrahlen des Durchmessers AB um etwas mehr als zwei Wellenlängen in ihrem Gange verschieden sind. Sei alsdann (Fig. 27) die Projection von CD auf die Strahlenrichtung gerade 2λ, so theile man CD (in O, J und K) in vier gleiche Theile, so dass jeder einem Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$ entspricht, errichte in den Theilpunkten Senkrechte auf AB, beschreibe von J und K aus Kreisbogen mit dem Radius der Oeffnung, die in U und V sich schneiden, ferner ebensolche von zwei Punkten aus, die auf AB über A und B hinaus um OC resp.

*) Der genaue Werth ist $1{,}21967\lambda$. Die Lichtstärke bei $1{,}2\lambda$ beträgt 0,00018, diejenige in der Bildmitte $= 1$ gesetzt.

von J und K entfernt liegen, so vernichten sich, wie man leicht einsieht, die Wirkungen der nicht schraffirten Flächentheile. Was die schraffirten Theile anlangt, so unterstützen die zunächst CE gelegenen Streifchen die bei RU, sind aber in directem Gegensatz mit den an MN anliegenden. Wird daher die Lage des Punktes C so gewählt, dass $CE + RU = MN$ wird, so werden die Streifchen nächst MN durch das Zusammenwirken der an CE und RU angrenzenden neutralisirt und die Lichtstärke wird, da diese Vernichtung gerade die längsten und darum wirksamsten Streifchen trifft, nahezu Null. Man findet, durch Auflösung einer Gleichung zweiten Grades*), dass dies eintritt, wenn $AC : OC = 0{,}0847 : 1$, oder wenn $CD : AB = 2 : 2{,}169$. Der zweite dunkle Ring erscheint also, wenn die Projection des Durchmessers auf die Strahlenrichtung etwa 2,2 Wellenlängen beträgt**).

Wollte man diese Betrachtungen weiter fortsetzen, so hätte man für die folgenden Minima Gleichungen von immer höheren Graden aufzulösen. Wir begnügen uns daher mit den gefundenen Werthen, welche bis auf $\frac{1}{10}\lambda$ richtig sind.

18. Anwendung auf das Auge und das Fernrohr. Wenn ein fernsichtiges Auge gegen einen sehr weit entfernten Lichtpunkt gerichtet ist, so wird durch die beugende Wirkung der Pupille auf der Netzhaut nicht ein Punkt, sondern ein kreisrundes, von abwechselnd dunkeln und hellen Ringen umgebenes Lichtscheibchen sich abbilden; da jedoch die hellen Ringe im Verhältniss zum mittleren Scheibchen äusserst lichtschwach sind, so können wir unsere Betrachtung auf dieses allein beschränken. Bezeichnen wir den Beugungswinkel, bei welchem der erste dunkle Ring eintritt, mit ψ, und den Durchmesser der Pupillenöffnung mit d, so ergiebt sich der Winkel ψ, d. h. der scheinbare Halbmesser des Scheibchens, aus der Gleichung:

$$d \sin\psi = 1{,}2\lambda,$$

oder, weil der Winkel ψ sehr klein ist und deshalb der Bogen statt des Sinus gesetzt werden kann, aus

---

*) Setzt man nämlich $OC = 2x$ und den Radius des Kreises $= 1$, so hat ma

$$CE = \sqrt{1-4x^2};\quad MN = MJ - CE = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-4x^2};.$$
$$RU = OR - JM = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$

Die Gleichung $RU + CE = MN$ liefert dann zunächst:

$$1 + 2\sqrt{1-4x^2} = 2\sqrt{1-x^2},$$

oder nach Wegschaffung der Wurzeln:

$$144x^4 + 40x^2 - 15 = 0,$$

woraus als einziger positiver Werth

$$x = 0{,}46095,\ \text{demnach}\ OC = 2x = 0{,}92190$$

hervorgeht. Es verhält sich also

$$AC : OC = 0{,}0781 : 0{,}9219 = 0{,}0847 : 1.$$

**) Der genaue Werth ist $2{,}23313\lambda$. Die Intensität für $2{,}2\lambda$ ist 0,00008.

$$\psi = \frac{1,2 \cdot \lambda}{d}.$$

Ist nun, für das Licht der Kochsalzflamme, $\lambda = 0^{mm},0005888$ und wird der Durchmesser der Pupille im Mittel zu 4^{mm} angenommen, so erhält man

$$\psi = 36'',43.$$

Von zwei entfernten Lichtpunkten liefert jeder für sich ein solches Lichtscheibchen, deren Mittelpunkte dahin fallen, wo die durch den Kreuzungspunkt des Auges nach jenen Punkten gezogenen Sehstrahlen die Netzhaut treffen. Beträgt der von diesen gebildete Winkel, d. h. die scheinbare gegenseitige Entfernung der beiden Lichtpunkte weniger als $2 \cdot 36'',43$, so werden ihre Lichtscheibchen sich theilweise decken, ja, wenn die scheinbare Distanz kleiner als $36'',43$ ist, wird sich das directe Licht des einen Punktes mit dem gebeugten des anderen vermischen und eine deutliche Unterscheidung derselben wird nicht mehr möglich sein. Aus demselben Grunde wird ein Gegenstand, der unter einem Sehwinkel kleiner als $36'',43$ erscheint, nicht mehr deutlich gesehen.

Wie die Pupille des Auges, wird auch die Objectivöffnung eines Fernrohres Beugungserscheinungen verursachen, nur wird der Radius des Lichtscheibchens hier im Verhältniss der Durchmesser der Pupille und des Objectivs kleiner sein. Sei (Fig. 28) O der optische Mittelpunkt, $OF = F$ die Brennweite, FV die Brennebene des Objectivs eines astronomischen Fernrohres, ferner o der optische Mittelpunkt und $oF = f$ die Brennweite des Oculars und bilden die durch O nach zwei unendlich weit entfernten Lichtpunkten (z. B. den Individuen eines Doppelsterns) gezogenen Geraden OF und OV den Winkel Ψ (scheinbare Distanz der beiden Sterne) mit einander, so werden einem bei o beobachtenden Auge die Mitttelpunkte F und V der beiden durch das Objectiv erzeugten Lichtscheibchen unter dem Sehwinkel $VoF = \psi$ erscheinen. Damit nun die Lichtscheibchen F und V nicht zusammenfliessen, muss mindestens

$$\Psi = \frac{1,2 \cdot \lambda}{D}$$

(wo D den Durchmesser des Objectivs bezeichnet); damit ferner das Auge die Punkte F und V noch getrennt unterscheide, muss wenigstens

$$\psi = \frac{1,2 \cdot \lambda}{d}$$

sein. Aus der Figur aber ergiebt sich

$$F \operatorname{tang} \Psi = f \operatorname{tang} \psi,$$

oder wenn man, was wegen der Kleinheit der Winkel gestattet ist, die Bogen statt der Tangenten setzt:

$$\frac{F}{f} = \frac{\psi}{\Psi}.$$

Führt man die obigen Werthe von Ψ und ψ hier ein, so hat man:

$$\frac{F}{f}=\frac{D}{d},$$

d. h. damit die beiden Sterne noch getrennt gesehen werden, müssen sich die Brennweiten von Objectiv und Ocular verhalten wie die Durchmesser von Objectiv und Pupille.

Der Quotient $\frac{F}{f}$ drückt bekanntlich die Vergrösserung des Fernrohres aus. Wollte man daher die vergrössernde Kraft des Fernrohres steigern, ohne an Schärfe des Bildes einzubüssen, so müsste man in demselben Verhältniss den Durchmesser des Objectivs grösser machen; den jedesmal nöthigen Durchmesser des Objectivs erhält man, wenn man den Durchmesser der Pupille mit der Vergrösserungszahl multiplicirt.

Man sieht daraus, dass bei der Schwierigkeit, grosse und fehlerfreie Objective herzustellen, durch die hier erörterte „Abweichung wegen der Beugung" der Vervollkommnung der dioptrischen Fernröhre eine nicht leicht zu überschreitende Grenze gezogen ist.

19. Beugungserscheinungen, durch mehrere unter sich gleiche Oeffnungen hervorgebracht. Wenn in einem Schirme mehrere unter sich gleiche und ähnlich liegende, aber ganz beliebig gruppirte Oeffnungen vorhanden sind, so liefert jede derselben einen resultirenden Strahl, welchem derselbe Gangunterschied eigen ist, wie einem gewissen, von einem bestimmten Punkte der Oeffnung (z. B. dem Mittelpunkt, wenn ein solcher existirt) ausgehenden Elementarstrahl. Alle diese Resultanten haben für eine und dieselbe Beugungsrichtung auch dieselbe Amplitude, nämlich diejenige, welche jede einzelne Oeffnung für diese Strahlenrichtung hervorbringen würde, jede trägt gleichsam das Beugungsbild der einzelnen Oeffnung in sich; würden daher diese Resultanten unter sich nicht interferiren, so müsste auf der Bildfläche die Beugungserscheinung der einzelnen Oeffnung, nur mit erhöhter Lichtstärke, zum Vorschein kommen. Da aber, vermöge der oben erwähnten Gangunterschiede, Interferenz eintritt, so wird dieses Bild nur an solchen Stellen ungeändert bleiben, für welche jene Resultanten in vollem Einklange stehen; an anderen Stellen wird theilweise oder vollständige Vernichtung eintreten. Wir sehen also, dass das von der einzelnen Oeffnung hervorgebrachte Bild, mit proportional dem Quadrate der Oeffnungszahl verstärkter Intensität, die Grundlage der neuen Erscheinung bildet. Die Modificationen, welche es erleidet, hängen nur von den Gangunterschieden der interferirenden Resultanten, d. h. nur von der Gruppirung der Oeffnungen ab, keineswegs aber von der Gestalt derselben.

Die jetzige Aufgabe unterscheidet sich von den bisher behandelten dadurch, dass die zu vereinigenden Strahlencomplexe nicht wie bisher aus continuirlich aufeinanderfolgenden Strahlen bestehen. In vielen Fällen

aber, und gerade den wichtigsten, lässt sich das Problem auf die früheren zurückführen, indem man die einzelnen mit discontinuirlichen Gangunterschieden behafteten Strahlen in unendlich viele continuirlich aufeinanderfolgende Componenten aufgelöst denkt.

20. Oeffnungen, welche in gleichen Abständen längs einer Geraden gereiht sind. Sind die gleichen Oeffnungen so gruppirt, dass homologe Punkte derselben, wozu namentlich auch die Ausgangspunkte ihrer resultirenden Strahlen gehören, in einer geraden Linie gleichweit von einander entfernt liegen, so hat man eine Reihe von Strahlen gleicher Amplitude zu vereinigen, von denen jeder gegen den benachbarten um dieselbe Weglänge verschoben ist. Giebt man dem ganzen Bündel eine andere Neigung derart, dass der Gangunterschied des zweiten Strahls gegenüber dem ersten um eine ganze Anzahl von Wellenlängen grösser wird als vorher, so tritt dasselbe auch für je zwei andere unmittelbar aufeinanderfolgende Strahlen ein; die jetzt resultirende Amplitude und Lichtstärke kann sich alsdann von der früheren nur insofern unterscheiden, als bei der neuen Richtung die einzelnen Strahlen, vermöge der Wirkung jeder einzelnen Oeffnung, andere Amplituden erhalten; die Modification, welche das ursprüngliche Bild erleidet, bleibt dieselbe, weil sie nicht von der Amplitude der einzelnen Strahlen, sondern nur von der Art und Weise ihrer Interferenz abhängt. Man brauchte daher die Untersuchung nur auf jene Beugungsrichtungen auszudehnen, für welche der Gangunterschied zweier benachbarter Strahlen weniger als eine ganze Wellenlänge beträgt; von da an werden die nämlichen Modificationen für jedes Intervall einer ganzen Wellenlänge periodisch wiederkehren.

Ist nun die Anzahl der Oeffnungen n und ihr gegenseitiger Abstand*) e (Fig. 29), so vergleichen wir ihre Wirkung mit derjenigen eines Elementarstreifens (Fig. 30) von der Länge ne, der mit der Verbindungslinie der homologen Punkte zusammenfällt. Theilt man nämlich diesen in n gleiche Theile und denkt man sich die von jedem Theile ausgehenden Strahlen zu einem resultirenden vereinigt, so werden diese n in den Abständen e aufeinanderfolgenden Resultanten (Fig. 30) sich von den gegebenen gleichgerichteten (Fig. 29) nur durch den Werth ihrer Amplituden, nicht aber hinsichtlich ihrer Gangunterschiede unterscheiden. (Wir könnten eben so gut auch sagen, dass wir uns die Resultanten der einzelnen Oeffnungen in Elementarstrahlen zerlegt denken, welche sich stetig über die ganze Strecke ne ausbreiten.) Für den Elementarstreifen (Fig. 30) tritt nun Vernichtung ein, sobald die Projection desselben auf die Strahlenrichtung eine ganze Anzahl von Wellenlängen ausmacht, d. h. sobald die Projection von ne auf

*) Unter dem Abstand zweier benachbarter Oeffnungen verstehen wir immer denjenigen homologer Punkte, so dass derselbe gleich der Breite der Oeffnung plus der Breite des dunkeln Zwischenraumes, längs der Verbindungslinie gemessen, zu denken ist.

die genannte Richtung $m\lambda$, oder die von e gleich $\frac{m}{n}\lambda$ ist. Diese Vernichtung, wenn wir sie hinsichtlich ihrer Entstehungsweise näher ins Auge fassen, rührt entweder daher, dass die einzelnen Resultanten, obgleich jede für sich einen Lichteindruck hervorbringen würde, sich vermöge ihrer Gangunterschiede gegenseitig aufheben, oder sie tritt ein, weil jede Resultante für sich Null ist. Nur die ersteren Fälle können auf unsere jetzige Aufgabe Anwendung finden; denn im letzteren Falle werden die Resultanten der einzelnen Oeffnungen im Allgemeinen nicht Null sein, wenn die entsprechenden des Elementarstreifens es sind. Die Resultanten des Elementarstreifens sind aber jede für sich Null, wenn die Projection von e selbst eine ganze Anzahl von Wellenlängen beträgt, d. h. wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, oder wenn jede Resultante gegen ihre benachbarte um eine Anzahl ganzer Wellenlängen verschoben ist. Würden bei diesem Gangunterschiede die Amplituden irgend einen Werth haben, wie es bei der Reihe von Oeffnungen (im Allgemeinen) wirklich der Fall ist, so würde im Gegentheil wegen des vollkommenen Einklanges der einzelnen Resultanten die $n$fache Amplitude und sonach die n^2fache Intensität der einzelnen Oeffnung sich ergeben.

Das Zusammenwirken der n Oeffnungen erzeugt also Dunkelheit, so oft die Projection der Entfernung e zweier benachbarter Oeffnungen $\frac{m}{n}\lambda$ beträgt, wenn nur m kein Vielfaches von n ist.

Ist aber m ein Vielfaches von n, d. h. beträgt die Projection von e eine ganze Anzahl von Wellenlängen, so ist die Intensität n^2mal so gross, als die von einer einzigen Oeffnung bei derselben Strahlenrichtung hervorgebrachte.

Wir nennen diese dunkelsten und hellsten Stellen des modificirten Bildes Minima und Maxima zweiter Ordnung, indem wir als Minima und Maxima erster Ordnung die von einer einzigen Oeffnung herrührenden bezeichnen.

Ein nur unvollständiges Zusammenwirken der Strahlen wird für die Reihe von Oeffnungen, ebenso wie für den Elementarstreifen eintreten, wenn die Projection von ne auf die Strahlenrichtung gleich einer ungeraden Anzahl von halben Wellenlängen, d. h. wenn die Projection von e gleich $\frac{2m+1}{2n}\lambda$ ist. Von den entsprechenden Stellen des Bildes können wir diejenigen, welche zwischen zwei Minimis zweiter Ordnung enthalten sind, Maxima dritter Ordnung nennen, während die den Maximis zweiter Ordnung unmittelbar vorhergehenden oder folgenden nicht als Maxima angesehen werden dürfen, indem zwischen ihnen und den grossen Maximis

(zweiter Ordnung) keine Minima enthalten sind. Ist n eine ungerade Zahl, so wird ein solches Maximum dritter Ordnung (ein kleines Maximum) eintreten, wenn die Projection von e eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen ausmacht, d. h. wenn $2m+1$ ein ungerades Vielfaches von n ist; in diesem Falle vernichten sich die Resultanten der einzelnen Oeffnungen zu zwei und zwei, und nur eine einzige bleibt in ihrer vollen Wirkung zurück; an der betreffenden Stelle des Bildes erscheint alsdann dieselbe Lichtstärke, welche von einer einzigen Oeffnung dorthin gesendet würde. Diese Maxima dritter Ordnung liegen gerade in der Mitte zwischen zwei grossen Maximis.

Ueberhaupt leuchtet ein, dass alle jene Strahlenbündel die gleiche Modification erleiden, für welche die Projection des zu Hilfe gezogenen Elementarstreifens auf ihre Richtung den nämlichen Werth hat, d. h. alle jene, welche mit der Verbindungslinie homologer Punkte der Oeffnungen den gleichen Winkel einschliessen. Die Gesammtheit dieser Strahlenrichtungen bildet aber einen Kegel, der seine Spitze in O und eine durch O mit jener Verbindungslinie parallel gelegte Gerade OE zur Axe hat; die Linien gleicher Modification sind daher auf der Kugelfläche die dieser Axe zugeordneten Parallelkreise und im Grundriss Gerade, welche zu OE senkrecht stehen. Die Punkte, in denen z. B. die den Maximis zweiter Ordnung entsprechenden hellen Linien die Gerade OE schneiden, findet man leicht wie früher (Fig. 3) aus der Gleichung:

$$OE = \frac{fm\lambda}{e}.$$

Für die Construction der Erscheinung ergiebt sich demnach folgende Regel. Nachdem das für eine Oeffnung geltende Bild entworfen ist, ziehe man durch dessen Mitte O eine Gerade OE (Fig. 31) parallel zur Verbindungslinie homologer Punkte der Oeffnungsgruppe. Auf diese trage man beiderseits von O aus gleiche Stücke auf, welche einzeln $=\frac{f\lambda}{e}$ sind. Jedes solche Stück ist, wie dieser Ausdruck zeigt, gleich der Höhe eines Parallelogramms, dessen Grundlinie gleich e und dessen Flächeninhalt gleich $f\lambda$ ist. Der willkürlichen Grösse $f\lambda$ muss man natürlich den nämlichen Werth beilegen, wie bei der Construction des für eine Oeffnung geltenden Grundrisses; am bequemsten erscheint es, hier wie dort $f\lambda$ gleich dem Flächeninhalt einer der Oeffnungen anzunehmen. Den Zwischenraum zwischen zwei solchen Theilpunkten theile man in so viele gleiche Theile, als Oeffnungen vorhanden sind, und errichte in allen Theilpunkten Senkrechte zu OE. Die in den zuerst erhaltenen Theilpunkten (und in O selbst) errichteten Senkrechten entsprechen den Maximis, die in den übrigen errichteten den Minimis zweiter Ordnung; letztere erscheinen vollkommen dunkel. Ein Zwischenraum zwischen zwei dieser dunkeln Linien, in welchen ein grosses Maximum fällt, ist gerade doppelt so breit, als ein solcher, der

ein kleines Maximum enthält. Die Lage der grossen Maxima bleibt unverändert, wie viel Oeffnungen auch vorhanden sein mögen, vorausgesetzt dass der Werth von e der nämliche bleibt. Wird die Anzahl der Oeffnungen vermehrt, ohne Aenderung von e, so schieben sich zwischen zwei grosse Maxima immer mehr Minima und kleine Maxima ein; dabei wächst der Glanz der grossen Maxima proportional dem Quadrate der Oeffnungszahl, während z. B. jenes oben besprochene kleine Maximum, das bei ungerader Oeffnungszahl zwischen zwei grossen gerade in der Mitte liegt, unverändert die Lichtstärke beibehält, welche es bereits bei einer Oeffnung hatte.

In Fig. 31 ist die hier gelehrte Construction an einem Beispiel, nämlich für eine Gruppe von drei Parallelogrammen, durchgeführt.

21. Gitter. Sind die Oeffnungen schmale Spalten, welche senkrecht stehen zur Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte, so heisst eine solche Gruppe ein Gitter. Betrachtet man durch dasselbe eine (homogene) Lichtlinie, so würde ein Spalt (nach §. 8) eine Reihe von Spectren erzeugen, deren Breite in bekannter Weise von der Breite des Spaltes abhängt. Dieselben würden nämlich erhalten, wenn man auf der durch O zu den Spalträndern senkrecht gezogenen Axe gleiche Stücke aufträgt, welche der Breite des Spaltes umgekehrt proportional sind; die in den Theilpunkten errichteten Senkrechten bezeichnen die dunkeln Zwischenräume, welche die einzelnen Spectra von einander trennen, während die Senkrechte in O selbst das Bild der Lichtlinie abgiebt. Wirken nun mehrere solche Spalten zusammen, so hat man auf derselben Axe noch diejenigen Senkrechten zu errichten, welche die Maxima und Minima zweiter Ordnung angeben; wäre z. B. die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Spalten fünf Mal so gross als die Breite einer Oeffnung, so sind die Stücke, welche man, um die Lage der grossen Maxima zu erhalten, auf der Axe von O aus beiderseits auftragen muss, jenem Abstande umgekehrt proportional, also fünf Mal kleiner als die zuerst aufgetragenen. Den Zwischenraum zweier solcher grossen Maxima muss man noch in so viele gleiche Theile theilen, als Oeffnungen vorhanden sind, um die Stellen der Minima zweiter und der Maxima dritter Ordnung zu bekommen. Wird die Anzahl der Oeffnungen immer grösser, so werden die kleinen Maxima gegenüber den grossen, deren Intensität proportional dem Quadrate der Oeffnungszahl wächst, immer mehr zurücktreten, und bei genügend grosser Anzahl der Spalten wird endlich der Fall eintreten, dass von dem ursprünglichen Beugungsbild des einen Spaltes nur noch die grossen Maxima als schmale, zu der anvisirten Lichtlinie parallele Lichtstreifen stehen bleiben, welche durch fast vollkommen dunkle Zwischenräume von einander getrennt sind.

Durch folgende einfache Betrachtung wird der Vorgang bei der Entstehung dieser isolirten hellen Linien noch weiter erläutert. Wenn der Gangunterschied zweier benachbarter Resultanten genau eine ganze An-

zahl von Wellenlängen beträgt, so sind dieselben in vollem Einklange und bringen die erhöhte Lichtstärke der grossen Maxima hervor; für jede andere Beugungsrichtung wird man, von der ersten Resultante ausgehend, bei hinlänglich grosser Anzahl der Oeffnungen, leicht eine andere finden, welche nahezu um eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen gegen jene verschoben ist. Denn beträgt der Gangunterschied zweier benachbarter Resultanten $\frac{p}{q}\lambda$, wo $\frac{p}{q}$ ein (echter oder unechter) irreductibler Bruch ist, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: entweder ist der Nenner gerade $=2n$ (und dann natürlich der Zähler ungerade), oder der Nenner ist ungerade $=2n+1$. Im ersten Falle differirt die n^{te} Resultante gegen die erste um $n.\frac{p}{2n}\lambda$ oder um $\frac{p}{2}\lambda$, also um eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen. Im zweiten Falle ersetzen wir den Bruch $\frac{p}{2n+1}$ durch den andern $\frac{2pr \pm 1}{2r(2n+1)}$, welcher von jenem nur um $\frac{1}{2r(2n+1)}$ abweicht, d. h. um beliebig wenig, wenn bei unendlich grosser Oeffnungszahl r beliebig gross gewählt werden darf; alsdann ist die $r(2n+1)^{te}$ Resultante gegen die erste um $\frac{2pr \pm 1}{2}\lambda$ verschoben. Hat man so zur ersten Resultante eine n^{te} gefunden, die mit ihr um ein ungerades Vielfaches halber Wellenlängen differirt, so findet dasselbe statt für die zweite und $(n+1)^{te}$, die dritte und $(n+2)^{te}$ u. s. f. Man sieht also, dass für jede andere Beugungsrichtung als die der grossen Maxima nahezu Vernichtung eintreten muss.

Ein grosses Maximum, welches zufällig auf einen einer einzigen Oeffnung schon angehörigen dunkeln Streif treffen sollte, wird natürlich verschwinden. Bei dem oben angeführten Beispiel, wo die Breite der Oeffnung $\frac{1}{5}$ von dem Abstande zweier Oeffnungen (d. h. $\frac{1}{4}$ von dem sie trennenden undurchsichtigen Zwischenraum) beträgt, fehlt das fünfte, zehnte, fünfzehnte etc. Maximum. Sind die Spalten eben so breit als die sie trennenden Zwischenräume, so fällt die zweite, vierte, sechste etc. helle Linie aus; der Abstand je zweier hellen Linien ist also in diesem Falle gerade doppelt so gross, als der zwischen der ersten und dem Bilde der Lichtquelle (Fig. 32).

Bei Anwendung einer nicht homogenen Lichtquelle werden die hellen Streifen von verschiedenen Farben, aber gleicher Ordnung in verschiedenen Abständen von der Bildmitte auftreten. Vermöge des Ausdrucks $\frac{fm\lambda}{e}$ verhalten sich, für jede Ordnung, diese Abstände wie die Wellenlängen der einzelnen Lichtarten. Ist das einfallende Licht weiss, so reihen sich die verschiedenfarbigen Linien gleicher Ordnungszahl so an einander, dass sie ein vollständiges Spectrum bilden, dessen violettes Ende gegen die

Lichtquelle, dessen rothes Ende nach Aussen gekehrt ist; natürlich werden an den Stellen des Spectrums, wo Licht hintreffen sollte, das in der Lichtquelle fehlt, dunkle Unterbrechungen sich zeigen; bei Benutzung von Sonnenlicht erscheint daher das Gitterspectrum von den Fraunhofer'schen Linien durchsetzt. Die Abstände je zweier Fraunhofer-schen Linien im Grundriss eines Gitterspectrums sind der Differenz der zugehörigen Wellenlängen proportional; für Beugungswinkel, die so klein sind, dass man statt ihrer Sinus den Bogen setzen kann, also etwa für das erste Spectrum jederseits, findet diese Proportionalität auch noch im wirklichen Bilde auf der Kugeloberfläche statt. Diese Linien und mit ihnen die verschiedenen Farben sind also nach einem anderen Gesetze vertheilt, als in dem durch ein Prisma entworfenen Spectrum, und zwar nach dem einfachsten Gesetze, das sich denken lässt; das Gitterspectrum ist daher als das natürliche, typische Spectrum anzusehen.

Die hellen Streifen einer jeden Ordnung bilden für sich ein solches Gitterspectrum; diese Spectra werden, je weiter sie von der Bildmitte abstehen, immer länger und lichtschwächer, die äusseren werden sich daher zum Theil decken und vermischen; das innerste Spectrum aber erscheint immer unvermischt und um so reiner, je mehr Spalten das Gitter besitzt. In Fig. 32 sind für ein Gitter, dessen Stäbe ebenso breit sind wie die Lücken, die Spectra erster, zweiter und dritter Ordnung angedeutet.

Die Gitterspectra liefern das vorzüglichste Mittel, die Wellenlängen für die durch die Fraunhofer'schen Linien characterisirten Lichtgattungen mit Schärfe zu bestimmen. Entspricht nämlich, im ersten Spectrum, irgend einer derselben der Beugungswinkel ψ und die Wellenlänge λ, so muss, wie wir wissen

$$\lambda = e \sin \psi$$

sein, indem $e \sin \psi$ eben die Projection des Abstands zweier benachbarter Spalten auf die Strahlenrichtung ausdrückt. Der Winkel ψ wird an dem Theodolithen, dessen Fernrohr zur Beobachtung dient, abgelesen, der Abstand e mikrometrisch gemessen. Beobachtet man dieselbe Linie in einem Spectrum m^{ter} Classe, so hat man noch, wenn ψ_m der jetzt gefundene Beugungswinkel ist,

$$\lambda = \frac{e}{m} \cdot \sin \psi_m,$$

so dass der oben erhaltene Werth durch neue Messungen controlirt werden kann (s. §. 26).

22. Mehrere Reihen von Oeffnungen. Mehrere unter sich gleiche Reihen von Oeffnungen, welche selbst wieder längs einer Geraden, die ihre homologen Punkte verbindet, in gleichen Abständen gereiht sind, lassen sich ganz in derselben Weise wie vorhin behandeln. Denkt man sich nämlich alle Strahlen einer Reihe zu einem resultirenden vereinigt,

so werden diese Resultanten durch ihre Interferenz an dem von einer Reihe herrührenden Bilde, welches jetzt, proportional dem Quadrate der Anzahl der Reihen verstärkt, der ganzen Erscheinung zur Grundlage dient, neue Modificationen verursachen, welche augenscheinlich das in §. 20 bereits kennen gelernte Gesetz befolgen; ja, wenn mehrere gleiche Gruppen von Oeffnungen längs einer Geraden in gleichen Abständen angeordnet sind, so kann man das entsprechende Beugungsbild immer durch wiederholte Anwendung der vorhin gegebenen Regeln entwerfen.

Als Beispiel möge die Erscheinung dienen, welche durch zwei gleiche rechtwinklig gekreuzte Gitter, deren Stäbe ebenso breit sind als die hellen Zwischenräume, hervorgebracht wird. Die Oeffnungsgruppe, die man so erhält, besteht aus vielen Reihen quadratischer Oeffnungen, deren Mittelpunkte um die doppelte Breite eines Quadrats von einander entfernt sind, eben so weit stehen zwei benachbarte Reihen von einander ab. Man denke sich nun zuerst das Beugungsbild für eines dieser Quadrate entworfen, indem man die Hauptaxen OX und OY senkrecht zu den Seiten des Quadrats, oder, was dasselbe ist, zu den Stäben der beiden Gitter, zieht, auf beiden von O aus gleiche, den Quadratseiten umgekehrt proportionale Stücke aufträgt, und durch die Theilpunkte zu OY und OX Parallele legt; diese würden für ein einziges Quadrat die dunkeln Linien vorstellen. Für eine mit OX parallele Reihe quadratischer Oeffnungen erhält man sodann die Maxima zweiter Ordnung, wenn man auf der Axe OX die Abstände der vorigen Theilpunkte halbirt und durch die neuen Theilpunkte mit der Axe OY, welche selbst ein solches Maximum repräsentirt, Parallele zieht. Das Bild wäre jetzt, bei einer genügend grossen Zahl von Oeffnungen, welche wir übrigens hier voraussetzen, auf diese grossen Maxima reducirt, d. h. auf ein System von mit OY parallelen Lichtlinien (worunter OY selbst), welche an den Stellen, wo sie den mit OX parallelen dunkeln Streifen begegnen, durch dunkle Punkte unterbrochen sind. Die neuen grossen Maxima (zu denen auch die X-Axe selbst gehört), welche durch das Zusammenwirken aller Reihen hervorgebracht werden, erhält man, wenn man dieselbe Operation, welche vorhin an der X-Axe vorgenommen wurde, jetzt an der Axe OY vollzieht. Sie erscheinen demnach als durch die Mitte je zweier der auf OY bereits vorhandenen Theilpunkte mit OX parallel gelegte Gerade, die alles Licht enthalten, welches schliesslich in dem Beugungsbilde noch übrig bleibt. Demnach wird nur in den Durchkreuzungspunkten der beiden mit OY und OX parallelen Systeme von Maximumlinien noch Lichtwirkung vorhanden sein, und das Beugungsbild reducirt sich auf ein zierlich angeordnetes Netz von hellen Punkten (Fig. 33).

So wird es sich verhalten bei Anwendung von homogenem Licht; ist aber der durch die gekreuzten Gitter anvisirte Lichtpunkt weiss, so entspricht jeder einzelnen Farbe ein solches Netz von hellen Punkten, welches mit dem eben construirten ähnlich ist, und zwar verhalten sich, für

zwei beliebige Farben, die Abstände homologer Bildpunkte von der Bildmitte wie die zugehörigen Wellenlängen, was sofort aus dem Ausdruck $\frac{fm\lambda}{e}$ hervorgeht. Hat man daher z. B. für violettes Licht das Netz entworfen, und ist v ein heller Punkt desselben, so braucht man nur, um den zugehörigen rothen Punkt r zu finden, durch O und v eine Gerade zu ziehen und auf derselben $Or = Ov \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda_v}$ abzutragen, wo λ_r und λ_v resp. die Wellenlängen des rothen und violetten Lichtes bezeichnen. Auf der Strecke vr sind alsdann die zwischenliegenden Farben nach demselben einfachen Gesetz wie bei jedem Gitterspectrum vertheilt. In der Bildmitte O fallen alle Farben zusammen und erzeugen daselbst das weisse Bild des leuchtenden Punktes; dasselbe erscheint umgeben von regelmässig angeordneten Spectren, deren Längsrichtungen sämmtlich nach der Bildmitte convergiren (Fig. 33).

Als zweites Beispiel diene die schöne Erscheinung, welche man erblickt, indem man durch die Fahne einer Vogelfeder (am besten eignen sich die Schwung- und Steuerfedern der Singvögel) einen leuchtenden Punkt betrachtet. Je vier der Fäserchen $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_{11}\beta_{11}$, $\alpha^1\beta_1$, $\alpha^{11}\beta_{11}$ (Fig. 34) begrenzen eine aus zwei symmetrischen Parallelogrammen gebildete Oeffnung wie Fig. 22, und würden daher für sich allein die Erscheinung Fig. 23 erzeugen. Da aber entlang dem Kielchen ab sehr viele solche Oeffnungen auf einander folgen, so werden nur die auf den Linien der grossen Maxima gelegenen Bildpunkte übrig bleiben; diese Linien sind senkrecht zum Kielchen ab, also parallel zu OX, und sind in Fig. 23 punktirt angegeben. (Bei ihrer Construction wurde angenommen, dass ein Fäserchen $\alpha_1\beta_1$ gerade halb so breit als der zwischen zwei benachbarten enthaltene lichte Zwischenraum sei, so dass der Abstand zweier grosser Maxima $\frac{2}{3}$ beträgt von dem Abstand zweier der in Fig. 23 vorhandenen dunkeln Streifen, und somit das dritte Maximum mit dem zweiten dunkeln Streifen zusammenfällt.) Weil nun ferner solcher Kielchen ab, $a'b'$, etc. sehr viele dem Mittelkiele AB entlang gereiht sind, so wird das Bild von neuen, zu AB senkrechten Maximumlinien durchsetzt und dadurch jede der obigen Maximumlinien in eine dichtgedrängte Reihe von hellen Punkten zerlegt; da nämlich die Kielchen ab, $a'b'$ etc. verhältnissmässig grosse Abstände haben, so werden die ihnen entsprechenden Maxima sehr nahe an einander liegen. Um nun für weisses Licht die Spectra zu erhalten, braucht man nur durch jeden, etwa dem violetten Lichte angehörigen, hellen Punkt des Bildes zur Bildmitte eine Gerade zu ziehen und auf dieser nach der oben gegebenen Vorschrift den zugehörigen rothen Punkt zu suchen. Die einzelnen Spectra, welche einer zu OX parallelen Punktreihe angehören, erscheinen alsdann zu breiteren Spectren verschmolzen, welche von feinen dunkeln nach der Bildmitte hin convergirenden Längslinien durchzogen sind, wie das in Fig. 35 angedeutet ist.

23. Beugungserscheinungen, hervorgebracht durch ein dunkles Schirmchen oder eine Gruppe solcher. In §. 18 ist gezeigt worden, dass sowohl die Pupille des Auges als auch die Objectivöffnung eines Fernrohrs beugend wirkt. Da aber der Durchmesser der Pupille und noch mehr derjenige des Objectivs ungeheuer gross ist im Vergleich zu den Dimensionen der kleinen Oeffnungen und der dunkeln Körperchen, an denen man die Beugungserscheinungen gewöhnlich beobachtet, so können wir, gestützt auf §. 10 (Ende), sagen, dass die durch Pupille oder Objectivöffnung bewirkte seitliche Ausbreitung des Lichteindrucks verschwindend klein sei gegenüber der durch kleine Oeffnungen oder kleine dunkle Körper hervorgebrachten, oder, was für die mathematische Behandlung auf dasselbe hinauskommt, dass der Durchmesser des Objectivs als unendlich gross anzusehen sei, verglichen mit den Dimensionen merklich beugender Oeffnungen oder Körperchen.

Sei nun (Fig. 36) A ein beliebiger Punkt am Rande einer kleinen Oeffnung und AS ein von ihm ausgehender gebeugter Strahl und schneide eine durch diesen gelegte Ebene den Schirm längs der Geraden AB, so ist AB ein beliebiger Elementarstreifen der Oeffnung. Wollen wir nun die Resultante aller Strahlen dieses Streifens bestimmen, so theilen wir AB, von A angefangen nach B hin, in gleiche Theile Aa, ab, $bc \ldots$, deren Länge so beschaffen ist, dass der Gangunterschied Al zweier Randstrahlen AS und as der jenen Abtheilungen entsprechenden Strahlenbündel gerade eine ganze Wellenlänge beträgt. Alsdann verschwindet die Wirkung der vollständigen Bündel Aa, ab, bc ganz, und nur die des unvollständigen Bündels cB (dessen Breite cB in der Figur kleiner als $\frac{1}{2}cd$ angenommen ist) bleibt übrig. Tritt jetzt, ohne dass im Uebrigen etwas geändert wird, an die Stelle der kleinen Oeffnung ein mit ihr congruentes dunkles Schirmchen und macht man die nämliche Construction wie vorher, so stellt jetzt AB den Schnitt des Schirmchens, die bis ins Unendliche verlängert gedachten Geraden AW und BW' dagegen stellen den Schnitt der einfallenden unbegrenzten Lichtwelle dar. Theilt man nun die Gerade WW' von dem Punkt A aus nach rechts und links, wie oben angegeben, in die gleichen Theile Aa, ab, bc, cd, ..., Aa', ..., so bringen die Strahlen, welche von den Wellenstücken AW und dW' ausgehen, keine Wirkung hervor, und die zwischen A und B auf das undurchsichtige Schirmchen fallenden werden ganz abgehalten. Es kann also nur noch der Theil Bd der Welle zur Wirkung kommen. Ist aber m der Mittelpunkt von cd und macht man $dn = Bm$, so vernichten sich die Bündel Bm und dn gegenseitig, weil sie in ihrem Gange um eine halbe Wellenlänge differiren, und man behält blos noch das Bündel mn übrig, welches sich von dem bei der kleinen Oeffnung übrig gebliebenen Bündel cB nur dadurch unterscheidet, dass es um $\frac{1}{2}\lambda$ gegen dasselbe verschoben ist. Das Bündel mn wird also dieselbe Amplitude, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, und genau die

nämliche Intensität liefern wie das Bündel *cB*. Nur wenn der Strahl *AS* senkrecht steht zu *AB*, also für die direct einfallenden Strahlen, lässt sich die hier angewendete Construction nicht durchführen. Alsdann werden aber alle auf das Objectiv treffenden Strahlen in dessen Brennpunkt vereinigt. — Dieselbe Schlussfolgerung bleibt noch anwendbar, wenn man es nicht mit einer Oeffnung und mit einem Schirmchen, sondern mit einer beliebigen Gruppe von Oeffnungen oder Schirmchen zu thun hat. Wir können daher folgenden merkwürdigen Satz aussprechen:

Die Beugungserscheinung, welche durch ein undurchsichtiges Schirmchen oder durch eine Gruppe solcher Schirmchen hervorgebracht wird, ist vollkommen identisch mit derjenigen, welche von einer gleichgestalteten Oeffnung oder Gruppe von Oeffnungen herrührt, mit alleiniger Ausnahme desjenigen Punktes, in welchem die directen Strahlen sich vereinigen. In diesem sammelt sich stets alles Licht, welches von dem Schirme oder den Schirmchen nicht aufgehalten wird.

Zur Entstehung von Beugungserscheinungen ist keineswegs nothwendig, dass der Schirm (oder die Schirmchen) vollkommen undurchsichtig sei, sondern es genügt, dass die offenen Stellen mehr Licht durchlassen als die ausgefüllten. Ein kleiner durchsichtiger Körper, z. B. ein Wasserbläschen oder Wassertröpfchen, wird ebenfalls beugend wirken können, gerade als wäre es ein kleiner kreisrunder Schirm, weil vermöge der Reflexion und Absorption die durchgehenden Strahlen lichtschwächer sind als die vorbeigehenden. Die durchgegangenen Strahlen können allerdings die Erscheinung noch dadurch compliciren, dass sie kraft ihrer durch die Brechung erlittenen Verzögerung mit den vorbeigehenden Strahlen interferiren und so jene Interferenzphänomene hervorrufen, welche man „Farben gemischter Plättchen“ genannt hat.

24. Höfe. So nennt man die (oft nur undeutlich) gefärbten Kreise, welche bei leichtverschleiertem Himmel die Sonne, den Mond oder hellere Sterne umgeben; ihr scheinbarer Durchmesser erreicht nur wenige Grade, und der Umstand, dass sie aussen roth, innen violett erscheinen, verräth sie sogleich als Beugungserscheinungen.

Nach dem oben Vorausgeschickten ist es nicht schwer, ihre Entstehung zu erklären. Denken wir uns nämlich einen undurchsichtigen Schirm von sehr vielen gleichen, aber unregelmässig angeordneten Oeffnungen durchbohrt, so werden dieselben für jede Beugungsrichtung eben so viele unter sich gleiche Resultanten liefern. Wegen der Regellosigkeit der Gruppirung werden diese in keiner Richtung sich vollkommen vernichten können; überhaupt ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass der Grad ihrer Uebereinstimmung oder ihres Gegensatzes in einer Richtung ein wesentlich anderer sein sollte, als in einer zweiten Richtung. In jeder Richtung wird daher zwischen einer ungefähr gleich grossen Anzahl jener Resultanten

derselbe mehr oder weniger vollkommene Einklang herrschen, und die Beugungserscheinung wird qualitativ dieselbe bleiben, als wenn nur eine Oeffnung vorhanden wäre; die einzige Modification, welche sie erleidet, besteht darin, dass ihre Intensität überall in gleichem Maasse erhöht wird.

Nach den Sätzen des vorausgehenden Paragraphen wird nun die Beugungserscheinung qualitativ nicht geändert, wenn wir die Oeffnungen durch gleichgestaltete und gleichgrosse, undurchsichtige oder durchsichtige Schirmchen ersetzen. Bei den Höfen sind die Wasserbläschen, aus denen die Wolken bestehen, als solche Schirmchen zu betrachten; dieselben müssen demnach die nämliche Reihenfolge von Intensitätsverhältnissen hervorbringen, wie eine einzige kreisförmige Oeffnung von dem Durchmesser der Bläschen. Ist die Lichtquelle ein Punkt, z. B. ein heller Stern, so wird für jede Farbe, nach §. 17, das erste und zweite Minimum eintreten, wenn die Projection dieses Durchmessers auf die Beugungsrichtung resp. 1, 2 und 2,2 Wellenlängen beträgt; nehmen wir an, dass das erste Maximum zwischen den zwei ersten Minimis gerade in der Mitte liege, so würde dasselbe stattfinden, wenn jene Projection $1,7\lambda$ *) ausmacht, oder wenn $d \sin \psi = 1,7\lambda$ ist, unter d den Bläschendurchmesser und unter ψ den Beugungswinkel verstanden. Da dieser Winkel nur klein ist, so können wir statt vorstehender Gleichung genähert

$$\psi = \frac{1,7\lambda}{d}$$

setzen. Beachten wir nur diese ersten und lichtstärksten Maxima, so erscheint demnach der Lichtpunkt von farbigen Kreisen umgeben, deren scheinbare Radien (ψ) sich umgekehrt wie die Bläschendurchmesser und direct wie die Wellenlängen verhalten, von denen also der innerste violett, der äusserste roth ist. Misst man den scheinbaren Halbmesser irgend eines dieser Farbenringe, so kann man mit Hilfe der bekannten Wellenlänge aus obiger Gleichung den Durchmesser der Bläschen berechnen.

Ist die Lichtquelle, wie Sonne oder Mond, eine Scheibe, so wird jeder Punkt derselben für sich die ganze Reihenfolge der farbigen Kreise erzeugen; für jede Farbe entsteht dadurch ein mit der Lichtscheibe concentrischer Ring, dessen scheinbare Breite gleich dem Durchmesser der Scheibe ist. Da diese Ringe mit ihren Rändern sich theilweise decken, so wird die jetzige Erscheinung zwar weit lichtstärker, aber weniger rein sein, als bei einem Lichtpunkt. Immerhin lässt sich die oben erwähnte Bestimmung des Bläschendurchmessers auch hier durchführen, indem man z. B. für den rothen Ring, unter Anwendung eines rothen Glases, den Halbmesser des mittleren Umfanges zu ermitteln sucht.

Farbige Höfe können überhaupt nur dann entstehen, wenn die Dunstbläschen merklich gleiche Durchmesser besitzen; ist dies nicht der Fall,

*) Der genaue Werth ist $1,634722\lambda$.

so lagern sich die Maxima verschiedener Farben über einander und erzeugen durch ihre Mischung einen weisslichen Hof.

Künstliche Höfe gewahrt man, wenn man auf einer Glasplatte kleine Körperchen von gleicher Gestalt und Grösse (z. B. Sporen von Lycopodium und Bovista, Pollenkörner, Stärkmehlkörner, Blutkörperchen etc.) ausbreitet und eine Kerzenflamme dadurch betrachtet.

Fadenförmige Körper von gleicher Dicke, z. B. Coconfäden, Wolle, feine Haare, in willkürlicher Weise zwischen zwei Glasplatten gebracht, zeigen ebenfalls Höfe. Wären nämlich die Fäden parallel, aber in unregelmässiger Vertheilung, so würden sie qualitativ die nämliche Erscheinung hervorbringen wie eine Spalte von der Breite eines Fadens, also auf der zu der Richtung der Fäden senkrechten Geraden in einer von dieser Breite und der Wellenlänge abhängigen Entfernung ein Intensitätsmaximum erzeugen; wegen der verschiedenen Orientirung der Fäden geschieht das aber in allen Richtungen ringsherum und statt geradliniger Fransen muss ein Ring entstehen.

Man begreift, wie man aus den scheinbaren Durchmessern dieser künstlichen Höfe, ebenso wie oben bei den natürlichen, auf den Durchmesser der kleinen Körperchen oder der Fäden schliessen kann, durch die sie erzeugt werden (Eriometer von Young).

25. Schief einfallende Strahlen. Wir haben bisher stets angenommen, dass die directen Strahlen senkrecht stehen zur Schirmebene. Jetzt wollen wir den Fall näher ins Auge fassen, wo dieselben gegen den Schirm beliebig geneigt sind.

Sei zu dem Ende AB (Fig. 37) ein beliebiger Elementarstreifen, aA die Richtung der einfallenden, $A\alpha$ die der gebeugten Strahlen, wobei zu beachten ist, dass die Ebene aAB keineswegs mit der Ebene αAB zu coincidiren braucht. Sind nun AC senkrecht zu bB und BD senkrecht zu $A\alpha$ gefällt, so ist BC die Weglänge, um welche der in A ankommende directe Strahl aA dem in B eintreffenden bB voraus ist, und AD die Strecke, um welche der von A ausgehende gebeugte Strahl $A\alpha$ zurückbleibt gegen den von B ausgehenden $B\beta$. Die Gesammtverzögerung von $A\alpha$ gegen $B\beta$ beträgt also $AD - BC$, d. h. sie ist gleich der Differenz der Projectionen des Streifchens auf die Richtungen der gebeugten und der directen Strahlen. Von diesem Unterschiede hängt die Wirkung des Streifchens ganz in derselben Weise ab, wie bei senkrecht einfallendem Licht von der Projection des Streifchens auf die Beugungsrichtung.

Ebenso leicht sieht man ein, dass die Wirkung einer rechteckigen Oeffnung durch die Differenzen der Projectionen zweier anstossender Seiten auf die Richtung der gebeugten und directen Strahlen jetzt in derselben Weise bedingt wird, wie früher durch die Projectionen der Seiten auf die nämlichen beiden Richtungen. — Denken wir uns nun eine beliebige Oeffnung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung der

bekannte Punkt O ist, bezogen, dann für senkrecht einfallende Strahlen und in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem den Grundriss ihres Beugungsbildes entworfen; P (Fig. 38) sei ein beliebiger Punkt des Grundrisses. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, bei schief einfallendem Lichte denjenigen Punkt P' des neuen Grundrisses zu finden, für welchen sich die Interferenz unter denselben Umständen vollzieht, wie bei senkrecht einfallenden Strahlen für den Punkt P. Zu diesem Ende werde die Oeffnung, etwa parallel zur Axe OX, in schmale Streifen zerlegt, von denen jeder als ein Rechteckchen betrachtet werden kann. Bilden nun die directen Strahlen mit OX und OY, oder mit den Seiten des Rechtecks, die Winkel φ und ψ, so construiren wir zwei Kegel, die ihre Spitzen in O haben und deren Seiten mit den Axen OX und OY resp. die Winkel φ und ψ bilden; ihre gemeinschaftliche Erzeugende giebt alsdann die Richtung und auf der halbkugeligen Bildfläche den Sammelpunkt der directen Strahlen an; dieser projicire sich in O'. Zwei andere beliebige Kegel, deren einer OX, der andere OY zur Axe hat, geben ebenso durch ihre gemeinschaftliche Erzeugende einen beliebigen Bildpunkt an, dessen Projection P' sei. Die Wirkung im Punkte P' hängt ab von den beiden oben näher bezeichneten Differenzen, und ist die nämliche wie in P, wenn diese Differenzen resp. gleich sind den Projectionen der Rechteckseiten auf die dem Punkte P entsprechende Strahlenrichtung.

Nun lege man durch die Axe OX die Ebene XOZ senkrecht zur Grundrissebene XOY (in Fig. 38 ist XOZ um OX auf die Ebene XOY umgeklappt gedacht), so wird dadurch die Bildfläche längs der Kreislinie XZ, und die Kegel mit der Axe OX, welche die zu den Bildpunkten P, O', P' gehörigen Strahlenrichtungen als Erzeugende enthalten, resp. längs OF, OF', OF'' geschnitten. Sind alsdann $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ die Projectionen der Länge $O\alpha$ des Rechteckchens auf die durch jeden Kegel repräsentirte Strahlenrichtung, so muss, damit das Rechteckchen, was seine Länge anbetrifft, in P und P' gleich wirke, $O\delta - O\gamma = O\beta$ sein. Nun sind die Dreiecke OFR, $OF'R'$, $OF''R''$ der Reihe nach ähnlich den Dreiecken $O\alpha\beta$, $O\alpha\gamma$, $O\alpha\delta$, und wenn $O\delta - O\gamma = O\beta$ ist, so muss auch $OR'' - OR' = OR$, oder $O'R'' = OR$ sein. Ganz ebenso könnte man an den entsprechenden Kegeln, welche OY zur Axe haben, nachweisen, dass bei gleicher Wirkung in P und P' auch $O'Q' = OQ$ sein müsse. Was für dieses eine Rechteckchen erwiesen wurde, gilt ebenso gut auch für jedes andere, sonach auch für die ganze Oeffnung.

Um daher bei schief einfallenden Strahlen den Grundriss des Beugungsbildes zu erhalten, entwerfe man denselben zuerst für senkrechte Strahlen, bestimme sodann den Punkt O', in welchem sich der Vereinigungspunkt der schiefen Strahlen projicirt, und verschiebe nun den Grundriss parallel mit sich selbst, bis sein Mittelpunkt O auf O' fällt, so

stellt derselbe in dieser neuen Lage den Grundriss des neuen Beugungsbildes vor.

Der Grundriss ändert also blos seine Lage, nicht aber seine Gestalt; das wirkliche Bild auf der Halbkugel dagegen verliert seine frühere Symmetrie und erleidet eine um so bedeutendere Verzerrung, je weiter man den Grundriss verschiebt, d. h. je mehr man die einfallenden Strahlen gegen die Schirmnormale neigt.

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass für dieselbe Oeffnung sich die senkrechten Querschnitte der directen Strahlen bei normal und bei schief einfallendem Lichte wie $1:\cos\varphi$ verhalten, wenn φ den Winkel der directen Strahlen mit der Normale der Schirmebene bezeichnet. Die Intensität des directen und darum auch des gebeugten Lichtes wird daher für schief einfallende Strahlen gleichmässig über das ganze Beugungsbild im Verhältniss von $\cos^2\varphi:1$ geschwächt erscheinen.

26. Methode der Messung. Der im vorhergehenden Paragraphen erwiesene Satz ist nun von grosser Wichtigkeit für die bequeme Anstellung der Beobachtungen und Messungen. Denn sei zuerst die Fernrohraxe ebenso wie die directen Strahlen senkrecht zur Schirmebene, so dass der Punkt O, d. h. das Bild des leuchtenden Punktes, am Fadenkreuz gesehen wird. Denken wir uns nun, ohne Fernrohr und Schirm zu bewegen, die einfallenden Strahlen in die Richtung OF' (Fig. 39) gebracht, so wird jetzt F' der Vereinigungspunkt der directen Strahlen und O' seine Projection sein, und am Fadenkreuz wird, wenn $OP = OO'$ ist, der Punkt P des ursprünglichen Beugungsbildes erscheinen (in der Figur ist nämlich OZ die Fernrohraxe, POO' der Durchschnitt des Schirmes oder der Grundrissebene, und der Halbkreis der Durchschnitt det Bildfläche mit der Ebene der Zeichnung). Da nun $OP = OO'$, so ist auch $\angle FOZ = \angle F'OZ$, d. h. der dem Punkt P des anfänglichen Bildes entsprechende Beugungswinkel ist gleich dem Winkel, um welchen die einfallenden Strahlen gegen die Fernrohraxe geneigt werden mussten, um den Punkt P ans Fadenkreuz zu bringen. Statt aber die einfallenden Strahlen gegen die Fernrohraxe und den zu ihr senkrechten Schirm zu neigen, wird man besser den Schirm fest mit dem Fernrohr verbinden und Fernrohr sammt Schirm gegen die einfallenden Strahlen neigen, was offenbar denselben Erfolg hat. Hat man daher Beugungswinkel zu messen, so verfahre man auf folgende Weise. Der Schirm oder das Gitter wird mittelst eines passenden Ringes auf das Objectivende eines Theodolitfernrohrs, senkrecht zu dessen Axe aufgesteckt. Alsdann stelle man das Fernrohr mit seinem Fadenkreuz auf die Lichtquelle (Lichtpunkt oder Lichtlinie) ein und lese den Nonius ab; dann drehe man das Fernrohr so lange, bis der Bildpunkt, für den der Beugungswinkel gemessen werden soll, am Fadenkreuz erscheint, und lese wiederum den Nonius ab; die Differenz der beiden Ablesungen giebt den gesuchten Beugungswinkel. Dabei ist

freilich vorausgesetzt, dass der fragliche Bildpunkt in der durch die Fernrohraxe gelegten Horizontalebene liege; will man für einen andern beliebigen Bildpunkt den Beugungswinkel bestimmen, so kann man denselben durch geeignetes Drehen des Schirmes leicht in diese Ebene bringen.

Durch das Aufstecken der Schirmvorrichtung auf das Fernrohr wird auch das dunkle Zimmer entbehrlich, indem jetzt das Fernrohr selbst als dunkle Kammer functionirt. Als Lichtquelle kann man bequem den hellen Punkt, den ein innen geschwärztes Uhrglas, oder die helle Linie, welche eine innen geschwärzte Glasröhre von der Sonne beleuchtet zeigt, benutzen.

27. Das Minimum des Beugungswinkels. Um die oben erwähnte für schief einfallende Strahlen eintretende Verzerrung des Beugungsbildes genauer zu studiren, denken wir uns wiederum den Grundriss für senkrecht einfallende Strahlen construirt, und in dessen Mittelpunkt O und in einem beliebigen anderen Punkte P Senkrechte errichtet, welche auf der Halbkugel die zugehörigen Bildpunkte o und p angeben. Nun werde der Grundriss derart verschoben, dass die Strecke OP längs dem durch O und P gezogenen Durchmesser der Grundrissebene fortgleite; wie wir wissen, entspricht diese Verschiebung einer Neigung der einfallenden Strahlen in der Ebene des durch o und p gelegten grössten Kreises. Bezeichnen wir die Punkte O und P in ihrer neuen Lage mit O' und P', die zugehörigen Bildpunkte mit o' und p', so wird jetzt der Beugungswinkel $o'Op'$ durch den Bogen $o'p'$ des vorhin genannten Kreises gemessen. Da bei der Verschiebung die Strecke $O'P'$ immer gleich OP bleibt, so wird dieser Winkel sich ändern, und zwar wird er augenscheinlich um so grösser, je weiter die Strecke $O'P'$ nach dem Rande der Grundrissebene hin verschoben wird. Seinen kleinsten Werth erhält derselbe offenbar, wenn die Strecke $O'P'$ durch O halbirt wird. Der Beugungswinkel wird daher für einen bestimmten Bildpunkt ein Minimum, wenn die Normale des Schirmes denselben halbirt.

Auf dieses Verhalten, welches bisher noch nicht bemerkt worden zu sein scheint, liesse sich eine zweite bequeme Messungsmethode des Beugungswinkels gründen. Sei nämlich OZ (Fig. 40) die horizontale Axe des unbeweglich nach der Lichtquelle gerichteten Fernrohrs, welches jetzt nicht mit einem Theilkreise versehen zu sein braucht. Der Schirm, z. B. ein auf Glas geritztes Gitter, sei vor dem Fernrohr, jedoch nicht fest mit demselben verbunden, vertical aufgestellt und um eine verticale, zu den Ritzen des Gitters parallele Axe drehbar. Ist nun die Ebene des Schirmes anfangs senkrecht zur Fernrohraxe, so sieht man symmetrisch zu beiden Seiten der als Lichtquelle dienenden hellen Linie die früher beschriebenen Spectra. Fassen wir in dem ersten Spectrum zur Rechten und zur Linken eine bestimmte Fraunhofer'sche Linie, z. B. die Linie D, ins Auge, so wird dieselbe in einem gewissen und zwar beiderseits demselben Winkelabstand ψ von dem Bilde der Lichtquelle gesehen. Dreht man nun

das Gitter um seine verticale Axe in einer der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung, so wird sich die Linie D zur Rechten, und mit ihr das zugehörige Spectrum, dem Bilde der Lichtquelle, welches immer unverrückt am Fadenkreuze bleibt, zuerst nähern, während die Linie D zur Linken nebst dem zugehörigen Spectrum sich entfernt. Bei einem gewissen Drehungswinkel wird die Linie D zur Rechten stillzustehen scheinen, um sich bei weiter fortgesetzter Drehung wieder zu entfernen; die Linie D zur Linken fährt dabei immer fort, sich zu entfernen, bis sie aus dem Gesichtsfelde verschwindet. Dreht man daher das Gitter so lange in der bezeichneten Richtung, bis die fragliche Fraunhofer'sche Linie der Lichtquelle am nächsten gekommen ist, so ist für sie der Beugungswinkel ein Minimum (wir wollen dasselbe mit ψ' bezeichnen), und seine Hälfte $\frac{1}{2}\psi'$ ist gleich dem Winkel, welchen die Schirmnormale mit der unbeweglichen Fernrohraxe bildet. Der Winkel ψ' kann leicht gemessen werden, wenn das Gitter auf der Drehungsaxe der Alhidade eines horizontalen getheilten Kreises befestigt ist. Man sucht nämlich für dieselbe Fraunhofer'sche Linie in zwei Spectren gleicher Ordnung zur Rechten und zur Linken das Minimum der Ablenkung. Die Differenz der beiden Ablesungen des Nonius giebt dann unmittelbar den Winkel ψ'. Um aber aus der Formel $\lambda = e \sin \psi$ die Wellenlänge zu berechnen, hat man nicht den kleinsten Beugungswinkel ψ', sondern den Beugungswinkel ψ für senkrecht einfallende Strahlen anzuwenden. Aus der Bedingung, dass stets $OP = O'P'$ ist, ergiebt sich aber sofort

$$\sin \psi = 2 \sin \tfrac{1}{2}\psi'.$$

Um den Winkel ψ' nach diesem Principe zu messen, könnte man auch eines getheilten Kreises ganz und gar entrathen und sich der Poggendorff'schen Spiegelablesung bedienen, indem man die Glasplatte, auf welche das Gitter gezeichnet ist, als Spiegel wirken lässt.

II.

Beitrag zur Theorie der Function $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & x\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$.

Von

Dr. J. Thomae,

Docent in Halle.

In der Abhandlung über die durch die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen (Göttingen 1857) bemerkt Riemann, dass das Integral:

$$x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\int s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.(1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}.(1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma}.ds$$

von einem der vier Werthe 0, 1, $\frac{1}{x}$, ∞ bis zu einem dieser vier Werthe auf beliebigem Wege erstreckt, eine Function $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & x\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$ bildet, und bei passender Wahl dieser Grenzwerthe und des Weges von einem zum anderen jede der sechs Functionen $P^{\alpha}, P^{\alpha'} \ldots P^{\gamma'}$ darstellt. Er fügt hinzu (pag. 27): „Es lässt sich aber auch direct zeigen, dass das Integral die charakteristischen Eigenschaften einer solchen Function besitzt. Es wird dies in der Folge geschehen, wo dieser Ausdruck der P-Function durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in $P^{\alpha}, P^{\alpha'} \ldots P^{\gamma'}$ noch willkürlich gebliebenen Factoren benutzt werden soll; und ich bemerke hier nur noch, dass es, um diesen Ausdruck allgemein anwendbar zu machen, einer Modification des Weges der Integration bedarf, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen der Werthe 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ so unendlich wird, dass sie die Integration bis zu demselben nicht zulässt." — Dies ist jedoch meines Wissens nirgend erfolgt. Da die bestimmten Integrale sich am besten zur Darstellung einer Function P eignen, weil sie einen ganzen Zweig darstellen, was sonst nur noch, nach Riemann's Untersuchungen, wenigstens für den Quotienten zweier P-Functionen durch Kettenbrüche geschehen kann, so schien es von Interesse diese Ausführung zu unter-

nehmen. Der von Riemann in seinen Untersuchungen ausgeschlossene Fall, in welchem eine der Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ eine ganze Zahl ist, wird hier gleichfalls ausgeschlossen und einer besonderen Bearbeitung vorbehalten. Wenn wir auch noch den Fall ausschliessen, in welchem eine der Zahlen

$$-\alpha'-\beta-\gamma', \quad -\alpha'-\beta'-\gamma, \quad -\alpha-\beta-\gamma, \quad \alpha-\beta'-\gamma',$$

die im Allgemeinen complex sind, gleich einer ganzen negativen Zahl ist so geschieht dies ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit, weil man vermittels der Gleichungen wie

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & x\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha', & \beta, & \gamma, & \\ \alpha, & \beta', & \gamma', & x\end{pmatrix}$$

denselben immer vermeiden kann. Welche Bestimmung Riemann über die in P^α, $P^{\alpha'}$, $\ldots P^{\gamma'}$ von ihm noch willkürlich gelassenen Factoren hat treffen wollen, bleibt ungewiss, wir stellen sie hier so fest, dass

$$P^\alpha . x^{-\alpha}, \; P^\beta . \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}, \ldots$$

mit der Annäherung von x an den betreffenden Verzweigungswerth den Werth Eins erhält. Riemann's Abhandlung citiren wir mit „Riemann, pag.“, setzen die dort niedergelegten Principien als bekannt voraus, und bedienen uns neben einigen Abkürzungen der Riemann'schen Bezeichnung. Die zwischen den einzelnen Bestandtheilen einer P-Function bestehenden linearen Gleichungen, nach welchen jeder durch ein Paar zusammengehöriger, wie P^β, $P^{\beta'}$ dargestellt wird, sollen hier im Integralausdruck oder in hypergeometrischen Reihen aufgestellt Platz finden, und die Grössen α_β, $\alpha_{\beta'}, \ldots \alpha'_{\gamma'}$ (Riemann, pag. 9) und die analogen $\beta_\alpha \ldots \gamma_\alpha \ldots$ ausgerechnet werden. Sie sind etwas allgemeinere Ausdrücke, als die von Gauss für die Summe der Reihe $F(a, b, c, 1)$ angegebenen.

Zur Untersuchung des Integrals:

$$x^\alpha . (1-x)^\gamma . \int s^{-\alpha'-\beta-\gamma'} . (1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} . (1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma} . ds\,^{*})$$

genommen zwischen zwei Verzweigungswerthen der unter dem Integralzeichen stehenden Function

$$S = s^{-\alpha'-\beta-\gamma'} . (1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma} . (1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma}$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$-\alpha'-\beta-\gamma' = \lambda, \quad -\alpha'-\beta'-\gamma = \mu, \quad -\alpha-\beta-\gamma = \nu$$

setzen, der Function

$$S = s^\lambda . (1-s)^\mu . (1-xs)^\nu,$$

also zwischen den vier Werthen 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$ treffen wir über die Function S

---

*) Wir haben β mit β' vertauscht in Riemanns Integrale, pag. 20.

zu ihrer Werthfixirung einige Verabredungen. Zuerst aber noch was die Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \gamma'$ betrifft, so werden fünf von ihnen, mithin $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$ als willkürliche (complexe) vorausgesetzt und die sechste mit den übrigen durch die Gleichung verbunden:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

Dann kann keine der Summen

$$\pm(\lambda + \mu + 1) = \pm(\alpha - \alpha'), \quad \pm(\lambda + \nu + 1) = (\beta - \beta'),$$
$$\pm(\nu + \mu + 1) = \pm(\gamma - \gamma')$$

eine ganze Zahl sein, ohne dass eine der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl ist, welcher Fall nebst dem, dass

$$\lambda, \mu, \nu \text{ oder } -(\lambda + \mu + \nu + 2)$$

eine ganze negative Zahl ist, wie schon bemerkt, ausgeschlossen wird.

Die Werthe der complexen Variabeln s denken wir uns nach Gauss in einer (im Unendlichen geschlossenen) Ebene aufgetragen, so dass S als Function der s-Ebene angesehen werden kann. Von dem Punkte $s=0$ über 1 nach ∞, von da nach $\frac{1}{x}$, welches die Verzweigungspunkte der s-Ebene sind, ziehen wir eine Linie so, dass die Ebene einfach zusammenhängend bleibt, welche der Querschnitt der s-Ebene heissen mag. Der Bequemlichkeit halber denken wir uns den Querschnitt längs der positiv reellen Linie in der s-Ebene von 0 nach ∞ gezogen und von dort aus in einer Geraden nach $\frac{1}{x}$. Wird dann der Werth von S in irgend einem Punkte der s-Ebene gegeben, so bilden alle die Werthe, welche an dem gegebenen stetig hängen, wenn bei der Fortsetzung S als Function der complexen Variabeln s angesehen wird, und s den Querschnitt nirgend überschreitet, einen Zweig der Function S, der in der durch den Querschnitt zerlegten s-Ebene einwerthig oder einändrig ist. Durch stetige Fortsetzung der Function S über irgend welche Theile des Querschnitts, gelangt man zu neuen Zweigen der Function S, die sich von einander nur durch constante, von λ, μ, ν abhängige Factoren unterscheiden. Der Zweig von S, welcher entsteht, wenn für $s=1$, s^{λ}, für $s=0$, $(1-s)^{\mu}$ und $(1-xs)^{\nu}$ gleich Eins genommen werden, soll der Hauptwerth genannt werden, und bei unseren Integrationen überall da zu Grunde gelegt werden, wo nicht ausdrücklich eine andere Bestimmung getroffen wird. Wird aber durch einen vorgeschriebenen Integrationsweg der Querschnitt überschritten, so soll S stetig längs desselben fortgesetzt werden.

Das bekannte Theorem, nach welchem das Integral einer Function, die in einem Flächenstück einändrig ist (z. B. eines Zweiges der Function S) genommen über die ganze Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Stückes, innerhalb welches sie endlich ist, Null sein muss, soll der Cauchy'sche Satz genannt werden.

In vielen Fällen wird die zu integrirende Function S in den Verzweigungspunkten so unendlich, dass sie die Integration bis an dieselben nicht zulässt; wir wollen für unsere Abhandlung über den Sinn einer solchen Integration Festsetzungen treffen, durch welche diese Ausdrücke unbeschränkt anwendbar bleiben. Ob die von Riemann intendirte Modification des Weges eben dieselbe war, wissen wir nicht. Wir verstehen unter dem Integral $\int S\,ds$ genommen zwischen zwei Verzweigungspunkten a und b auf dem Wege l einen Ausdruck, der in folgender Weise erhalten wird. Wir integriren von einem Punkte 0 auf l bis zu einem nahe an a gelegenen Punkt $a+\varepsilon$, also bilden das Integral $\int\limits_0^{a+\varepsilon} S\,ds$; sodann integriren wir um den Punkt a herum in positiver Richtung über eine von $a+\varepsilon$ ausgehende, eben dort endende und ausser a keinen weiteren Verzweigungspunkt einschliessende Schlinge, und bezeichnen dies Integral mit $K_a\left(K_0, K_1, K_x, K_{\frac{1}{x}}\right)$. Dann integriren wir vom Endpunkte dieser Schlinge, von $a+\varepsilon$ bis 0 zurück, wobei S einem neuen Zweige angehört, weil s um a gegangen ist, welcher mit S' bezeichnet wird. Wir bilden also das Integral

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{0} S'\,ds.$$

Dann ist der Ausdruck

$$U = \int\limits_0^{a+\varepsilon} S\,ds + K_a + \int\limits_{a+\varepsilon}^{0} S'\,ds = -\int\limits_{a+\varepsilon}^{0} S\,ds + K_a + e^{2\varepsilon_a i\pi}\int\limits_{a+\varepsilon}^{0} S\,ds,$$

wenn ε_a der zum Verzweigungspunkte a gehörende Exponent (also eine der Zahlen $\lambda, \mu, \nu, -[\lambda+\mu+\nu+2]$) ist, jedenfalls eine endliche Grösse, weil auf dem ganzen Integrationswege die Function unter dem Integralzeichen endlich bleibt. (Man kann hierbei auch, wenn man will, ε unendlich klein annehmen.) Sodann integriren wir von 0 auf l bis zu einem nahe b gelegenen Punkte $b-\eta$, dann über eine von $b-\eta$ ausgehende und dort endende Schlinge, die keinen weiteren Verzweigungspunkt ausser b einschliesst, negativ (rechts) herum. Ist K_b der Werth des Integrals über die Schlinge positiv herum, so ist der Werth, der durch Integration in negativem Sinne erhalten wird, $-e^{-2\varepsilon_b\pi i}\,.\,K_b$, wenn ε_b der zum Verzweigungspunkte b gehörende Exponent ist, weil die Integration für verschiedene Zweige von S statt hat. Endlich integriren wir von $b-\eta$ nach 0, also bilden das Integral

$$\int\limits_{b-\eta}^{0} S''\,ds,$$

worin S'' den durch den negativen Umgang um b erlangten Zweig von S bedeutet.

Dann ist der Ausdruck

$$V=\int_0^{b-\eta} S\,ds - e^{-2\varepsilon_b.\pi i}K_b+\int_{b-\eta}^{0} S''ds=\int_0^{b-\eta} S\,ds-e^{-2\varepsilon_b\pi i}.K_b-e^{-2\varepsilon_b.\pi i}\int_0^{b-\eta} S\,ds$$

aus denselben Gründen wie U eine endliche Grösse. Ebenso ist:

$$\frac{U}{-1+e^{2\varepsilon_b\pi i}}+\frac{V}{1-e^{-2\varepsilon_b\pi i}}$$

$$=\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} S\,ds+\frac{e^{-\varepsilon_a\pi i}K_a}{e^{\varepsilon_a\pi i}-e^{-\varepsilon_a\pi i}}-\frac{e^{-\varepsilon_b\pi i}K_b}{e^{\varepsilon_b\pi i}-e^{-\varepsilon_b\pi i}}=\int_a^b S\,ds$$

eine bestimmte endliche Grösse, ausser wenn eine der Zahlen ε_a, ε_b (also eine der Zahlen λ, μ, ν, $-[\lambda+\mu+\nu+2]$) eine ganze negative Zahl ist, welchen Fall wir ausschliessen. Diesen Ausdruck verstehen wir in dieser Abhandlung immer unter der Bezeichnung $\int_a^b S\,ds$, und es stimmt derselbe mit der gemeinen Definition eines bestimmten Integrals zwischen complexen Grenzen allemal überein, wenn die letztere einen Sinn hat.

Bei dieser Definition fallen die Euler'schen Integrale mit ihren Ausdrücken durch Gaussische Π-Functionen durchaus zusammen und werden mit jenen unendlich. Es genüge, dies für das Integral

$$\Pi(\lambda)=\int_0^\infty s^\lambda\,.\,e^{-s}\,ds$$

gezeigt zu haben. Wenn wir partiell integriren, so haben wir

$$\int_0^\infty s^\lambda e^{-s}\,ds=\Big[-s^\lambda.e^{-s}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty \lambda s^{\lambda-1}e^{-s}\,ds.$$

Die eckige Klammer ist nach unserer Auffassung des Integrals gleich

$$\Big[-s^\lambda e^{-s}\Big]_\varepsilon^\infty+\left(-\varepsilon^\lambda e^{2\pi\lambda i}e^{-\varepsilon e^{2\pi i}}+\varepsilon^\lambda e^{-\varepsilon}\right):\left(e^{2\lambda\pi i}-1\right)$$

$$=\varepsilon^\lambda\,.\,e^{-\varepsilon}-\frac{\varepsilon^\lambda.e^{-\varepsilon}.(e^{2\lambda\pi i}-1)}{e^{2\lambda\pi i}-1}=0.$$

Mithin ist:

$$\int_0^\infty \varepsilon^\lambda.e^{-s}.\,ds=\lambda.\int_0^\infty s^{\lambda-1}.e^{-s}\,ds=\lambda\,.\,(\lambda-1)\ldots(\lambda-m+1).\int_0^\infty s^{\lambda-m}\,.\,e^{-s}\,ds$$

und

$$\int_0^\infty s^{\lambda-m}\,.\,e^{-s}\,ds=\int_0^\infty\frac{s^\lambda\,.\,e^{-s}\,ds}{\lambda\,.\,\lambda-1\ldots\lambda-m+1}=\Pi(\lambda-m);$$

nimmt man hierin m hinlänglich gross an, so kann $(\lambda - m)$ bei positivem reellen Theil von λ jede mit negativem reellen Theil versehene Zahl sein. Sogar für ganze negative Zahlen könnte die Gleichung bestehen bleiben, da dann beide Seiten unendlich gross werden. Die anderen Euler'schen Integrale können als ein specieller Fall der P-Functionen angesehen und behandelt werden, nämlich wenn $\mu = 0$ und dann $x = 1$ gesetzt wird.

Ist die Summe der Exponenten der beiden Verzweigungspunkte, welche die Grenzwerthe des Integrals bilden, eine ganze Zahl, z. B.

$$\int_0^1 s^{-\mu} \cdot (1-s)^{\mu-1}\, ds,$$

so kann man auch über eine um beide gezogene Schlinge (negativ herum) integriren und das Resultat durch

$$\left(1 - e^{-2\varepsilon_b \pi i}\right)$$

dividiren, wenn ε_b ($\mu - 1$ im Beispiel) den Exponenten der oberen Grenze bedeutet, was dann unserer Definition gleich kommt. Im angeführten Beispiele kann man dann noch die Schlinge als um den unendlich fernen Punkt gezogen ansehen, und da dessen Exponent -1 ist, ausintegriren, wodurch man das bekannte Resultat

$$\Pi(-\mu) . \Pi(\mu - 1) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}$$

erhält.

Wenden wir unsere Definition des bestimmten Integrals auch dann an, wenn der Integrationsweg einem Verzweigungspunkte begegnet (wobei jedoch in vielen Fällen, besser nur ausgebogen wird) indem wir das Integral in Stücke zwischen den Verzweigungspunkten zerlegen, so ist das Integral

$$x^{\alpha} . (1-x)^{\gamma} . \int S\, ds$$

genommen auf beliebigem Wege zwischen zwei Verzweigungspunkten als Function von x überall endlich, ausser für x gleich $0, 1, \infty$, wenn es nicht, was zuweilen geschieht, in den ausgeschlossenen Fällen überall unendlich ist. Ferner ist es eine einwerthige Function von x, wenn x den Querschnitt zwischen 0 und ∞, und $\frac{1}{x}$ den Integrationsweg nicht überschreitet. Durch einen solchen Uebergang der Variabeln x über die Gerade $0..1..\infty$ oder des Punktes $\frac{1}{x}$ über den Integrationsweg gelangt man zu verschiedenen Zweigen eines Integrals. Hat S seinen Hauptwerth und werden die Integrationswege auf dem positiven Ufer des Querschnitts genommen ohne ihn zu schneiden, so soll ein solches Integral seinen Hauptwerth besitzen, wenn es nicht ausdrücklich (wie bei P^{γ}) anders bestimmt wird. Wir betrachten nun die folgenden sechs Integrale

$$g_\alpha . P^\alpha = x^\alpha . (1-x)^\gamma \int_0^1 S\,ds, \quad g_\beta . P^\beta = x^\alpha . (1-x)^\gamma \int_1^\infty S\,ds,$$

$$g_{\alpha'} . P^{\alpha'} = x^\alpha . (1-x)^\gamma \int_{\frac{1}{x}}^{x} S\,ds, \quad g_{\beta'} . P^{\beta'} = x^\alpha \, (1-x)^\gamma \int_0 S\,ds,$$

$$g_\gamma . P^\gamma = x^\alpha . (1-x)^\gamma \int_0^\infty S\,ds,$$

$$g_{\gamma'} . P^{\gamma'} = x^\alpha \, (1-x)^\gamma \int_1^{\frac{1}{x}} S\,ds.$$

In P^α, $P^{\alpha'}$, P^β, $P^{\beta'}$, $P^{\gamma'}$ soll die Integration mit dem Hauptwerth von S längs des positiven Ufers des Querschnittes genommen werden, wobei die an Verzweigungspunkten vorbeiführenden zerlegt werden, oder auch längs einer den Querschnitt nicht überschreitenden Ausbiegung fortgeführt werden können. Das Integral P^γ soll mit dem Hauptwerthe von S auf dem negativen Ufer des Querschnittes genommen werden. Diese Integrale sind als Functionen von x ausser in $0, 1, \infty$ endlich, und wenn x den Querschnitt zwischen $0, 1, \infty$ nicht überschreitet, einändrig.

Das Integral $g_\alpha . P^\alpha = x^\alpha . (1-x)^\gamma . \int_0^1 S\,ds$ multiplicirt mit $x^{-\alpha}$ bleibt auch noch für $x=0$, wenn nicht λ, μ oder $\lambda+\mu+1$ eine ganze positive Zahl ist, was ausgeschlossen bleibt, endlich und von Null verschieden, und in der Umgebung des Punktes einändrig, weil durch einen Umgang der Variabeln x um Null S seinen Werth nicht ändert und $\frac{1}{x}$ den Integrationsweg nicht überschreitet. Setzen wir:

$$g_\alpha = \int_0^1 s^\lambda . (1-s)^\mu \, ds = \frac{\Pi(\lambda) . \Pi(\mu)}{\Pi(\lambda+\mu+1)} = \frac{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma') . \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}{\Pi(\alpha-\alpha')},$$

so ist P^α für $x=0$ gleich 1, und entwickeln wir (für Norm $x<1$) unter dem Integralzeichen nach Potenzen von x, so ist:

$$P^\alpha = x^\alpha . (1-x)^\gamma . F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, \alpha-\alpha'+1, x).$$

Das Integral

$$g_{\alpha'} . P^{\alpha'} = x^\alpha . (1-x)^\gamma \int_{\frac{1}{x}}^\infty S\,ds$$

geht durch die Substitution $s = \frac{1}{\sigma . x}$ über in:

$$x^{\alpha'} . (1-x)^\gamma . e^{-i\pi(\mu-\nu)} . \int_0^1 \sigma^{-(\lambda+\mu+\nu+2)} . (1-\sigma)^\nu . (1-x\sigma)^\mu \, d\sigma,$$

und bleibt mit $x^{-\alpha'}$ multiplicirt für $x=0$ endlich und von Null verschieden, wenn nicht $-(\lambda+\mu+\nu+2)$, ν, oder $-(\lambda+\mu+1)$ eine ganz negative Zahl ist, was ausgeschlossen wird. Zudem bleibt es in der Umgebung des Punktes $x=0$ einändrig. Setzen wir:

$$g_{\alpha'}=\int_0^1 \sigma^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}.(1-\sigma)^\nu d\sigma . e^{-i\pi(\mu-\nu)} .$$

$$=\frac{e^{i\pi(\nu-\mu)}.\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma').\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha'-\alpha)},$$

so ist $x^{-\alpha'}.P^{\alpha'}$ für $x=0$ gleich 1 und einändrig. Durch Entwickelung nach Potenzen von x folgt:

$$P^{\alpha'}=x^{\alpha'}(1-x)^\gamma . F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, \alpha'-\alpha+1, x).$$

Das Integral:

$$g_\beta . P^\beta = x^\alpha.(1-x)^\gamma.\int_1^\infty S ds$$

geht durch die Substitution $s=\frac{1}{\sigma}$ über in:

$$e^{-i\pi(\mu-\nu-\gamma)}.\left(\frac{1}{x}\right)^\beta\left(1-\frac{1}{x}\right)^\gamma\int_0^1 \sigma^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}.(1-\sigma)^\mu.\left(1-\frac{\sigma}{x}\right)^\nu d\sigma$$

und bleibt mit $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$ multiplicirt für $x=\infty$ endlich und von Null verschieden, wenn nicht $-(\lambda+\mu+\nu+2)$, μ, $-(\lambda+\nu+1)$ eine ganze negative Zahl ist, was ausgeschlossen wird, und in der Nähe dieses Punktes einändrig. Setzen wir:

$$g_\beta=\frac{e^{-i\pi(\mu-\nu-\gamma)}.\Pi(-\lambda-\mu-\nu-2).\Pi(\mu)}{\Pi(-\lambda-\nu-1)}$$

$$=\frac{e^{-i\pi(\mu-\nu-\gamma)}.\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma').\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}{\Pi(\beta-\beta')},$$

so erhält $P^\beta\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$ für $x=\infty$ den Werth 1, und bleibt dort einändrig. Durch Entwickelung nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ erhalten wir:

$$P^\beta=\left(\frac{1}{x}\right)^\beta.\left(1-\frac{1}{x}\right)^\gamma. F\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha'+\beta+\gamma, \beta-\beta'+1, \frac{1}{x}\right).$$

Das Integral:

$$g_{\beta'}.P^{\beta'}=x^\alpha.(1-x)^\gamma.\int_0^{\frac{1}{x}} S ds$$

geht durch die Substitution $s=\frac{\sigma}{x}$ über in:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma}.e^{i\pi\gamma}.\int_0^1 \sigma^{\lambda}.(1-\sigma)^{\nu}.\left(1-\frac{1}{x}\sigma\right)^{\mu}d\sigma$$

und bleibt multiplicirt mit $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta'}$ für $x=\infty$ endlich und von Null verschieden, wenn nicht etwa λ, ν oder $(\lambda+\nu+1)$ eine ganze negative Zahl ist, was ausgeschlossen wird, und ist dort einändrig. Setzen wir:

$$g_{\beta'}=e^{i\pi\gamma}\cdot\frac{\Pi(\lambda).\Pi(\nu)}{\Pi(\lambda+\nu+1)}=\frac{e^{i\pi\gamma}.\Pi(-\alpha-\beta-\gamma).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')}{\Pi(\beta'-\beta)},$$

so erhält $P^{\beta}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta'}$ für $x=\infty$ den Werth 1 und ist dort einändrig. Durch Entwickelung unter dem Integral nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ erhält man:

$$P^{\beta'}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\gamma}.F\left(\alpha+\beta'+\gamma,\ \alpha'+\beta'+\gamma,\ \beta'-\beta+1,\ \frac{1}{x}\right).$$

Das Integral:

$$g_{\gamma'}.P^{\gamma'}=x^{\alpha}.(1-x)^{\gamma}.\int_1^{\frac{1}{x}}S\,ds$$

geht durch die Substitution $s=\frac{1}{1-\sigma(1-x)}$ über in:

$$e^{-i\pi\mu}.x^{\alpha}.(1-x)^{\gamma'}.\int_0^1\sigma^{\mu}.(1-\sigma)^{\nu}.[1-(1-x)\sigma]^{-(\lambda+\mu+\nu+2)}.d\sigma$$

und bleibt mit $(1-x)^{-\gamma'}$ multiplicirt für $x=1$ endlich und von Null verschieden und einändrig, wenn nicht μ oder ν oder $\mu+\nu+1$ eine ganze negative Zahl ist, was ausgeschlossen wird. Setzen wir:

$$g_{\gamma'}=\frac{e^{-i\pi\mu}.\Pi(\mu).\Pi(\nu)}{\Pi(\mu+\nu+1)}=\frac{e^{i\pi(\alpha'+\beta'+\gamma)}.\Pi-\alpha'-\beta'-\gamma\ \Pi-\alpha-\beta-\gamma}{\Pi(\gamma'-\gamma)},$$

so ist $P^{\gamma'}.(1-x)^{-\gamma'}$ 1 für $x=1$ und einändrig. Entwickeln wir unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $1-x$, so haben wir:

$$P^{\gamma'}=x^{\alpha}.(1-x)^{\gamma'}.F(\alpha+\beta+\gamma',\ \alpha+\beta'+\gamma',\ \gamma'-\gamma+1,\ 1-x).$$

Das Integral:

$$g_{\gamma}.P^{\gamma}=x^{\alpha}.(1-x)^{\gamma}.\int_0^{\infty}S\,ds$$

wird auf dem negativen Ufer des Querschnitts genommen, damit bei der Annäherung des Punktes $\frac{1}{x}$ an 1 der Integrationsweg nicht zwischen zwei Verzweigungspunkte eingeklemmt werde. Es geht durch die Substitution $s=\frac{-\sigma}{1-\sigma}$ über in:

$$e^{i\pi(\lambda+1)} \cdot x^{\alpha} \cdot (1-x)^{\gamma} \int_0^1 \sigma^{\lambda} \cdot (1-\sigma)^{(-\lambda+\mu+\nu+2)} \cdot [1-(1-x)\sigma]^{\nu} d\sigma$$

und bleibt mit $(1-x)^{-\gamma}$ multiplicirt für $x=1$ endlich und von Null verschieden und ist dort einändrig, wenn nicht etwa, was ausgeschlossen bleibt, λ, $-(\lambda+\mu+\nu+2)$ oder $-(\mu+\nu+1)$ eine ganze negative Zahl ist. Setzen wir:

$$g_{\gamma} = \frac{e^{i\pi(\lambda+1)} \cdot \Pi(\lambda) \cdot \Pi(-\lambda-\mu-\nu-2)}{\Pi(-\mu-\nu-1)}$$
$$= \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta'+\gamma)}\, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma') \cdot \Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')}{\Pi(\gamma-\gamma')},$$

so ist $P^{\gamma}(1-x)^{-\gamma}$ für $x=1$ gleich 1 und einändrig. Entwickeln wir unter dem Integral nach Potenzen von $(1-x)$, so haben wir:

$$P^{\gamma} = x^{\alpha} \cdot (1-x)^{\gamma} \cdot F(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma,\ \gamma-\gamma'+1,\ 1-x).$$

Zwischen zwei dieser Integrale, welche einem und demselben Exponentenpaare angehören, kann offenbar niemals eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten statthaben, so lange nicht, was ausgeschlossen bleibt, $\alpha=\alpha'$ oder $\beta=\beta'$ oder $\gamma=\gamma'$ ist. Zwischen je drei dieser Integrale findet aber stets eine lineare, homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt. Die einfachsten folgen unmittelbar aus dem Cauchy'schen Satze, nämlich:

$$\int_1^{\infty} S ds = e^{-2i\pi(\lambda+\mu)} \cdot \int_0^{\infty} S ds - e^{-2\pi i\mu} \cdot \int_0^1 S ds, \quad \int_0^{\frac{1}{x}} S ds = \int_0^1 S ds - \int_1^{\frac{1}{x}} S ds$$

$$\int_1^{\infty} S ds = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} S ds + \int_1^{\frac{1}{x}} S ds, \quad \int_0^{\frac{1}{x}} S ds = \int_0^{\infty} S ds - e^{-2\pi i\nu} \cdot \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} S ds,$$

wobei für unsere Definition des bestimmten Integrales zu bemerken ist, dass die Summe der einzelnen Integrale, wenn man z. B. von 0 nach 1, von da nach $\frac{1}{x}$ und von $\frac{1}{x}$ nach 0 zurückintegrirt, dem über eine geschlossene Curve, also der Null gleich geachtet werden kann, weil die Integralbestandtheile um die Verzweigungspunkte $\left(K_0, K_1, K_{\frac{1}{x}} K_{\infty}\right)$ alle doppelt und im entgegengesetzten Sinne vorkommen. Drücken wir die Gleichungen in den $P^{\alpha}, P^{\alpha'}, \ldots P^{\gamma'}$ aus, die nur eine kürzere Bezeichnung für die Gauss'sche Reihe sind, so haben wir:

$$\left.\begin{array}{l} g_{\beta} \cdot P^{\beta} = e^{-2i\pi(\mu+\lambda)} \cdot g_{\gamma} \cdot P^{\gamma} - g_{\alpha} \cdot e^{-2i\pi\mu} \cdot P^{\alpha}, \\ g_{\beta'} \cdot P^{\beta'} = g_{\alpha} \cdot P^{\alpha} - g_{\gamma'} \cdot P^{\gamma'}, \quad g_{\beta} \cdot P^{\beta} = g_{\alpha'} \cdot P^{\alpha'} + g_{\gamma'} \cdot P^{\gamma'}, \\ g_{\beta'} \cdot P^{\beta'} = g_{\gamma} \cdot P^{\gamma} - g_{\alpha'} \cdot P^{\alpha'} \cdot e^{-2\pi\nu i}. \end{array}\right\} A)$$

Relationen, in denen zwei P mit zusammengehörigem Exponentenpaare vorkommen, erhalten wir durch Integration über eine Schlinge um $0 \ldots 1 \ldots \infty \ldots \frac{1}{x}$ herum, die wir nahe den beiden Ufern des Querschnittes hinführen. Dies Integral ist einmal gleich Null nach dem Cauchy'schen Satze, weil innerhalb des durch das äussere Ufer begrenzten Ebenenstückes die Function S nirgends unendlich wird. Dann aber auch gleich einer Summe von Integralen zwischen $0 \ldots 1$; $1 \ldots \infty$; $\frac{1}{x} \ldots \infty$, genommen mit verschiedenen Zweigen von S. Reduciren wir diese auf die Hauptwerthe, so haben wir:

$$\int_0^1 S ds\,(1-e^{2\pi i\lambda}) + \int_1^\infty S ds\,(1-e^{2\pi i[\lambda+\mu]}) + \int_{\frac{1}{x}}^\infty S ds\,(-1+e^{-2\pi i\nu}) = 0,$$

oder in P ausgedrückt:

$$g_\alpha \cdot P^\alpha . (1-e^{2\lambda\pi i}) + g_\beta . P^\beta . (1-e^{2[\lambda+\mu]\pi i}) + g_{\alpha'} . P^{\alpha'} . (-1+e^{-2\pi i\nu}) = 0.$$

Ersetzen wir hier aus den Gleichungen A) $g_\alpha . P^\alpha$ durch:

$$P^\gamma . g_\gamma . e^{-2\lambda i\pi} - g_\beta . P^\beta . e^{2\mu\pi i}$$

und $g_{\alpha'} . P^{\alpha'}$ durch

$$g_\beta . P^\beta - g_{\gamma'} . P^{\gamma'},$$

so erhalten wir:

$$g_\gamma . P^\gamma . (-1+e^{-2\pi i\lambda}) + g_\beta . P^\beta . (-e^{2\pi i\mu} + e^{-2\pi i\nu})$$
$$+ g_{\gamma'} P^{\gamma'} . (1-e^{-2\pi i\nu}) = 0.$$

Durch Integration über eine Schlinge um $1 \ldots \infty \ldots \frac{1}{x} \ldots 0$ erhalten wir:

$$g_\beta . P^\beta . (1-e^{2\pi i\mu}) + g_{\alpha'} . P^{\alpha'} . (-1+e^{-2\pi i[\lambda+\nu]})$$
$$+ g_{\beta'} . P^{\beta'} . (-1+e^{-2\pi i\lambda}) = 0.$$

Mit den Gleichungen A) folgt hieraus:

$$g_{\gamma'} . P^{\gamma'} . (1-e^{2\pi i\mu}) + g_{\alpha'} P^{\alpha'} . (-e^{2\pi i\mu} + e^{-2\pi i\nu})$$
$$+ P^\gamma . g_\gamma . (-1+e^{-2\pi i\lambda}) = 0.$$

Integriren wir über eine Schlinge um $\infty \ldots \frac{1}{x} \ldots 0 \ldots 1$, so haben wir:

$$g_{\alpha'} . P^{\alpha'} . (-1+e^{-2\pi[i\lambda+\mu+\nu]}) + g_{\beta'} . P^{\beta'} . (-1+e^{-2\pi i[\lambda+\mu]})$$
$$+ g_\alpha . P^\alpha . (1-e^{-2\pi i\lambda}) = 0.$$

Mit den Gleichungen *A*) folgt hieraus:

$$g_{\gamma}.P^{\gamma}\left(-1+e^{-2\pi i[\lambda+\mu+\nu]}\right).e^{2\nu\pi i}+g_{\beta'}.P^{\beta'}\left(e^{2\pi i\nu}-e^{-2\pi i\lambda}\right)$$
$$+g_{\gamma'}.P^{\gamma'}.\left(1-e^{-2\pi i\lambda}\right)=0.$$

Integriren wir über eine Schlinge um $\frac{1}{x}\ldots 0\ldots 1\ldots\infty$, so erhalten wir:

$$g_{\beta'}.P^{\beta'}_{,}.\left(-1+e^{2\pi i\nu}\right)+g_{\alpha}.P^{\alpha}.\left(1-e^{2\pi i[\lambda+\nu]}\right)$$
$$+g_{\beta}.P^{\beta}.\left(1-e^{2\pi i[\lambda+\mu+\nu]}\right)=0.$$

Mit den Gleichungen *A*) folgt hieraus:

$$g_{\gamma'}.P^{\gamma'}.\left(1-e^{2\pi i\nu}\right)+g_{\alpha}.P^{\alpha}.\left(e^{2\pi i\nu}-e^{-2\pi i\mu}\right)$$
$$+g_{\gamma}.P^{\gamma}\left(1-e^{2\pi i[\lambda+\mu+\nu]}\right).e^{-(\lambda+\mu)2\pi i}=0.$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man auch noch, was nachher geschehen soll, $P^{\gamma}, P^{\gamma'}$ durch $P^{\alpha}, P^{\alpha'}$, oder $P^{\beta}, P^{\beta'}$ ausdrücken, wobei es niemals geschehen kann, dass der Coefficient von P^{γ} oder $P^{\gamma'}$ verschwindet, so lange $\alpha-\alpha'$ oder $\beta-\beta'$ nicht eine ganze Zahl ist.

Da man nun vermittelst des Cauchy'schen Satzes jedwedes Integral zwischen zwei Verzweigungswerthen auf beliebigem Wege erstreckt ausdrücken kann durch unsere sechs besprochenen Integrale, nur mit verschiedenen Zweigen von S, und alle diese wiederum ausgedrückt werden können durch je ein Paar $P^{\alpha}, P^{\alpha'}$; $P^{\beta}, P^{\beta'}$; $P^{\gamma}_{,}, P^{\gamma}$ mit constanten Coefficienten, und da endlich sich hieraus von selbst ergiebt, dass zwischen je drei Zweigen eines solchen Integrals (als Function von x) eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten statt habe, so erfüllt ein solches Integral alle die Eigenschaften, welche Riemann von einer Function

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & x\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix}$$

fordert (pag. 5), was hier direct bewiesen worden ist. Setzen wir:

$$P^{\alpha}=\alpha_{\beta}.P^{\beta}+\alpha_{\beta'}.P^{\beta'}=\alpha_{\gamma}.P^{\gamma}+\alpha_{\gamma'}.P^{\gamma'},$$
$$P^{\alpha'}=\alpha'_{\beta}.P^{\beta}+\alpha'_{\beta'}.P^{\beta'}=\alpha'_{\gamma}.P^{\gamma}+\alpha'_{\gamma'}.P^{\gamma'},$$
$$P^{\beta}=\beta_{\alpha}.P^{\alpha}+\beta_{\alpha'}.P^{\alpha'}=\beta_{\gamma}.P^{\gamma}+\beta_{\gamma'}.P^{\gamma'},$$
$$P^{\beta'}=\beta'_{\alpha}.P^{\alpha}+\beta'_{\alpha'}.P^{\alpha'}=\beta'_{\gamma}.P^{\gamma}+\beta'_{\gamma'}.P^{\gamma'},$$
$$P^{\gamma}=\gamma_{\alpha}.P^{\alpha}+\gamma_{\alpha'}.P^{\alpha'}=\gamma_{\beta}.P^{\beta}+\gamma_{\beta'}.P^{\beta'},$$
$$P^{\gamma'}=\gamma'_{\alpha}P^{\alpha}+\gamma'_{\alpha'}.P^{\alpha'}=\gamma'_{\beta}.P^{\beta}+\gamma'_{\beta'}.P^{\beta'},$$

so mögen die Werthe der Coefficienten dieser Gleichungen, ausgedrückt in Π-Function hier noch Platz finden. Ihre Berechnung bietet zwar nicht die

geringsten Schwierigkeiten, aber sie erleichtern die Uebersicht, weil man mit ihrer Hilfe jede vorgegebene P-Function durch hypergeometrische Reihen ausdrücken und sofort für alle Theile der x-Ebene fortsetzen kann. Es ist:

$$\alpha_\beta = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta)} . \Pi(\alpha-\alpha') . \Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma') . \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$\alpha_{\beta'} = \frac{e^{-i\pi(\alpha+\beta')} . \Pi(\alpha-\alpha') \, \Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma') \, \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)},$$

$$\alpha'_\beta = \frac{e^{-i\pi(\alpha'+\beta)} . \Pi(\alpha'-\alpha) . \Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma') . \Pi(-\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\alpha'_{\beta'} = \frac{e^{-i\pi(\alpha'+\beta')} . \Pi(\alpha'-\alpha) \, \Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma') \, \Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)},$$

$$\alpha_\gamma = \frac{\Pi(\alpha-\alpha') \, \Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma) \, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$\alpha_{\gamma'} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha') . \Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma') \, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')},$$

$$\alpha'_\gamma = \frac{\Pi(\alpha'-\alpha) . \Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma) \, \Pi(-\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\alpha'_{\gamma'} = \frac{\Pi(\alpha'-\alpha) \, \Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma') \, \Pi(-\alpha-\beta-\gamma')},$$

$$\beta_\alpha = \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta)} . \Pi(\beta-\beta') \, \Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma) \, \Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')},$$

$$\beta_{\alpha'} = \frac{e^{i\pi(\alpha'+\beta)} \, \Pi(\beta-\beta') . \Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma') . \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)},$$

$$\beta'_\alpha = \frac{e^{i\pi(\alpha+\beta')} . \Pi(\beta'-\beta) \, \Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma) . \Pi(-\alpha-\beta-\gamma')},$$

$$\beta'_{\alpha'} = \frac{e^{i\pi(\alpha'+\beta')} . \Pi(\beta'-\beta) \, \Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma) \, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')},$$

$$\beta_\gamma = \frac{e^{-\gamma\pi i} . \Pi(\beta-\beta') \, \Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma) \, \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)},$$

$$\beta_{\gamma'} = \frac{e^{-\gamma'\pi i} \, \Pi(\beta-\beta') \, \Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma') . \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')},$$

$$\beta'_\gamma = \frac{e^{-\gamma\pi i} . \Pi(\beta'-\beta) \, \Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma) \, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$\beta'_{\gamma'} = \frac{e^{-\pi i\gamma'} . \Pi(\beta'-\beta) \, \Pi(\gamma-\gamma'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma') \, \Pi(-\alpha-\beta-\gamma')},$$

$$\gamma_\alpha = \frac{\Pi(\gamma-\gamma') \,.\, \Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\, \Pi(-\alpha-\beta-\gamma')},$$

$$\gamma_{\alpha'} = \frac{\Pi(\gamma-\gamma') \,.\, \Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')\, \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')},$$

$$\gamma'_\alpha = \frac{\Pi(\gamma'-\gamma) \,.\, \Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma\; \Pi(-\alpha-\beta-\gamma)},$$

$$\gamma'_{\alpha'} = \frac{\Pi(\gamma'-\gamma) \,.\, \Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)\, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$\gamma_\beta = \frac{e^{i\pi\gamma}\, \Pi(\gamma-\gamma') \,.\, \Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma')\, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma')},$$

$$\gamma_{\beta'} = \frac{e^{i\pi\gamma} \,.\, \Pi(\gamma-\gamma')\, \Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma')\, \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma')},$$

$$\gamma'_\beta = \frac{e^{i\pi\gamma'} \,.\, \Pi(\gamma'-\gamma)\, \Pi(\beta'-\beta-1)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma)\, \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)},$$

$$\gamma'_{\beta'} = \frac{e^{i\pi\gamma'} \,.\, \Pi(\gamma'-\gamma) \,.\, \Pi(\beta-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma)\, \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}.$$

Halle, December 1867.

Kleinere Mittheilungen.

I. Die Berechnung der Veränderungen in einem veränderlichen Dreiecksnetze. Von Dr. CHRISTIAN WIENER, Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe.

Während sonst in der Geodäsie die Dreiecksnetze als in der Zeit unveränderlich gelten, dürfte es von Interesse sein, einen Fall zu betrachten, in welchem gerade die Veränderlichkeit eines Dreiecksnetzes das Wesentliche war, und für welches die Aufgabe vorlag, aus der durch zeitweise wiederholte Messung der Winkel erhaltenen Veränderung derselben die Verschiebungen der Eckpunkte zu bestimmen.

Im Januar 1867 hatten sich in Baden-Baden Sprünge in einer etwa 40′ hohen Stützmauer und Risse in dem benachbarten Erdreiche gezeigt, welche vermuthen liessen, dass eine Verschiebung der Mauer stattfinde. Schreiber dieses wurde mit der geodätischen Untersuchung dieses Vorganges beauftragt und fand — was hier sogleich zugefügt werden mag, um das Localinteressante abzuschliessen —, dass die Mauer sammt den mächtigen römischen Pfeilern, die einen Bestandtheil derselben ausmachten, parallel zu den Schichten der Arkose, welche die Unterlage des Fundamentes bildete, abwärts rutschte, und zwar von October 1867 bis Februar 1868 an der Stelle der stärksten Bewegung um 25 Linien badisches Maass.

Um die Bewegung zu ermitteln, verband ich eine Anzahl von Punkten, die auf der Frontfläche der Mauer und auf dem krönenden Geländer bezeichnet wurden, durch ein Dreiecksnetz mit solchen Punkten, welche muthmasslich keine merkliche Bewegung zeigten. Die grösste Anzahl der Dreiecke, welche zur Festlegung eines Punktes dienten, war 7, die Länge einer Dreiecksseite meist zwischen 10 und 20 Ruthen bad.

Die Winkel wurden mit einem Breithaupt'schen Theodoliten gemessen, der 10″ angab; die Coordinaten der Punkte, bezogen auf eine willkürlich gewählte Axe, auf Zehntellinien berechnet.

Um nun aus den nach 4 Monaten von Neuem gemessenen und bis zu 9 Minuten von den ersten Ergebnissen abweichenden Winkeln die Verschiebungen der Punkte, unter denen die als muthmasslich fest gewählten wirklich keine Bewegung erkennen liessen, zu bestimmen, konnte die Berech-

nung vermittelst Azimuth und Saite wie das erste Mal vorgenommen und die erhaltenen Coordinaten verglichen werden. Es wäre dazu eine Rechnung mit Zahlen von 6 Werthstellen nothwendig gewesen. Es empfahl sich aber als rascher zum Ziel führend, statt mit den veränderten Grössen mit den Veränderungen derselben zu rechnen. Die Veränderungen der Winkel in Secunden und die der Länge in Zehntellinien wurden nämlich durch höchstens dreizifferige Zahlen ausgedrückt; man brauchte dann von den in die Formeln eintretenden Werthen der Winkel und der Längen selbst ebenfalls nur 3 Werthstellen mit in Rechnung zu ziehen und rechnete so überhaupt nur mit dreizifferigen Zahlen. Dadurch war es möglich, durch abgekürzte Multiplication und Division oder mit dem Rechenschieber, den ich später vorzog, mit Umgehung von Logarithmentafeln und rascher zum Ziel zu gelangen.

Es mussten nun die Formeln für eine Reihe von Aufgaben gebildet werden, wobei vorausgesetzt wurde, was hier zutraf, dass die Veränderungen der Grössen so klein sind, dass die höheren Potenzen derselben gegen die niederen vernachlässigt, oder dass sie als Differentialien behandelt werden dürfen.

1. Von zwei Punkten 1 und 2 sind die ursprünglichen Coordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 und die Veränderungen derselben dx_1, dy_1, dx_2, dy_2 bekannt; es sollen die daraus entstehende Veränderung ds der Länge $s = 1.2$ und die Veränderung $d\varphi$ des Azimuthes φ von 1.2 bestimmt werden.

Aus $s^2 = (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2$,

$$\frac{y_2 - y_1}{s} = \sin\varphi, \quad \frac{x_2 - x_1}{s} = \cos\varphi$$

folgt durch Differentiation:

$$ds = \frac{y_2 - y_1}{s}(dy_2 - dy_1) + \frac{x_2 - x_1}{s}(dx_2 - dx_1),$$

oder

$$1) \qquad ds = \sin\varphi\,(dy_2 - dy_1) + \cos\varphi\,(dx_2 - ox_1)$$

Aus $\tang\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ folgt ebenso:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{(dy_2 - dy_1)(x_2 - x_1) - (dx_2 - dx_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2},$$

$$2) \qquad d\varphi = \frac{(dy_2 - dy_1)\cos\varphi - (dx_2 - dx_1)\sin\varphi}{s}.$$

2. In einem Dreiecke, dessen Seiten s, s_1, s_2 und dessen bezüglich gegenüberstehende Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ sind, ändern sich s, α_1, α_2 um $ds, d\alpha_1, d\alpha_2$, welches ist die Aenderung ds_2 von s_2?

Zunächst, wenn $d\alpha$ die Aenderung von α, gilt

$$d\alpha + d\alpha_1 + d\alpha_2 = 0.$$

Aus

$$s_2 = s \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha}$$

folgt:

$$ds_2 = ds \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha} + \frac{s}{\sin \alpha} \cos \alpha_2 \, d\alpha_2 - s \sin \alpha_2 \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sin^2 \alpha},$$

oder:

$$ds_2 = ds \frac{s_2}{s} + \frac{s}{\sin \alpha} \cos \alpha_2 \, d\alpha_2 + \frac{s \sin \alpha_2}{\sin \alpha} \cot \alpha \, (d\alpha_1 + d\alpha_2),$$

$$ds_2 = ds \frac{s_2}{s} + \frac{s \, d\alpha_2}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha \cos \alpha_2 + \cos \alpha \sin \alpha_2) + \frac{s \sin \alpha_2}{\sin \alpha} \cot \alpha \, d\alpha_1,$$

3) $$ds_2 = ds \frac{s_2}{s} + s_2 \cot \alpha \, d\alpha_1 + \frac{s_1}{\sin \alpha} d\alpha_2.$$

3. Wenn in dem in 2) bezeichneten Dreiecke das Azimuth von $s = \varphi$, das von $s_1 = \varphi_1$, die Coordinaten des Eckpunktes bei $\alpha_1 : x_1, y_1$, die des Eckpunktes bei $\alpha : x, y$, und wenn die Veränderungen $d\varphi$, $d\alpha$, ds_2, dx_1, dy_1 bekannt sind, welche Veränderungen von φ_1, x, y folgen daraus.

Je nach der Lage des Dreiecks gegen die Abscissenaxe gilt

$$\varphi_1 = \varphi \pm \alpha_1.$$

Daraus folgt:

4) $$d\varphi_1 = d\varphi \pm d\alpha_1.$$

Ferner aus

$$y = y_1 + s_2 \sin \varphi_1,$$

folgt

5) $$dy = dy_1 + ds_2 \sin \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Und aus

$$x = x_1 + s_2 \cos \varphi_1$$

folgt

6) $$dx = dx_1 + ds_2 \cos \varphi_1 - s_2 \sin \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Endlich ergiebt sich die Verschiebung v des Eckpunktes bei α aus

7) $$v = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Alle diese Formeln lassen sich auch geometrisch in einfacher Weise herleiten. Z. B. ist in 3) leicht zu erkennen, dass $ds \frac{s_2}{s}$ der Bestandtheil von ds_2 ist, welcher aus der alleinigen Veränderung von s um ds folgt; ebenso ergiebt sich durch je eine gefällte Senkrechte $s_2 \cot \alpha \, d\alpha_1$ als der Bestandtheil von ds_2, welcher aus der alleinigen Veränderung des α_1 um $d\alpha_1$ entspringt, und $\frac{s_1}{\sin \alpha} d\alpha_2$ als der aus $d\alpha_2$ hervorgehende.

Der Gang der Rechnung ist nun folgender: Von der festen Dreiecksseite ausgehend, erhält man aus den Veränderungen der Winkel die Veränderungen der anderen Seiten aus der Formel 3), worin noch $ds = 0$ gilt, daraus durch 4) 5), 6) die Veränderungen der Coordinaten des verschobe-

nen Punktes, und so fort in den folgenden Dreiecken. Ist einmal als bekannte Seite eines neuen Dreiecks die Verbindungslinie zweier Punkte des vorhergehenden Netzes angenommen, welche in diesem nicht durch eine Dreiecksseite verbunden waren, so berechnet man zuerst die Veränderungen der Länge und des Azimuths dieser Seite nach den Formeln 1) und 2) aus den Veränderungen der Coordinaten der Punkte.

Carlsruhe, im Juli 1868.

II. Ueber Polyeder*). Von Joh. Karl Becker, Privatlehrer in Zürich.

Riemann theilt die Flächen, deren er sich bei seinen Untersuchungen über Functionen complexer Variabelen bedient, in einfache und mehrfach zusammenhangende ein; einfach zusammenhangend heisst ihm eine begrenzte oder unbegrenzte Fläche, wenn jede ganz in ihr verlaufende geschlossene Linie einen Theil der Fläche vollständig begrenzt; im anderen Falle heisst sie mehrfach zusammenhangend. Obwohl Riemann diese Bezeichnungen nur für die speciellen Untersuchungen eingeführt hat, welche seiner allgemeinen Functionenlehre zur Grundlage dienen, dürfte doch auch die Geometrie Notiz davon nehmen. Denn Riemann hat damit auf ein unterscheidendes Merkmal hingewiesen, welches bei manchen Untersuchungen von grosser Wichtigkeit sein kann, so z. B. bei den Untersuchungen über Polyeder. Dies zu zeigen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit.

Ehe ich auf meinen eigentlichen Gegenstand übergehe, muss ich einige scharfe Begriffsbestimmungen vorher schicken, indem die Lehrbücher in der Definition der hier zu betrachtenden Gegenstände sehr von einander abweichen und bisweilen sogar Widersprechendes vorbringen. Ich berufe mich zur Begründung dieser Behauptung auf eines der besten neueren Lehrbücher, das von Dr. Richard Baltzer (die Elemente der Mathematik. Leipzig 1860).

---

*) Der wesentliche Inhalt dieses Aufsatzes wurde schon vor fünf Jahren vom Verfasser in zwei Artikeln unter dem nicht ganz passenden Titel: „Zur Polyedrometrie" in Grunert's Archiv (Theil XXXVIII und XL) veröffentlicht. Da jene Arbeiten nicht ohne Mängel sind, und, wie mir scheint, fast gar keine Beachtung gefunden haben, obwohl sie einen Gegenstand, mit dem sich Männer wie Descartes, Euler, Cauchy, Gergonne, Legendre, Steiner, Grunert und v. Staudt befassten, in ein ganz neues Licht stellen und zu einem Abschlusse bringen, so glaubte der Verfasser in dieser neuen Bearbeitung denselben Gegenstand den Mathematikern nochmals vorlegen zu dürfen.

Es heisst dort u. a. §. 2, 8: „Geradlinige Figuren oder Polygone werden durch eine Reihe von Geraden gebildet, deren jede von der folgenden, die letzte von der ersten geschnitten wird; oder durch eine Reihe von Punkten, deren jeder mit dem folgenden, der letzte mit dem ersten durch eine Gerade verbunden ist.“ Durch Punkte und Gerade können aber nur Complexe von Punkten und Geraden gebildet werden, nicht Flächen, diese können nur dadurch begrenzt werden. Dessenungeachtet heisst es §. 6, 1 im Anfang: „Eine aus planen Polygonen bestehende geschlossene Fläche heisst ein Polyeder, mit Rücksicht auf den eingeschlossenen Raum ein (geometrischer) Körper. Die verbundenen Polygone heissen seine Flächen.“

Wer hieraus seine Begriffe von Körper, Polyeder, Polygon schöpfen soll, kann unmöglich eine klare Vorstellung damit verbinden. Genau genommen besagt dies alles zusammen: „Ein Körper ist eine aus Punkten oder Linien gebildete geschlossene Fläche mit Rücksicht auf den eingeschlossenen Raum.“ Allerdings ist es nicht leicht, hier allgemein giltige Definitionen aufzustellen. Denn bald will man geschlossene gebrochene Linien, bald die von ihnen eingeschlossenen Flächen, bald aus gegebenen geraden Linien bestehende Gebilde betrachten und hat zu ihrer Bezeichnung doch immer nur das eine Wort Polygon, wofür Steiner zwar die vier deutschen Namen einfaches und vollständiges n-Eck und n-Seit eingeführt hat, deren keines aber ihm ein Polygon im Sinne der Alten ist, d. h. eine von geraden Linien eingeschlossene Fläche. Auch fasst man bei Polyedern oft vorzugsweise ihre Oberfläche ins Auge und finde ich es begreiflich, wenn man dann diese als Polyeder auffasst, wie man auch Kegel, Kugel, Cylinder, statt Kegelfläche, Kugelfläche, Cylinderfläche sagt, kann aber weder das eine noch das andere billigen. Denn eine Wissenschaft, welche sich vor allen anderen der Genauigkeit und Schärfe rühmt, sollte sich auch vor Allem scharfer Begriffsbestimmungen bedienen und nicht ganz verschiedene Dinge mit demselben Worte bezeichnen.

Um nun wenigstens in der vorliegenden Abhandlung solche Unklarheiten zu vermeiden, will ich vor Allem erklären, in welchem Sinne ich die Worte Polygon und Polyeder verstehe.

Unter (planem) Polygon schlechtweg verstehe ich „eine von geraden Linien vollständig begrenzte überall zusammenhangende ebene Fläche.“ Ich nenne sie eine überall zusammenhangende, um damit auszudrücken, dass man von jedem Punkte derselben zu jedem anderen in ihr liegenden gelangen kann, ohne die Grenze zu überschreiten. Diese Voraussetzung schliesst den Fall aus, dass die Begrenzung sich selber schneide, aber nicht den, dass sie aus mehreren geschlossenen Linien bestehe. Im letzteren Falle ist das Polygon ein mehrfach zusammenhangendes.

Um auch eine aus geraden Linien zusammengesetzte geschlossene Linie bezeichnen zu können, würde sich vielleicht das Wort Polygonlinie eignen, nach Analogie von Kreislinie. Weil ich aber genöthigt bin, von aus Kanten zusammengesetzten Polygonlinien zu sprechen, die dann Kantenpolygonlinien heissen müssten, will ich mich lieber des Wortes Linienpolygon bedienen, das ich dann Kantenpolygon nenne, wenn die Linien sämmtlich Kanten sind.

Unter einem Polyeder verstehe ich „einen von ebenen Flächen vollständig begrenzten überall zusammenhangenden Raum." Die Bedingung des Zusammenhangs zwischen allen Theilen desselben schliesst nur den Fall aus, dass die Begrenzungsfläche sich selber schneide, nicht aber den, dass sie aus mehreren getrennten geschlossenen aus Polygonen zusammengesetzten Flächen bestehe. Im letzteren Falle könnte man das Polyeder ein mehrfach zusammenhangendes nennen, wenn man als Kennzeichen der einfach zusammenhangenden Räume die Beschaffenheit feststellt, dass jede geschlossene Fläche innerhalb derselben die vollständige Begrenzung eines Theiles derselben bildet. Im Folgenden sollen jedoch nur einfach zusammenhangende Polyeder betrachtet werden, d. h. solche, die von einer einzigen geschlossenen aus ebenen Polygonen zusammengesetzten Fläche begrenzt sind und werde ich daher unter Polyeder immer diese besondere Art verstehen. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich alle nur auf die Oberfläche dieser Polyeder und hätte ich darum wohl auch mit Herrn Dr. Baltzer diese als Polyeder bezeichnen können. Ich halte jedoch für besser, dafür das Wort Polyederoberfläche zu gebrauchen.

Ich bezeichne ferner die einzelnen ebenen Polygone, aus denen die Oberfläche zusammengesetzt ist, als Flächen, ihre Begrenzungslinien, in denen die Oberfläche immer gebrochen ist, als Kanten, deren Endpunkte als Eckpunkte, und die in denselben durch Zusammentreffen mehrerer Polygone gebildeten körperlichen Ecken als Ecken des Polyeders.

Ich habe durch diese Begriffsbestimmungen genau die Grenzen feststellen wollen, innerhalb deren die zu beweisenden Sätze richtig sind, um jeder Ausdehnung derselben auf Gebiete, wo sie nicht mehr gelten, vorzubeugen.. Aber es ist nicht genug, dass man den Begriff der Objecte, welche man untersuchen will, genau fasse, man muss auch die ganze Mannichfaltigkeit der ihm untergeordneten Gebilde übersehen, um nicht in den Fehler zu verfallen, dass man einzelne Eigenschaften allen zuerkennt, während sie doch nur einem Theile in der That zukommen. In diesen Fehler ist u. a. Herr Dr. Baltzer verfallen, indem er die Eigenschaft, dass die Zahl der Kanten um zwei kleiner, als die der Ecken und Flächen zusammengenommen, allen von ihm als Polyeder bezeichneten Flächen zuschreibt, während sie in der That nur einem kleinen Theile derselben wirklich

zukommt. Sein Beweis enthält nämlich die stillschweigende Voraussetzung, dass, wenn man von einem offenen Polygonnetze ein einzelnes Polygon wegnimmt, ohne dass dadurch das Netz in getrennte Theile zerfällt, die Zahl der wegfallenden Seiten immer um 1 grösser sei, als die der wegfallenden Eckpunkte. Dies ist aber nur dann allgemein richtig, wenn das Netz eine einfach zusammenhangende Fläche bildet.

Um nicht in denselben Fehler zu fallen, war mein Augenmerk zunächst darauf gerichtet, alle die Gebilde, welche ich durch die oben gegebene Definition als einfach zusammenhangende Polyeder zusammengefasst habe, nach wesentlich unterscheidenden Merkmalen wieder in Gruppen zu theilen, um in diesen besser auch ihre Verschiedenheit übersehen zu können. Ich fand zunächst, dass man zu unterscheiden habe: Polyeder mit einfach zusammenhangender und solche mit mehrfach zusammenhangender Oberfläche, und bei jeder dieser Klassen wieder solche mit nur einfach zusammenhangenden Flächen (Polygonen) von solchen, welche auch mehrfach zusammenhangende Flächen haben (was ganz unabhängig von der Art des Zusammenhangs der ganzen Oberfläche, wenn dieselbe als eine Fläche betrachtet wird).

Riemann nennt Querschnitt eine Linie, welche zwei Begrenzungspunkte einer mehrfach zusammenhangenden Fläche mit einander verbindet, ohne dadurch die Fläche zu zerstücken. Ein solcher Querschnitt tritt zu der Begrenzung als neuer Bestandtheil hinzu, ohne dadurch einen Theil der Fläche auszuscheiden. Ein zweiter Querschnitt kann irgend zwei Punkte der erweiterten Begrenzung verbinden und erweitert dadurch abermals die Begrenzung. Riemann hat nun auf verschiedene Art bewiesen, dass in jeder mehrfach zusammenhangenden Fläche solche Querschnitte gezogen werden können, und jede durch Querschnitte auf verschiedene Art in eine einfach zusammenhangende verwandelt werden kann, dass aber die dazu erforderliche Anzahl von Querschnitten bei derselben Fläche immer dieselbe ist, wie man die Querschnitte auch ziehen mag, und definirt darnach eine Fläche als $n+1$fach zusammenhangend, wenn sie durch n Querschnitte in eine einfach zusammenhangende verwandelt werden kann.

Was zunächst die einzelnen Flächen eines Polyeders betrifft, so sind dieselben einfach zusammenhangend, wenn sie von einem einzigen Kantenpolygone begrenzt sind, dagegen $n$fach zusammenhangend, sobald sie n Kantenpolygone zur Begrenzung haben.

Die ganze Oberfläche eines Polyeders hat als geschlossene Fläche keine Begrenzung (wiewohl immer eine begrenzte Ausdehnung). Betrachtet man auf derselben eine sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie, z. B. ein Kantenpolygon, so kann zweierlei stattfinden: entweder ist dadurch die Polyederoberfläche in zwei völlig getrennte Theile getheilt, so dass man, ohne sie zu überschreiten, von dem einen nicht

in den anderen gelangen kann, oder es ist dies nicht der Fall, d. h. man kann von der einen Seite der Linie auf die andere gelangen, ohne sie selbst zu überschreiten und ohne die Fläche zu verlassen.

Im ersten Falle werden beide Theile durch die geschlossene Linie vollständig begrenzt. Stellt man sich nun vor, dass sich diese Linie immer mehr zusammenziehe, so dass der eine Theil der Fläche immer grösser, der andere immer kleiner werde, bis er in einen einzigen Punkt zusammenschrumpft, so erscheint dieser Punkt als vollständige Begrenzung der ganzen Fläche, und es ist klar, dass auf diese Weise jeder Punkt der Fläche als ihre vollständige Begrenzung angesehen werden kann. Alsdann kann jede von demselben ausgehende und wieder in ihn zurücklaufende geschlossene sich selbst nicht schneidende Linie auf der Fläche als ein Querschnitt angesehen werden, wenn sie die Fläche nicht zerstückt, d. h. zu den geschlossenen Linien der zweiten Art gehört.

Befindet sich auf der Oberfläche eines Polyeders ein Kantenpolygon, das keinen Theil derselben ausscheidet, so ist das Polyeder an dieser Stelle durchbrochen. Die Art des Zusammenhangs der Oberfläche eines Polyeders hängt offenbar von der Zahl der Durchbrechungen ab, und es lässt sich leicht zeigen, dass bei d Durchbrechungen die Oberfläche eine $3d$fach zusammenhangende ist. Es ist dies jedoch für das Folgende nicht von Wichtigkeit.

Wir betrachten nun zunächst Polyeder mit einfach zusammenhangender aus einfach zusammenhangenden (einfach begrenzten) Polygonen zusammengesetzter Oberfläche.

Diese haben die Eigenschaft, dass die Zahl der Dreiecke, in welche sich die Oberfläche durch Diagonalen zerlegen lässt, doppelt so gross ist, wie die um 2 verminderte Eckenzahl.

Ist also D die Zahl dieser Dreiecke, e die Zahl der Ecken, so ist

$$D = 2(e-2). \tag{1}$$

Beweis. Alle Eckpunkte eines solchen Polyeders, welche mit einem und demselben Eckpunkte S durch Kanten verbunden sind, lassen sich offenbar durch eine ganz auf der Oberfläche liegende, nur in ihnen gebrochene geschlossene Linie verbinden. Sei die Zahl dieser Eckpunkte E, so schneidet diese gebrochene Linie von der Polyederoberfläche ε Dreiecke ab, welche den Punkt S zum gemeinschaftlichen Eckpunkte haben. Ersetzt man diese durch ein durch die gebrochene Linie begrenztes Polygon, so zerfällt dies durch Diagonalen nur in $\varepsilon - 2$ Dreiecke und das neue Polyeder, das offenbar wieder von derselben Art, hat nun $e-1$ Eckpunkte, während seine Oberfläche aus $D-2$ Dreiecken besteht. Aus diesem lässt sich ganz in derselben Weise ein drittes Polyeder mit $e-2$ Ecken und einer aus $D-4$ Dreiecken zusammengesetzten

Oberfläche ableiten, daraus ein $e-3$eckiges mit $D-6$ Dreiecken u. s. w.; endlich ein viereckiges von $D-2\ (e-4)$ Dreiecken begrenztes. Da aber ein viereckiges Polyeder immer von 4 Dreiecken begrenzt ist, so hat man

$$D-2\,(e-4)=4,$$

also

$$D=2\,(e-2).$$

Ist das Polyeder an einer oder mehreren Stellen durchbrochen, seine Oberfläche also eine mehrfach zusammenhangende, so lässt es sich immer durch Grenzflächen im Innern in zwei getrennte Theile theilen, deren Oberflächen einfach zusammenhangend sind.

Nach der Zahl n der dazu erforderlichen Grenzflächen wollen wir das Polyeder als ein solches n^{ter} Classe bezeichnen und zunächst voraussetzen, dass alle seine Flächen einfach begrenzte Polygone seien.

Die n inneren Grenzflächen können immer so gewählt werden, dass ihre Begrenzung jedesmal ein Kantenpolygon des vorliegenden Polyeders ist. Das erste dieser Kantenpolygone habe ε_1, das zweite $\varepsilon_2, \ldots$ das n^{te} ε_n Eckpunkte, und es sei $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n=\varepsilon$. Das erste der beiden neuen Polyeder, in welche das gegebene durch die inneren Grenzflächen zerfällt, habe $e_1+\varepsilon$, das zweite $e_2+\varepsilon$ Eckpunkte. Man hat dann für die Anzahl e aller Eckpunkte:

$$e=e_1+e_2+\varepsilon.$$

Zerlegt man nun sowohl die Oberfläche, als die inneren Theilflächen des Polyeders durch Diagonalen in Dreiecke und bezeichnet D die Zahl der Dreiecke, aus denen dann die Oberfläche zusammengesetzt ist, so hat man

$$\begin{aligned}D&=2(e_1+\varepsilon-2)+2(e_2+\varepsilon-2)-2\left[(\varepsilon_1-2)+(\varepsilon_2-2)+\ldots+(\varepsilon_n-2)\right]\\&=2\left[e_1+e_2+\varepsilon-4+2n\right],\end{aligned}$$

oder

$$D=2\,(e+2n-4)\,. \tag{2}$$

Wir haben mithin den allgemeinen Satz:

Wird die Oberfläche eines Polyeders durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so ist deren Anzahl $D=2(e+2n-4)$, wenn e die Zahl der Eckpunkte, n die Zahl der inneren Grenzflächen bezeichnet, die erforderlich sind, um das Polyeder in zwei Polyeder mit einfach zusammenhangender Oberfläche zu zerlegen.

Dieser Satz ist auch dann noch richtig, wenn sich unter den Flächen des Polyeders mehrfach zusammenhangende befinden. Denkt man sich nämlich die inneren geschlossenen Grenzlinien einer solchen Fläche über dieselbe erhoben und dann wieder mit einander und der äusseren durch eine nur durch sie begrenzte gebrochene Fläche verbunden, so erkennt man leicht, dass diese durch die Kanten, in welchen sie gebrochen ist,

und die ausserdem noch nöthigen Diagonalen in eben so viel Dreiecke zerfällt, wie die anfänglich betrachtete Fläche. Geschieht dasselbe mit allen mehrfach zusammenhangenden Flächen, so wird aber aus dem Polyeder ein solches mit eben so viel Ecken und nur einfach begrenzten Flächen, ohne dass sich dadurch der Werth von D geändert hätte. Dieser ist aber dann $2(e+2n-4)$. Der Satz gilt also auch für das anfänglich betrachtete Polyeder.

Aus dem obigen Satze, welcher der Fundamentalsatz über Polyeder genannt werden dürfte, lassen sich nun leicht die folgenden ableiten:

1. Die Summe der Polygonwinkel eines e-eckigen Polyeders n^{ter} Classe ist immer $e+2n-4$ vollen Umdrehungen gleich.

2. Ein nur von Dreiecken begrenztes Polyeder hat immer $2.(e+2n-4)$ Flächen und $3.(e+2n-4)$ Kanten, ist also nach der Zahl seiner Ecken, Kanten und Flächen vollständig bestimmt, sobald eine dieser Zahlen und die Classe des Polyeders gegeben ist.

Die Zahl der Dreiecke muss immer gerade, die der Kanten durch 3 theilbar sein.

Sei z. B. $e=12$, $n=2$, und bezeichnet f die Zahl der Flächen, k die der Kanten, so findet man $f=24$, $k=36$.

Ist $f=26$, $n=2$, so findet man $e=13$, $k=39$ (womit freilich noch nicht erwiesen, dass ein solches Polyeder wirklich existirt).

Giebt man zwei der Zahlen e, f und k an, so ist (immer unter der Voraussetzung, dass alle Flächen Dreiecke sind) dadurch auch die Classenzahl bestimmt.

Sei z. B. $e=6$, $k=12$, so findet man $f=8$, $n=1$.

Für $e=7$, $k=48$ findet man $n=6\frac{1}{2}$, woraus folgt, dass ein solches Polyeder nicht möglich, indem n nothwendig eine ganze Zahl sein muss.

Es ist klar, dass das zu untersuchende Polyeder sich auch dann als unmöglich erweist, wenn der für n gefundene Werth $> \frac{e}{6}$; so ist z. B. kein Polyeder mit 6 Ecken, 48 Kanten und nur dreieckigen Flächen möglich, da sich für n der Werth 7 ergiebt.

3. Zwischen den Zahlen e der Ecken, f der Flächen und k der Kanten besteht, wenn sämmtliche Flächen einfach zusammenhangende sind, immer die Relation

$$3)\qquad f+e=k+4-2n.$$

Dieser Satz kann der erweiterte Euler'sche Lehrsatz genannt werden.

Er ergiebt sich aus 2) unmittelbar, wenn $D=f$, d. h. wenn alle Flächen Dreiecke sind; denn man hat dann

$$f=2(e+2n-4),\quad 2k=3f,$$

woraus folgt:

$$2k=2f+f=2f+2(e+2n-4),$$
$$k=f+e+2n-4,$$
$$e+f=k+4-2n.$$

Ist D von f verschieden, so werden f und k um gleich viel kleiner, wenn nur alle Flächen einfach begrenzte Polygone sind; denn so oft a Dreiecke zu einer solchen Fläche vereinigt sind, werden $a-1$ Seiten dieser Dreiecke zu Diagonalen. Daraus folgt aber sofort, dass diese Gleichung für Polyeder mit beliebigen einfach zusammenhangenden Flächen gilt. Dagegen gilt sie nicht mehr, sobald sich unter den Flächen auch mehrfach zusammenhangende befinden.

Ein mehrfach zusammenhangendes Polygon kann nämlich durch Querschnitte in ein einfach zusammenhangendes verwandelt werden. Wählt man diese Querschnitte so, dass dadurch allemal ein Eckpunkt der einen Grenzlinie mit einem Eckpunkte der anderen verbunden wird, und ist p die Anzahl aller Eckpunkte der Fläche, q die Anzahl der Querschnitte, so verhält sich die Fläche wie ein einfach zusammenhangendes Polygon mit $p+2q$ Seiten, das sich durch $p+2q-3$ Diagonalen in $p+2q-2$ Dreiecke zerlegen lässt; mit den q Querschnitten ist also die Zahl der Diagonalen der mehrfach zusammenhangenden Fläche $=p+3q-3$. Bei der Zerlegung der Oberfläche des Polyeders in Dreiecke fallen mithin $p+2q-2$ Dreiecke zu einer Fläche zusammen, während von den Seiten derselben $p+3q-3$ zu Diagonalen werden. k wird also um $p+3q-3$, f dagegen nur um $p+2q-3$ kleiner, wie wenn alle Dreiecke als besondere Flächen, ihre Seiten als Kanten angesehen würden. Diese Bemerkung macht es möglich, die Gleichung 3) so umzuändern, dass sie auch für Polyeder mit mehrfach zusammenhangenden Flächen richtig bleibt.

Bezeichnet nämlich q die Anzahl der Querschnitte, die erforderlich sind, um alle Flächen einfach zusammenhangend zu machen, so kann der Euler'sche Satz, um ganz allgemein richtig zu sein, durch die folgende Gleichung ausgesprochen werden:

$$3a)\qquad f+e=k+4-2n+q.$$

Aus dem Euler'schen Satze lassen sich viele Schlüsse ziehen. Ich beschränke mich hier auf Polyeder höherer Classe mit nur einfach begrenzten Flächen und verweise hinsichtlich der Polyeder erster Classe und der Literatur über diesen Gegenstand auf das mehrfach erwähnte Baltzer'sche Lehrbuch, das ich, trotz der gemachten Ausstellungen, nicht umhin kann hier für ein sehr verdienstliches und in mancher

Hinsicht vortreffliches Werk zu erklären. Man findet dort eine unglaubliche Fülle des Materials mit bewunderungswürdigem Fleisse zusammengetragen und in einer Weise dargestellt, die das Buch den besten würdig an die Seite stellt, die über diesen Gegenstand geschrieben worden.

Bezeichnen wir mit f_α, e_α beziehungsweise die Zahl der αseitigen Flächen und der αseitigen Ecken eines Polyeders n^{ter} Classe, so haben wir folgende Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} f = f_3 + f_4 + f_5 + \dots \\ e = e_3 + e_4 + e_5 + \dots \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} 2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots \\ 2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots \end{cases}$$

Hierzu kommt der Euler'sche Satz

$$3)\quad e + f = k + 4 - 2n.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2 und setzt statt $2k$ die Werthe aus 2), so erhält man die folgenden Gleichungen

$$\text{I.}\quad \begin{cases} 2e = f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \dots + 8 - 4n. \\ 2f = e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \dots + 8 - 4n. \end{cases}$$

Aus diesen erhält man durch Addition

$$\text{II.}\quad e_3 + f_3 = 16 - 8n + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + 3(f_7 + e_7) + \dots$$

Multiplicirt man die eine der Gleichungen I mit 2 und addirt dann zur anderen, so erhält man die beiden folgenden:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} 3e_3 + 2e_4 + e_5 = 24 - 12n + 2f_4 + 4f_5 + 6f_6 + \dots + e_7 + 2e_8 + 3e_9 + \dots \\ 3f_3 + 2f_4 + f_5 = 24 - 12n + 2e_4 + 4e_5 + 6e_6 + \dots + f_7 + 2f_8 + 3f_9 + \dots \end{cases}$$

Multiplicirt man die eine der beiden Gleichungen I. mit 3, die andere mit 2, und addirt, so erhält man:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} 4e_3 + 2e_4 + f_3 = 40 - 20n + 2f_4 + 5f_5 + 8f_6 + \dots + 2e_6 + 4e_7 + 6e_8 + \dots \\ 4f_3 + 2f_4 + e_3 = 40 - 20n + 2e_4 + 5e_5 + 8e_6 + \dots + 2f_6 + 4f_7 + 6f_8 + \dots \end{cases}$$

Endlich erhält man aus den Gleichungen I, wenn man die eine mit 4, die andere mit 2 multiplicirt und addirt:

$$\text{V.}\quad \begin{cases} 6e_3 + 4e_4 + 2e_5 = 48 - 24n + 4f_4 + 8f_5 + 12f_6 + \dots + 2e_7 + 4e_8 + 6e_9 + \dots \\ 6f_3 + 4f_4 + 2f_5 = 48 - 24n + 4e_4 + 8e_5 + 12e_6 + \dots + 2f_7 + 4f_8 + 6f_9 + \dots \end{cases}$$

Aus den Gleichungen I folgt für Polyeder zweiter Classe, für welche $8 - 4n = 0$ ist, u. a.:

1. Hat ein solches Polyeder nur dreieckige Flächen, so ist ihre Anzahl doppelt so gross, wie die der Ecken; hat es nur dreiseitige Ecken, so ist deren Anzahl das Doppelte der Flächenzahl.

2. Hat ein solches Polyeder nur vierseitige Ecken oder nur viereckige Flächen, so ist die Eckenzahl der Flächenzahl gleich.

Aus II folgt:

Ein Polyeder ohne dreiseitige Ecken und dreieckige Flächen kann nur der zweiten oder einer höheren Classe angehören. Gehört es der zweiten Classe an, so hat es nur vierseitige Ecken und viereckige Flächen.

Dass solche Polyeder und zwar von der Flächenzahl $3m$ wirklich existiren, wo m jeden beliebigen Werth über 2 annehmen kann, wird klar, wenn man sich eine $m$seitige Doppelpyramide vorstellt und diese durchdrungen denkt von einem $m$seitigen Prisma, dessen Seitenkanten durch die Seitenkanten der Doppelpyramide gehen, indem das, was von der Doppelpyramide dann übrig bleibt, ein solches Polyeder ist.

Aus III folgt für Polyeder zweiter Classe:

1. Hat ein Polyeder dieser Classe keine drei-, vier- und fünfseitigen Ecken, so sind alle Ecken sechsseitig und alle Flächen Dreiecke.

Um sich von der Existenz solcher Polyeder von der Flächenzahl $6m$, wo $m \gtreqless 3$, zu überzeugen, stelle man sich etwa in 3 parallelen Ebenen 3 Polygone von je m Seiten vor, von denen das mittlere so gross, dass sein Umfang die Projectionen der beiden anderen auf seiner Ebene einschliesst. Man kann dann immer den beiden kleineren Polygonen eine solche Stellung geben, dass sie sich mit einander und jede mit dem grösseren zu einem Prismatoid verbinden lassen, dessen sämmtliche Seitenflächen Dreiecke sind, und kann dabei so verfahren, dass jedesmal in jedem Eckpunkte drei Seitenflächen zusammentreffen. Das Polyeder, welches dann übrig bleibt, wenn von der Summe der Prismatoide über dem mittleren m-Ecke das andere weggenommen wird, ist ein Polyeder von der verlangten Beschaffenheit. Es ist natürlich durchaus nicht nothwendig, dass die drei m-Ecke in parallelen Ebenen liegen, oder überhaupt ebene Polygone seien.

2. Hat ein Polyeder zweiter Classe unter seinen Flächen keine Dreiecke, Vierecke und Fünfecke, so sind sämmtliche Flächen Sechsecke und sämmtliche Ecken Dreikante.

Um ein Polyeder dieser Art von $3m$ Flächen, wo $m \gtreqless 3$, zur Anschauung zu bringen, stelle man sich ein Rhomboeder mit $2m$ Seitenflächen vor, das von einem $m$seitigen Prisma in der Art durchdrungen werde, dass dessen Seitenkanten je ein zusammengehöriges Flächenpaar des ersteren durchdringen. Das, was dann von dem Rhomboeder übrig bleibt, ist ein Polyeder von der verlangten Beschaffenheit.

Aus IV folgt für Polyeder zweiter und höherer Classe:

Sind sämmtliche Ecken mehr als vierseitig, so befinden sich unter den Flächen immer Dreiecke; sind sämmtliche Flächen mehr als viereckig, so befinden sich unter den Ecken immer Dreikante. Für Poly-

eder zweiter Classe folgt aus IV. ferner: Sind sämmtliche Ecken Fünfkante, so können nicht alle Flächen gleich vieleckig sein; eben so wenig können sämmtliche Ecken gleich vielseitig sein, wenn alle Flächen Fünfecke sind.

Aus V folgt für Polyeder zweiter Classe:

1. Sind sämmtliche Flächen Dreiecke, so sind entweder alle Ecken sechsseitig, oder das Polyeder hat sowohl Ecken mit weniger, als solche mit mehr als sechs Seiten. Sind alle Ecken Dreikante, so sind entweder alle Flächen Sechsecke, oder einige haben mehr, andere weniger wie 6 Seiten.

2. Sind alle Ecken Sechskante, so müssen alle Flächen Dreiecke sein; sind alle Flächen Sechsecke, so müssen alle Ecken Dreikante sein.

3. Ein Polyeder zweiter Classe kann keine sieben- und mehrseitigen Ecken und Flächen haben, ohne auch solche mit weniger als 6 Seiten zu besitzen.

Aus Allem, was bisher über Polyeder zweiter Classe gefunden worden, zusammengenommen folgt ferner:

Sollen sowohl alle Ecken, als alle Flächen eines Polyeders zweiter Classe gleich vielseitig sein, so ist nur dreierlei möglich:

1. Alle Flächen sind Dreiecke, alle Ecken Sechskante.

2. Alle Flächen sind Sechsecke, alle Ecken Dreikante.

3. Alle Flächen und Ecken sind vierseitig.

Aus V folgt ferner für Polyeder höherer Classe:

Sind alle Ecken oder Flächen sieben- oder mehrseitig, so ist im ersten Falle $e \stackrel{=}{<} 12(n-2)$, im anderen $f \stackrel{=}{<} 12(n-2)$. Für $n=3$ wird hieraus

$$e \stackrel{=}{<} 12 \text{ und } f \stackrel{=}{<} 12,$$

was sich leicht als unvereinbar mit den gemachten Voraussetzungen erkennen lässt.

Dagegen scheinen solche Polyeder von der vierten und höherer Classe in der That zu existiren, wenn auch schwer herzustellen. Jedenfalls kann mit Bestimmtheit behauptet werden: Polyeder, deren sämmtliche Ecken oder Flächen mehr als sechsseitig sind, müssen, wenn sie überhaupt möglich, wenigstens dreimal durchbrochen sein.

Sollen alle Ecken oder Flächen mehr als siebenseitig sein, so folgt aus V bezüglich:

$$e \stackrel{=}{<} 6(n-2) \text{ und } f \stackrel{=}{<} 6(n-2).$$

Dass dies unmöglich, ist leicht zu erkennen. Wir haben also den Satz: **Polyeder, deren sämmtliche Ecken oder Flächen mehr als siebenseitig wären, sind unmöglich.**

Wir wollen jetzt noch untersuchen, welche Polyeder höherer Classe mit gleich vielseitigen Ecken und gleich vieleckigen Flächen möglich sind. Seien alle Ecken $x$seitig, alle Flächen $y$seitig, so hat man:

$$xe = yf = 2k, \text{ also } e = \frac{2k}{x}, \; f = \frac{2k}{y}.$$

Diese Werthe, in die Euler'sche Gleichung eingesetzt, geben:

$$\frac{2k}{x} + \frac{2k}{y} = k + 2(2 - n),$$

oder

$$k = \frac{2xy(n-2)}{xy - 2x - 2y};$$

oder wenn man $x = 3 + \alpha$, $y = 3 + \beta$ setzt:

$$k = \frac{2(n-2)(\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 9)}{\alpha\beta + \alpha + \beta - 3} = 2(n-2) + \frac{4(n-2)(\alpha + \beta + 6)}{\alpha\beta + \alpha + \beta - 3},$$

α und β dürfen nur solche Werthe annehmen, dass k positiv und ganzzahlig und $> 6(n-1)$ wird, und überdies darf keiner dieser Werthe > 4 werden.

Wir haben also nur folgende mögliche Werthsysteme:

1. $\alpha = 0, \; \beta = 4, \; k = 42(n-2), \; e = 28(n-2), \; f = 12(n-2),$
2. $\beta = 0, \; \alpha = 4, \; k = 42(n-2), \; f = 28(n-2), \; e = 12(n-2),$
3. $\alpha = 1, \; \beta = 2, \; k = 20(n-2), \; e = 10(n-2), \; f = 8(n-2),$
4. $\beta = 1, \; \alpha = 2, \; k = 20(n-2), \; f = 10(n-2), \; e = 8(n-2),$
5. $\alpha = 1, \; \beta = 3, \; k = 12(n-2), \; e = 6(n-2), \; f = 4(n-2),$
6. $\alpha = 3, \; \beta = 1, \; k = 12(n-2), \; f = 6(n-2), \; e = 4(n-2).$

Von diesen Werthsystemen scheinen nur die beiden ersten möglichen Polyedern zu entsprechen, wenn $n \gtreqless 4$. Dass den beiden letzten Systemen keine möglichen Polyeder entsprechen, ist augenscheinlich. Für meine Anschauung gilt dasselbe auch von dem dritten und vierten Werthsystem. Doch will ich hier die Möglichkeit einer Täuschung zugeben, da die ganze Mannichfaltigkeit der möglichen Fälle für grosse Werthe von n zu gross, um der unmittelbaren Anschauung leicht zugänglich zu sein, und ein anderer Weg zur Erkenntniss des wahren Sachverhaltes mir nicht ersichtlich ist.

III. Ueber den Werth von $Arctan(\xi + i\eta)$. Durch Herrn F. Unferdinger in Wien bin ich brieflich aufmerksam gemacht worden, dass die üblichen Formeln für $Arctan(\xi + i\eta)$ eine wesentliche Vereinfachung zulassen. Hierbei müssen aber (was Herrn Unferdinger entgangen zu sein scheint) zwei Fälle unterschieden werden, wie ich im Folgenden zeigen will.

Bezeichnet $Arctan\,\zeta = z$ irgend eine der Grössen, welche der Gleichung $tan\,z = \zeta$ genügen, und setzt man ferner

$$1) \qquad Arctan(\xi + i\eta) = x + iy,$$

wo ξ und η gegebene, x und y unbekannte reelle Grössen bedeuten, so folgt $tan(x + iy) = \xi + i\eta$ oder

$$\frac{(e^y + e^{-y})\sin x + i(e^y - e^{-y})\cos x}{(e^y + e^{-y})\cos x - i(e^y - e^{-y})\sin x} = \xi + i\eta.$$

Durch Einführung der Unbekannten

$$2) \qquad \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = Q$$

wird einfacher

$$\frac{tan\,x + iQ}{1 - iQ\,tan\,x} = \xi + i\eta,$$

und wenn man nach Wegschaffung des Bruches die beiderseitigen reellen und imaginären Theile vergleicht, so erhält man die beiden Gleichungen

$$tan\,x = \xi + \eta\,Q\,tan\,x, \quad Q = \eta - \xi\,Q\,tan\,x.$$

Die erste giebt

$$3) \qquad tan\,x = \frac{\xi}{1 - \eta Q},$$

und durch Substitution dieses Werthes verwandelt sich die zweite Gleichung in

$$4) \qquad \eta Q^2 = (\xi^2 + \eta^2 + 1)\,Q - \eta,$$

woraus man findet

$$Q = \frac{\xi^2 + \eta^2 + 1 \pm \sqrt{(\xi^2 + \eta^2 + 1)^2 - 4\eta^2}}{2\eta}.$$

Wegen der Realität des y muss nach Nr. 2) der absolute Werth von Q ein echter Bruch sein, es kann deshalb nur

$$5)\qquad Q=\frac{\xi^2+\eta^2+1-\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)^2-4\eta^2}}{2\eta}$$

genommen werden.

Aus der Gleichung 3) erhält man jetzt

$$x=Arctan\frac{\xi}{1-\eta Q},$$

oder wenn m eine positive oder negative ganze Zahl, und $arctan\, z$ den kleinsten Bogen bezeichnet, dessen Tangente $=z$ ist,

$$x=m\pi+arctan\frac{\xi}{1-\eta Q}.$$

Nach einer bekannten Formel ist nun für $\alpha\beta<1$

$$arctan\,\alpha+arctan\,\beta=arctan\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta},$$

dagegen im Falle $\alpha\beta>1$

$$arctan\,\alpha+arctan\,\beta=\pi-arctan\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-1},$$

mithin für $\alpha=\beta$

$$arctan\,\beta=\tfrac{1}{2}\,arctan\frac{2\beta}{1-\beta^2},\quad \text{für } \beta^2<1,$$

$$arctan\,\beta=\frac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\,arctan\frac{2\beta}{\beta^2-1},\quad \text{für } \beta^2>1$$

und folglich

$$x=m\pi+\tfrac{1}{2}\,arctan\frac{2\xi(1-\eta Q)}{(1-\eta Q)^2-\xi^2}$$

oder

$$x=m\pi+\frac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\,arctan\frac{2\xi(1-\eta Q)}{\xi^2-(1-\eta Q)^2},$$

wobei die erste oder zweite Formel zu wählen ist, je nachdem $\left(\frac{\xi}{1-\eta Q}\right)^2$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt. Nun ist vermöge des Werthes von Q

$$\frac{\xi}{1-\eta Q}=\frac{2\xi}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)^2-4\eta^2}-(\xi^2+\eta^2-1)}$$

oder auch

$$\frac{\xi}{1-\eta Q}=\frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)^2-4\eta^2}+(\xi^2+\eta^2-1)}{2\xi}$$

und durch Multiplication beider Gleichungen

$$\left(\frac{\xi}{1-\eta Q}\right)^2=\frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)^2-4\eta^2}+(\xi^2+\eta^2-1)}{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+1)^2-4\eta^2}-(\xi^2+\eta^2-1)};$$

hieraus geht unmittelbar hervor, dass $\left(\frac{\xi}{1-\eta\varrho}\right)^2$ weniger oder mehr als die Einheit beträgt, je nachdem $\xi^2+\eta^2-1$ negativ oder positiv ist. Setzt man ferner in dem Bruche

$$\frac{2\xi(1-\eta\varrho)}{(1-\eta\varrho)^2-\xi^2}=\frac{2\xi(1-\eta\varrho)}{1-\xi^2-2\eta\varrho+\eta^2\varrho^2}$$

für $\eta\varrho^2$ seinen Werth aus Nr. 4), so wird der erwähnte Bruch

$$=\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}$$

und man hat daher

$$x=m\pi+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)},\quad \text{für } \xi^2+\eta^2<1,$$

$$x=m\pi+\frac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1},\quad \text{für } \xi^2+\eta^2>1.$$

Endlich giebt die Gleichung 2)

$$y=\tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)=\tfrac{1}{4}\,l\left(\frac{1+2\varrho+\varrho^2}{1-2\varrho+\varrho^2}\right);$$

multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruches rechter Hand mit η und substituirt wieder für $\eta\varrho^2$ seinen Werth aus Nr. 4, so wird

$$y=\tfrac{1}{4}\,l\left\{\frac{\xi^2+(\eta+1)^2}{\xi^2+(\eta-1)^2}\right\}.$$

Es ist also für $\xi^2+\eta^2<1$:

$$6)\qquad \operatorname{Arctan}(\xi+i\eta)$$
$$=m\pi+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{2\xi}{1-(\xi^2+\eta^2)}+\frac{i}{4}\,l\left\{\frac{\xi^2+(\eta+1)^2}{\xi^2+(\eta-1)^2}\right\},$$

dagegen für $\xi^2+y^2>1$:

$$7)\qquad \operatorname{Arctan}(\xi+i\eta)$$
$$=(m+\tfrac{1}{2})\pi-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctan}\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2-1}+\frac{i}{4}\,l\left\{\frac{\xi^2+(\eta+1)^2}{\xi^2+(\eta-1)^2}\right\}.$$

In dem speciellen Falle $\xi^2+\eta^2=1$ erhält man aus 5)

$$\varrho=\frac{1-\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}=\frac{1-\sqrt{\xi^2}}{\eta},$$

wo das Wurzelzeichen im absoluten Sinne zu nehmen ist; daraus folgt

$$\tan x=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2}}=\pm 1,$$

$$x=m\pi\pm\frac{\pi}{4},$$

worin das obere Zeichen einem positiven, das untere einem negativen ξ entspricht.

Man hat daher für $\xi^2 + \eta^2 = 1$:

$$8)\qquad Arctan\,(\xi + i\eta) = m\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right).$$

Die Formeln 6), 7) und 8) bieten, den üblichen Formeln gegenüber, den Vortheil, dass sie *Arctan* $(\xi + i\eta)$ in rationaler Gestalt darstellen.

SCHLÖMILCH.

IV. Ueber den Näherungswerth von $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$. Bekanntlich hat Poncelet gezeigt, dass für den Fall $u > v$ näherungsweis

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 0{,}960\,.\,u + 0{,}368\,.\,v$$

gesetzt werden kann, wobei der Maximalfehler 4 Procent der grösseren Zahl u beträgt. Eine ähnliche approximative Darstellung des allgemeineren Radicales $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ist neuerdings von Prof. Horvath in Pesth gegeben worden, nämlich unter der Voraussetzung $u > v > w$

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = 0{,}939\,.\,u + 0{,}389\,.\,v + 0{,}297\,.\,w,$$

wobei der Maximalfehler 6 Procent der grössten Zahl u beträgt.

(Aus *L'Institut*, *année* 1868, Nr. 1782.)

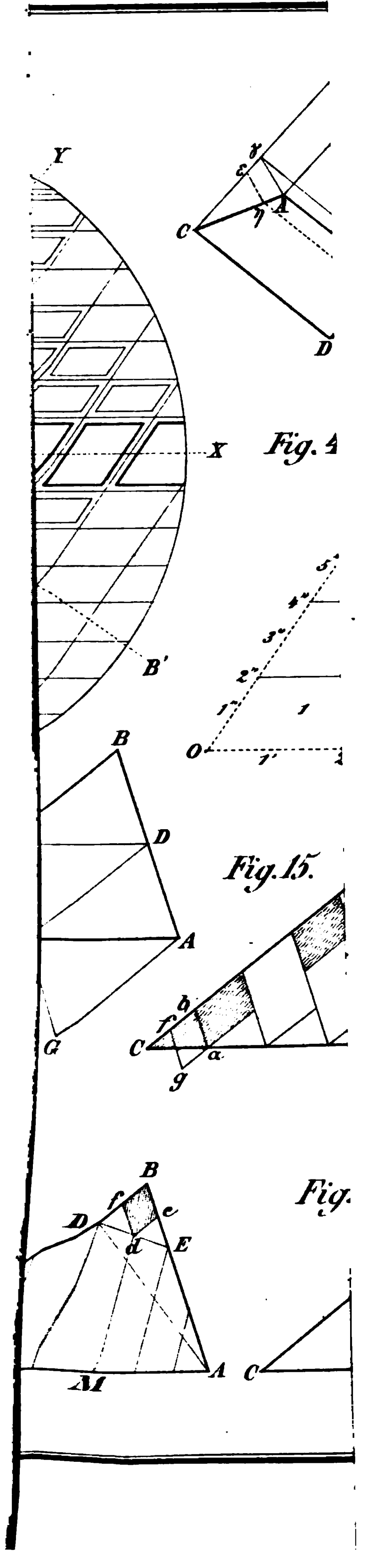
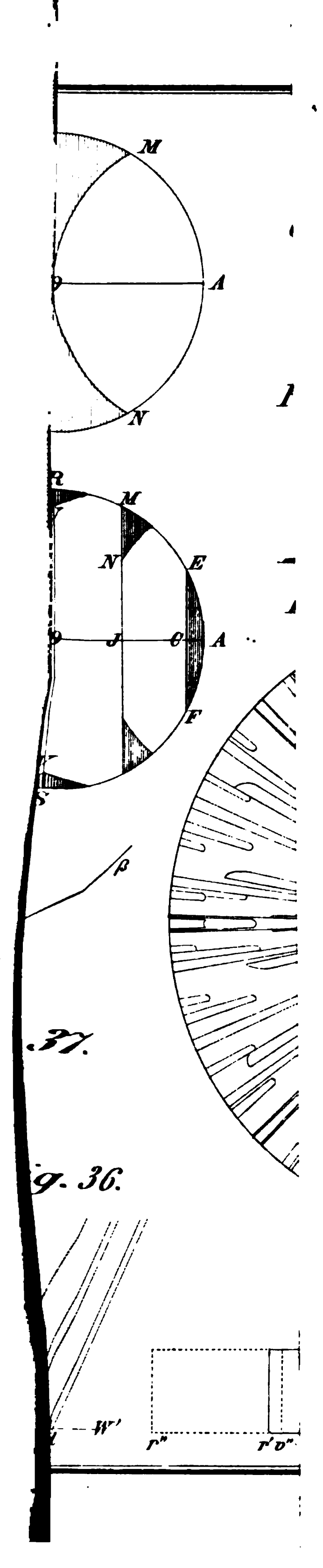


Fig. 4
Fig. 15.
Fig.


M
A
N
R
M
N
E
J
A
F
S
β
.37.
g. 36.
W''
r''
r' v''

III.

Entwurf einer Theorie der Gase.

Von

Prof. Dr. WITTWER
in Regensburg.

Nach den Bestimmungen von Cauchy*) nimmt in denjenigen Medien, welche keine Farbenzerstreuung haben, die Geschwindigkeit ω des Lichtes zu, wie die Quadratwurzel der Aetherdichtigkeit ϱ wächst. Bedeutet also $\frac{1}{A}$ eine Constante, so ergiebt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho}{A}}$$

oder da der Brechungscoefficient n wächst, wie die Geschwindigkeit des Lichtes abnimmt,

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{\varrho}{A_1}},$$

wenn A_1 eine neue Constante vorstellt.

Streng genommen ist der allgemeine Aether das einzige Medium, welches keine Farbenzerstreuung hat, doch ist letztere bei den Gasen, wie Ketteler**) gezeigt hat, so gering, dass wir sie, so lange es sich nicht um ganz genaue Untersuchungen handelt, bei diesen immerhin als nicht vorhanden betrachten können, was auch im Nachstehenden geschehen soll.

Folgt man der alten Annahme, dass die brechende Kraft dem um die Einheit verminderten Quadrate des Brechungscoefficienten gleich sei, setzt man also

$$n^2 - 1 = c\,d,$$

in welcher Gleichung c eine von der Natur des Gases abhängige Constante, d die Dichtigkeit des Gases vorstellt, so erhält man

---

*) *Mémoire sur la dispersion de la lumière*, p. 293.

**) Beobachtungen über die Farbenzerstreuung der Gase. Bonn 1865.

1) $$\frac{A_1}{\varrho} = 1 + cd,$$

2) $$\varrho = \frac{A_1}{1 + cd},$$

3) $$\varrho = A_1 (1 - cd),$$

da die höheren Potenzen von cd vernachlässigt werden können.

Die in einer Kugel enthaltene Aethermenge M ist gleich dem Producte aus dem Volumen V der Kugel in die Dichtigkeit ϱ, also

$$M = V\varrho = A_1 V (1 - cd).$$

Die Dichtigkeit des Gases ist um so bedeutender, je grösser die Anzahl a der in einer Kugel enthaltenen Atome, je kleiner das Volumen der Kugel ist, also

$$d = \frac{a}{V} \text{ und}$$

4) $$M = A_1 V \left(1 - \frac{ac}{V}\right) = A_1 (V - ac).$$

In einer gleich grossen Kugel des freien Aethers (bei dem also $a = 0$) ist die Menge der Aethertheilchen

$$M_1 = A_1 V$$

und durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen ergiebt sich

5) $$M_1 - M = A_1 ac$$

Die Differenz der Mengen von Aethertheilchen, die in einer mit Gas erfüllten Kugel einerseits, in einer gleich grossen Kugel von freiem Aether andererseits sich befinden, ist gleich dem Producte aus der Zahl a der Atome in eine Grösse $A_1 c$, welche von der Natur des Atomes abhängt; sie ist aber unabhängig von der Dichtigkeit des Gases, unabhängig von der Grösse der Kugel.

Wird ein Gas comprimirt, so muss Aether abgeschieden werden, die abgeschiedene Menge ist ebenso gross als diejenige, welche sich in einem Volumen des freien Aethers befindet, das dem Betrage der Compression gleichkommt, und dieser Satz gilt so lange, als dieses bei der Gleichung $n^2 - 1 = cd$ der Fall ist.

Nimmt man mit Beer*) und Anderen an, es sei nicht $n^2 - 1 = cd$, sondern $n - 1 = cd$, so findet man bei Beibehaltung der vorhergehenden Bezeichnungen

1*) $$\sqrt{\frac{A_1}{\varrho}} = (1 + cd),$$

2*) $$\varrho = \frac{A_1}{(1 + cd)^2},$$

*) Höhere Optik, S. 35.

3*) $$\varrho = A_1 (1 - 2cd),$$
4*) $$M = A_1 (V - 2ac),$$
5*) $$M_1 - M = 2 A_1 ac = A_2 ac.$$

Das Ergebniss ist dem Wesen nach dasselbe, wie im vorigen Falle. Sicherlich ist weder die Gleichung $n^2 - 1 = cd$ noch die Gleichung $n - 1 = cd$ vollständig richtig; aber jedenfalls ist die Abweichung von der Wahrheit nicht so gross, dass sie das oben ausgesprochene Resultat wesentlich beeinträchtigen könnte.

Die Dynamiden sind zusammengesetzt aus einem Massenkerne und einer Aetherhülle. Der Kern beansprucht nach der von mir (Entwurf einer Molecularphysik S. 181 und 190) gegebenen Darstellung mehr Aethertheilchen, als nothwendig sind, um ihn zu sättigen, d. h. seine Anziehung auf die im allgemeinen Raume befindlichen Aethertheilchen aufzuheben, und die Hülle der Dynamide enthält verglichen mit einem ihr gleichen Volumen des allgemeinen Raumes ebensoviel Aether als dieses, weniger das, was der Massenkern über seine Sättigung hinaus absorbirt hat.

Bezüglich der Compression der Gase und der damit verbundenen Abscheidung von Aether sagte ich damals (S. 196): „Es giebt zwei verschiedene Wege, denen man folgen kann. Man kann voraussetzen, dass die einzelnen Dynamiden in einem Gase weit von einander entfernt und durch freien Aether getrennt gewesen seien. In diesem Falle ist das, was abgeschieden wird, der freie intermoleculare Aether, und die Dynamiden bleiben ganz. Der zweite Fall ist der, dass man annimmt, die Dynamiden seien *a priori* nahe an einander gewesen, und dann ist der abgeschiedene Aether von den Hüllen genommen."

Wie sich aus der Quantität des durch Compression eines Gases abgeschiedenen Aethers ergiebt, verträgt sich die erstere der vorstehenden Annahmen besser mit den Ergebnissen der Beobachtung, und ich werde daher für jetzt die letztere verlassen. Ein Gas besteht also aus zwei Theilen:

1) aus den Dynamiden,
2) aus freiem Aether, der die Zwischenräume zwischen den Dynamiden einnimmt, und die Dichtigkeit des Aethers des allgemeinen Raumes hat.

Wird das Gas comprimirt, so werden die Zwischenräume zwischen den Dynamiden kleiner, es wird freier Aether in dem Maasse abgeschieden, als die Compression vorschreitet, während die Dynamiden unverletzt bleiben, so lange die Gleichungen $n^2 - 1 = cd$ oder $n - 1 = cd$ als genau betrachtet werden können. Umgekehrt werden bei einer Volumvergrösserung die Zwischenräume wachsen und freier Aether von aussen wird aufgenommen.

Bezüglich der Lichterscheinungen ist hier zu bemerken, dass der über die Sättigung des Massenkernes hinaus von diesem aufgenommene Aether

mit dem Kern fest verbunden und als eine Vermehrung seiner materiellen Substanz zu betrachten ist. Das Licht beruht einzig und allein auf Aetherschwingungen, und für das Licht ist also der über die Sättigung hinaus aufgenommene Aether wie nicht vorhanden, weshalb die Lichterscheinungen eine Verdünnung des Aethers in den Gasen anzeigen. Was der Kern zu viel hat, um das hat die Hülle der Dynamide weniger Aether als ein gleiches Volumen des freien Raumes, und da sich dieses bei jeder Dynamide wiederholt, so ergiebt sich das Resultat der Gleichung 5).

Denken wir uns, ein im allgemeinen Raume befindliches Aethertheilchen sei in Bewegung gesetzt, so wird sich seine Entfernung von den Nachbartheilchen auf der einen Seite vermindern, auf der anderen vergrössern, es ändern sich die gegenseitigen Abstossungen, und das Resultat wird sein, dass das Theilchen nach Erschöpfung seiner Bewegung auf seinen Platz zurückkehrt, dass die Bewegung sich fortpflanzt, kurz es tritt eine Wellenbewegung ein. Die gegenseitige Abstossung wirkt in derselben Weise, wie dieses bei unmittelbarer Berührung ein absolut elastisches Polster thun würde. Bei einer Dynamide kann nach aussen nicht wohl eine andere Erscheinung eintreten, denn sie stellt eine Gruppe von Aethertheilchen dar, die als mit einem Gesammtpolster versehen betrachtet werden können, während der innen befindliche Kern auf die nicht zur Dynamide gehörenden Aethertheilchen weder eine Anziehung noch eine Abstossung äussert. Selbstverständlich kommen auch Schwingungen des Dynamidenäthers vor, wie dieses schon der Begriff des elastischen Polsters um die Dynamide mit sich bringt. Es ergiebt sich aus der vorstehenden Betrachtung, dass die in einem Gase vorkommenden Bewegungen den Gesetzen der Bewegungen absolut elastischer Körper gehorchen müssen.

Sind in einem Gase Dynamiden und freie Aethertheilchen durch einander gemengt, so kann sich keine Dynamide bewegen, ohne auch den Aethertheilchen Bewegung mitzutheilen und umgekehrt, und *wenn die Wärme eines Gases auf Bewegung beruht, so müssen dabei Dynamiden und Aether gleichzeitig betheiligt sein*; es muss daher eine auf Vollständigkeit Anspruch machende Theorie der Wärme der Gase sowohl die Dynamiden, als auch den Aether berücksichtigen, denn die die Gesammtwärme eines Gases repräsentirenden lebendigen Kräfte müssen gleich der Summe der lebendigen Kräfte sämmtlicher Dynamiden und dazu derjenigen sämmtlicher freien Aethertheilchen sein.

Man kann hiergegen den Einwurf erheben, dass, wenn auch Aether und Massentheilchen die Gase zusammensetzen, die Wirkung der ersteren darum vernachlässigt werden könne, weil die Menge ihrer materiellen Substanz, von der ja die lebendige Kraft wieder abhängt, gegen die der schweren Theilchen als verschwindend klein betrachtet werden kann. Denkt man sich das Verhältniss der Massenkerne und der Aethertheilchen

darum her etwa so, wie das Verhältniss der Erde und der Luftheilchen auf ihr, eine Annahme, welche gegen die allgemein herrschenden Ansichten am Ende nicht allzusehr verstösst, so kann allerdings neben den Bewegungen der Massenkerne die der Aethertheilchen darauf als in ihrem Effecte verschwindend klein betrachtet werden, allein diese Anschauung ist nicht in der Natur begründet.

Bekanntlich ist unsere Hauptwärmequelle die Sonne, deren Strahlen die Temperatur der Erdoberfläche erhöhen. Die Sonne ist von uns durch einen weiten Zwischenraum getrennt, der nicht von schweren Theilchen, sondern von Aether erfüllt ist, und die Strahlen der Sonne werden uns durch letzteren vermittelt. Es macht ein Aethertheilchen nach dem anderen seine Schwingungen, bis endlich der Strahl auf die Erde gelangt, und die letzten Aethertheilchen übertragen ihre lebendige Kraft auf die Massentheilchen unseres Planeten. Wird nun die lebendige Kraft der Aethertheilchen um der geringen Menge materieller Substanz der letzteren willen zu unbedeutend, so kann auch die lebendige Kraft der Massentheilchen durch sie nicht wesentlich geändert werden; die Versuche mit der Mellonischen Säule zeigen jedoch ganz deutlich, dass die Aenderung gar nicht lange auf sich warten lässt. Wird durch die Sonnenstrahlen der Beweis geliefert, dass durch die Aetherschwingungen die lebendige Kraft der Massentheilchen merklich erhöht werden kann, so zeigt die Wärmeausstrahlung der Erde gegen den allgemeinen Raum ganz entschieden, dass auch durch Uebertragung an die Aethertheilchen für die Massentheilchen ein merklicher Verlust an lebendiger Kraft eintreten muss. Nimmt man also an, dass bei der Wärme die Bewegungen der Massentheilchen eine Rolle spielen, so sind die Aethertheilchen, mit denen erstere untermischt sind, sehr in Rücksicht zu nehmen, und die lebendige Kraft des Aethers darf durchaus nicht vernachlässigt werden.

Wenn man von dem Satze ausgeht, dass die Quantität der in einer Massenkugel vereinigten materiellen Substanz ohne Vergleich grösser sei, als die materielle Substanz der Aethertheilchen, so kann man, gestützt auf die Thatsache, dass unsere Hauptwärme uns durch den Aether vermittelt wird, leicht auf den Schluss geführt werden, dass wie bei dem Lichte, so auch bei der Wärme die sämmtlichen Erscheinungen nur auf Bewegungen der Aethertheilchen beruhen, ein Satz, der nicht undeutlich in Redtenbacher's „Dynamidensystem“ durchschimmert. Ich glaube jedoch, dass dieser Schluss zu weit führt. Nach Abzug des zur Sättigung der Massenkugeln nöthigen Aethers enthält nämlich ein beliebiges Quantum von Gas genau dieselbe Menge von Aethertheilchen, wie ein gleiches Volumen im freien Raume. Der Druck des äusseren Aethers nach innen und der des inneren nach aussen heben sich auf, und man hat daher, was den Aether anbelangt, keinen von aussen nach innen wirkenden Druck anzuwenden, um die Ausdehnung des Gases zu verhindern, selbst wenn man es in den

allgemeinen Weltenraum hinaus brächte. Durch Compression des Gases wird Aether abgeschieden, derselbe geht anscheinend ungehindert durch die Poren des Gefässes hindurch, und wenn wir dann wahrnehmen, dass das Gas ein verstärktes Bestreben hat, sich auszudehnen, so kann daran nicht wohl der Aether Schuld sein, für den die Wände des Gefässes ersichtlich gar kein Hinderniss bieten, sondern die schweren Theilchen sind es, die durch die Compression auf einen kleineren Raum zusammengedrängt worden sind. Handelt es sich also um mechanische Wirkungen, wie die Ausdehnung, so muss man jedenfalls Bewegungen der Massentheilchen zu Hülfe nehmen; die Aetherbewegungen können aber auch nicht für nichts auf der Welt sein, und ihr Schauplatz ist daher zunächst bei den Aenderungen des Aggregatzustandes, der latenten Wärme u. dergl., kurz bei den sogenannten inneren Arbeiten zu suchen.

Die Bewegungen der Dynamiden und Aethertheilchen eines Gases regeln sich nach den Gesetzen vom Stosse vollkommen elastischer Körper. Bezeichnet man der Reihe nach mit M, V, m, v Menge der materiellen Substanz und Geschwindigkeit der Dynamide, dann Menge der materiellen Substanz und Geschwindigkeit des daran stossenden Aethertheilchens vor dem Stosse, so bekommt man nach den bekannten Formeln nach dem Stosse

die Geschwindigkeit der Dynamide $V_1 = \dfrac{V(M-m) + 2vm}{M+m}$,

die Geschwindigkeit des Aethertheilchens $v_1 = \dfrac{v(m-M) + 2VM}{M+m}$.

Denkt man sich eine lange Reihe von auf einander folgenden bewegten elastischen Theilchen wiederholt aufeinander stossend, so werden dabei die verschiedensten Uebertragungen von lebendiger Kraft vorkommen.

Sind die sämmtlichen Glieder der Reihe Aethertheilchen von durchaus gleicher Menge der materiellen Substanz, von denen das erste sich sei es aus was immer für einer Veranlassung gegen das zweite bewegt, so werden bekanntlich die Geschwindigkeiten ausgetauscht. Das zweite Theilchen tauscht mit dem dritten, dieses mit dem vierten u. s. w. Der Austausch geht, wenn die Abstossungsconstante der Aethertheilchen bedeutend ist, mit grosser Geschwindigkeit vor sich, und wir haben das Phänomen der strahlenden Wärme.

Wechseln Dynamiden und Aethertheilchen, also Stoffe von verschiedener Menge der materiellen Substanz mit einander in der Reihe ab, so gestaltet sich die Folge der Erscheinungen etwas anders. Haben wir z. B. als erstes Theilchen der Reihe eine Dynamide A mit der Geschwindigkeit u und der materiellen Substanz M, und folgen dann die Theilchen B, C, D u. s. w., deren Geschwindigkeit v, w, z u. s. w., sowie deren materielle Substanz M_1, M_2, M_3 u. s. w. ist, so hat man nachstehende Resultate:

1) A stösst auf B:

A bekommt die Geschwindigkeit $u_1 = \frac{u(M - M_1) + 2vM_1}{M + M_1}$, B bekommt die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{v(M_1 - M) + 2uM}{M + M}$.

2) B stösst an C:

B bekommt die Geschwindigkeit $v_2 = \frac{v_1(M_1 - M_2) + 2wM_2}{M_1 + M_2}$, C bekommt die Geschwindigkeit $w_1 = \frac{w(M_2 - M_1) + 2v_1 M_1}{M_1 + M_2}$.

3) B stösst wieder an A:

A bekommt die Geschwindigkeit $u_2 = \frac{u_1(M - M_1) + 2v_2 M_1}{M + M_1}$, B bekommt die Geschwindigkeit $v_3 = \frac{v_2(M_1 - M) + 2u_1 M}{M + M_1}$.

u. s. w. u. s. w.

Wollte man nun, nachdem so und so viele Stösse vor sich gegangen, die letzten Werthe von u_m, v_n, w_o ... kennen, so müsste man in die Gleichung von u_n die Werthe von u_{n-1} u. s. w. substituiren. Das Resultat wäre eine höchst complicirte Formel; man kann sich zwar zur Bestimmung von u_1 und v_1 aus den gegebenen u und v auch der allerdings sehr einfach aussehenden Gleichungen:

$$M(u^2 - u_1^2) = M_1(v_1^2 - v^2),$$
$$M(u - u_1) = M_1(v_1 - v),$$
$$u + u_1 = v_1 + v$$

bedienen, allein der von denselben gewährte Vortheil ist nicht gross. Unter diesen Umständen habe ich es vorgezogen, um mir den Gang der Erscheinung etwas klar zu machen, beispielsweise numerische Werthe für M, M_1, u, v, ... einzusetzen. Es sei zunächst angenommen, man habe in einer Reihe geordnet ein Theilchen A mit der materiellen Substanz $M = 100$ und der Geschwindigkeit 10 und dann die Theilchen b, c, d, ... deren materielle Substanz stets $= 1$, deren Geschwindigkeit ebenfalls $= 1$ sein möge.

Es stossen zusammen A und b.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $u = 10{,}000$ $v = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_1 = 9{,}8218$ $v_1 = 18{,}822$.

Es stossen zusammen b und c.

Geschwindigkeit vor dem Stosse v_1 $18{,}822$ $w = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $v_2 = 1{,}000$ $w_1 = 18{,}822$.

Es stossen zusammen A und b.

Geschwindigkeit vor den Stosse $u_1 = 9{,}8218$ $v_2 = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_2 = 9{,}6472$ $v_3 = 18{,}469$,

ferner c und d

Geschwindigkeit vor dem Stosse $w_1 = 18{,}822$ $z = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $w_2 = 1{,}000$ $z_1 = 18{,}822$.

Es stossen zusammen *b* und *c*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $v_3 = 18{,}469$ $w_2 = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $v_4 = 1{,}000$ $w_3 = 18{,}469$.

Es stossen zusammen *A* und *b*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $u_2 = 9{,}6472$ $v_4 = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_3 = 9{,}4759$ $v_5 = 18{,}123$.

Man kann auch einen wiederholten Wechsel von Dynamiden und Aether einführen, und zu diesem Zwecke sei gesetzt, das dritte Theilchen *c* sei eine Dynamide mit der materiellen Substanz $M = 100$ und der ursprünglichen Geschwindigkeit $w = 1$, *d* dagegen sei wieder ein Aethertheilchen. Es ergiebt sich nun nachstehendes Resultat:

Es stossen zusammen *A* und *b*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $u = 10{,}000$ $v = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_1 = 9{,}8218$ $v_1 = 18{,}822$.

Es stossen zusammen *b* und *C*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $v_1 = 18{,}822$ $w_1 = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $v_2 = -16{,}469$ $v_1 = 1{,}353$.

Es stossen zusammen *A* und *b*,

Geschwindigkeit vor dem Stosse $u_1 = 9{,}8218$ $v_2 = -16{,}469$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_2 = 9{,}3012$ $v_3 = 35{,}592$,

ferner *C* und *d*

Geschwindigkeit vor dem Stosse $w_1 = 1{,}353$ $z = 1{,}000$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $w_2 = 1{,}3460$ $z_1 = 1{,}6988$.

Es stossen zusammen *b* und *C*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $v_3 = 35{,}592$ $w_2 = 1{,}3460$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $v_4 = -32{,}222$ $w_3 = 2{,}0194$.

Es stossen zusammen *A* und *b*.

Geschwindigkeit vor dem Stosse $u_2 = 9{,}3012$ $v_4 = -32{,}222$,
Geschwindigkeit nach dem Stosse $u_3 = 8{,}4791$ $v_5 = 50{,}002$.

Man sieht in den beiden vorstehenden Fällen sehr leicht, dass die Geschwindigkeit von *A* fortwährend abnimmt, weil immer wieder ein Theil derselben an die anderen Körper abgegeben wird. Dieses Abnehmen der Geschwindigkeit und die damit verbundene Verringerung der lebendigen Kraft muss endlich einmal ein Ende nehmen, es muss ein Zustand des sogenannten beweglichen Gleichgewichts eintreten, in welchem die lebendige Kraft eines Theilchens nach dem Stosse die nämliche ist, wie vor dem

Stosse, es muss daher, wenn M, m die Quantitäten der Materie zweier stossenden Körper bezeichnen, die Bedingung erfüllt sein

$$Mu^2 = Mu_1^2,$$

und daraus ergiebt sich

$$u^2 = \left[\frac{u(M-m) + 2mv}{M+m}\right]^2$$

$$Mu = -mv.$$

Die Aenderungen der lebendigen Kraft hören auf, wenn das Product aus der Menge der materiellen Substanz in die Geschwindigkeit für je zwei benachbarte Theilchen gleich ist, während die Richtung der Bewegung von dem einen Theilchen zum anderen das Zeichen ändert.

Um die sich hieran knüpfenden Erscheinungen näher kennen zu lernen, sei angenommen, man habe eine solche in beweglichem Gleichgewichte befindliche Reihe A, b, C, d, E, f, G, h..., in welcher Massentheilchen und Aethertheilchen so mit einander wechseln, dass die grossen Buchstaben Dynamiden, die kleinen Aethertheilchen vorstellen. Entsprechen $M = 100$ und $m = 1$ den materiellen Quantitäten von Dynamide und Aetheratom $u = 10$ und $v = 1000$ den bezüglichen Geschwindigkeiten, so haben die Producte Mu und mv von einem Theilchen zum andern entgegengesetzte Zeichen. Nun will ich annehmen, das erste Theilchen A bekomme einen derartigen Zuschuss zu seiner Bewegung, dass es jedesmal, wenn es an b stösst, dieses nicht mit der Geschwindigkeit 10,0, sondern 15,0 thut, dass es also auf der b entgegengesetzten Seite seines Weges jedesmal einen entsprechenden Zuwachs zu seiner lebendigen Kraft erhält. Das Ergebniss der verschiedenen Stösse findet sich aus nachstehender Tabelle I.

Die in dieser Tabelle in einer und derselben Zeile stehenden Zahlen geben die gleichzeitigen Geschwindigkeiten und Richtungen der einzelnen Theilchen für den Augenblick an, in welchem das mit + Richtung versehene vorangehende Theilchen auf das nächstfolgende sich in der entgegengesetzten Richtung bewegende stösst. Die Bewegung, die aus diesem Zusammenstosse folgt, steht für jedes Theilchen in der nächstfolgenden Zeile. Die erste Zeile giebt also an, dass A mit der Geschwindigkeit 15,000 auf b stösst, dessen Bewegung durch $-1000{,}0$ angegeben ist. Daraus ergiebt sich für A $-5{,}0991$, für b dagegen $+1009{,}9$. In dem nämlichen Augenblicke stösst C mit $+10{,}000$ auf d mit $-1000{,}0$ und es folgt daraus für C $-10{,}000$, für d $+1000{,}0$. Dasselbe geschieht gleichzeitig bei E und f, bei G und h. Nun geht A zurück, um sich, wie vorausgesetzt wurde, neuerdings die Geschwindigkeit $+15{,}000$ zu holen. Während dieses geschieht, stösst b mit der Geschwindigkeit

$+1009{,}9$ an C $(-10{,}000)$, d $(+1000{,}0)$ an E $(-10{,}000)$

u. s. w.

Tabelle I.

Nummer des Stosses.	Geschwindigkeit und Richtung von								Nummer des Stosses.
	A	b	C	d	E	f	G	h	
1	15,000	— 1000,0	10,000	— 1000,0	10,000	— 1000,0	10,000	— 1000,0	
	— 5,0991	1009,9	— 10,000	1000,0	— 10,000	1000,0	— 10,000	1000,0	
2	15,000	— 1009,7	10,196	— 1000,0	10,000	— 1000,0	10,000	— 1000,0	
	— 5,2911	1019,4	— 9,8080	1000,4	— 10,000	1000,0	— 10,000	1000,0	
3	15,000	— 1018,6	10,572	— 1000,4	10,008	— 1000,0	10,000	— 1000,0	
	— 5,4674	1028,1	— 9,4476	1001,5	— 9,9920	1000,0	— 10,000	1000,0	
4	15,000	— 1026,4	11,098	— 1001,5	10,038	— 1000,0	10,000	— 1000,0	
	— 5,6219	1035,7	— 8,9534	1003,7	— 9,9620	1000,1	— 10,000	1000,0	1
5	15,000	— 1033,0	11,783	— 1003,6	10,111	— 1000,1	10,002	— 1000,0	
	— 5,7525	1042,8	— 8,3724	1006,9	— 9,8930	1000,3	— 9,9982	1000,0	2
6	15,000	— 1038,2	12,433	— 1006,5	10,248	— 1000,3	10,006	— 1000,0	
	— 5,8554	1047,8	— 7,7435	1011,2	— 9,7674	1000,8	— 9,9940	1000,0	3
7	15,000	— 1041,9	13,149	— 1010,5	10,451	— 1000,8	10,022	— 1000,0	
	— 5,9287	1051,0	— 7,1054	1016,5	— 9,5736	1001,7	— 9,9781	1000,0	4
8	15,000	— 1044,3	13,847	— 1015,4	10,745	— 1001,6	10,054	— 1000,0	
	— 5,9763	1053,4	— 6,5345	1022,7	— 9,2807	1003,1	— 9,9465	1000,1	5
9	15,000	— 1045,4	14,454	— 1020,8	11,154	— 1003,0	10,112	— 1000,1	
	— 5,9980	1054,4	— 6,0456	1029,1	— 8,9287	1005,2	— 9,8921	1000,3	6

Hätte A dieselbe Bewegung, wie die ihm an Quantität der materiellen Substanz gleichen C, E, G, so wäre das ganze Ergebniss nichts weiter als ein fortwährendes Wechseln der Bewegungen + 10,000 und — 1000,0 mit — 10,000 und + 1000,0. Der Voraussetzung gemäss hat aber A beim ersten Stosse die Geschwindigkeit + 15,000 und hat diese jedesmal wieder, wenn es von Neuem mit b zusammenstösst. Das Resultat dieses Umstandes findet sich in den schief abwärts laufenden fetteren Ziffern zusammengestellt.

A stösst also an b und das Ergebniss des ersten Zusammenprallens ist für A — 5,0991, für b + 1009,9. Nun stösst b mit der Geschwindigkeit + 1009,9 an C und daraus folgt für b — 1009,7, für C + 10,196; C stösst dann an d, ersteres bekommt — 9,8080, letzteres + 1000,4. Durch Zusammenstoss von d mit E ergiebt sich für d — 1000,4 und für E + 10,008, und wenn dann E an f stösst, so bekommt man für E — 9,9920, für f (bei Anwendung fünfstelliger Logarithmen) + 1000,0. Kommen nun f und G, dann G und h zusammen, so ist offenbar der Effect in nichts von dem verschieden, den man hätte, wenn A den Werth 10,000 gehabt hätte. Die Wirkung des ersten Stosses von A versiegt also, wenn der Stoss sich bis f fortgepflanzt hat.

Während all dieses geschehen ist, hat sich A neuerdings die Geschwindigkeit 15,000 geholt, und hat zum zweitenmale an b gestossen, das seinerseits durch den Zusammenstoss mit C die Bewegung — 1009,7 erhalten hat. Das Ergebniss ist für A — 5,2911, für b 1019,4. Es wiederholt sich nun die Reihenfolge der Erscheinungen des ersten Stosses, und die Wirkung des zweiten versiegt bei G. Die Wirkung des fünften Stosses erstreckt sich bis h, und so geht es weiter, es wird die Bewegung nach so und so vielen wiederholten Stössen immer weiter und weiter, aber stets nur schrittweise fortgepflanzt.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit, die ein Theilchen besitzt, wenn es in der einen Richtung geht, mit u, diejenige, welche es auf dem Rückwege hat, mit v, so ist die Summe der lebendigen Kräfte für beide Bewegungen $M(u^2 + v^2)$, wenn M die Quantität der materiellen Substanz vorstellt. Für den Fall, dass A sich von den übrigen Theilchen C, E, G nicht unterscheidet, d. i. für den Fall des Beharrungszustandes, sind die genannten Summen für die Dynamiden je 20000, für die Aethertheilchen je 2000000. Wenn dagegen A nach jedem Stosse wieder auf die Geschwindigkeit 15,000 gebracht wird, ergiebt sich das in nachfolgender Tabelle zusammengestellte Resultat.

Tabelle II.

Nummer des Stosses.	A	b	C	d	E	f	G	h
1	25100	2039400	20016	2001600	20000	2000000	20000	2000000
2	25300	2076800	20103	2006000	20000	2000400	20000	2000000
3	25489	2110600	20333	2014500	20010	2001200	20000	2000000
4	25661	2139800	20776	2027000	20031	2003200	20000	2000000
5	25809	2166200	21454	2043700	20087	2006600	20000	2000400
6	25929	2182400	22338	2064300	20158	2012200	20010	2001200
7	26015	2195100	23443	2087900	20414	2020100	20028	2002600
8	26072	2202500	24548	2112700	20743	2030400	20062	2005100
9	26098	2204900	25572	2137600	21243	2044000	20127	2009000

Ich muss hier darauf aufmerksam machen, dass die vorstehenden Zahlen die lebendigen Kräfte angeben, welche ein Theilchen in Folge des ersten, zweiten ... Stosses, der an dasselbe gelangt, besitzt; da aber der Stoss jedesmal einige Zeit braucht, um zu den nachfolgenden Theilchen zu gelangen, sind in den einzelnen Zeilen der Tabelle verschiedene Zeitmomente repräsentirt.

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich, dass A bei jedem Stosse an lebendiger Kraft verliert, denn ohne Verlust müsste in der ersten Columne constant die Zahl $2.100.15^2 = 45000$ stehen. Die lebendige Kraft, welche A verliert, geht auf b über, denn die Zahlen der Columne b wachsen fortwährend, b aber behält nicht alles für sich, sondern giebt von seinem Reichthum an C ab, ohne die eigene Zunahme zu vergessen. C verhält sich gegen d ebenso wie b gegen C und soweit die Genauigkeit fünfstelliger Logarithmen es erkennen lässt, stellt sich das gleiche Verhalten auch bei den nachfolgenden Theilchen ein. Die lebendige Kraft theilt sich also mit, aber diese Mittheilung geschieht ganz allmälig und die von A weiter entfernten Theilchen bekommen ihren Zuschuss erst nach öfter wiederholten Stössen von A.

Es dürfte wohl Niemandem entgangen sein, dass der vorstehend betrachtete Vorgang alle Analogien zeigt mit der Reihenfolge von Erscheinungen, welche ein Körper, der mit einer Wärmequelle von etwas höherer aber constanter Temperatur in Berührung steht, wahrnehmen lässt. Die Temperatur der Körper wird allgemein auf die lebendige Kraft der in ihr befindlichen Theilchen zurückgeführt, und das, was man Leitung der Wärme nennt, findet daher seine Erklärung in Stössen elastischer Körper von verschiedener Menge der materiellen Substanz, während die Fortpflanzung der Wärme durch Strahlung dann eintritt, wenn die Menge materieller Substanz der stossenden Theilchen stets dieselbe bleibt.

Ein Gas, dessen Dynamiden so zerstreut sind, dass nicht alle durchziehenden Wärmestrahlen auf Dynamiden treffen, wird neben der Wärme-

leitung auch Diathermansie zeigen. Letztere muss mit wachsender Dichtigkeit des Gases und wachsendem Dynamidenvolumen abnehmen, weil die Wahrscheinlichkeit wächst, dass eine Dynamide von dem Stosse getroffen wird.

Ich glaube kaum erwähnen zu müssen, dass der oben vorausgesetzte durchaus centrale Stoss der einzelnen Theilchen auf einander in der Natur kaum vorkommen wird, dass dieses aber den endlichen Erfolg nicht aufhebt, sondern ihn nur modificirt. Ist der Stoss nicht selbst central, so ist es eine Componirende desselben, und da die lebendige Kraft nicht verloren gehen kann, so müssen die anderen Componirenden ebenfalls thätig sein. Es ergiebt sich also nur eine Vertheilung eines Stosses in mehrere von verschiedener Richtung und es breitet sich also die Wärme nach allen Richtungen aus. Darum finden auch Transversalschwingungen statt, welche ja bei den Gasen bereits nachgewiesen sind.

Die vorstehende Erklärung der Wärmeleitung gilt zunächst für die Luftarten, bei denen die Voraussetzung, dass die Dynamiden mit freien Aethertheilchen abwechseln, erfüllt ist. Bei den tropfbarflüssigen und den festen Körpern ist, wie ich in meinem Entwurfe einer Molecularphysik gezeigt habe, dieser freie Aether nicht oder nur in verhältnissmässig unbedeutender Menge vorhanden, und es muss sich bei diesen Stoffen die Fortpflanzung der Wärme durch Leitung auf die Bewegungen innerhalb der Dynamiden, die Bewegungen der elastischen Polster der Massenkerne reduciren, die ich bei den Gasen wenigstens einstweilen vernachlässigen konnte. Auch bei den tropfbarflüssigen und den festen Körpern müssen excentrische Stösse vorkommen, auch bei ihnen müssen daher Transversalschwingungen eintreten.

Der Werth des Quotienten $\frac{M}{m}$ ist für die Leitung der Wärme wenigstens in den Gasen von grosser Bedeutung. Setzt man $\frac{M}{m} = 10$ statt wie früher $= 100$, das Verhältniss $\frac{u}{v} = \frac{10}{100}$ statt $\frac{10}{1000}$, so ist das Resultat der ersten 2 Stösse von A nachfolgendes, wenn wie in Tabelle II die in der gleichen Zeile stehenden Zahlen nicht die gleichzeitigen Zustände repräsentiren, sondern die Ergebnisse eines und desselben Stosses.

Tabelle III.

Nummer des Stosses.	Geschwindigkeit und Richtung von							
	A	*b*	*C*	*d*	*E*	*f*	*G*	*h*
1	**15,000**	**109,09**	**11,653**	**103,01**	**10,547**	**100,99**	**10,180**	**100,83**
	— 5,9091	— 107,44	— 8,6478	— 102,46	— 9,5528	— 100,81	— 9,8528	— 100,27
2	**15,000**	**115,18**	**13,867**	**109,05**	**12,011**	**104,82**	**10,906**	**101,96**
	— 7,2619	— 109,96	— 7,2837	— 106,59	— 8,5018	— 103,26	— 9,2174	— 101,52

Bei Zusammenstellung der lebendigen Kräfte ergiebt sich entsprechend der Tabelle II

Tabelle IV.

Nummer des Stosses.	*A*	*b*	*C*	*d*	*E*	*f*	*G*	*h*
1	2599	23444	2106	21110	2025	20362	2007	20121
2	2777	25359	2453	23253	2165	21546	2039	20702

Bei Vergleichung der Tabellen III und IV mit I und II ergiebt sich der Unterschied, dass bei III und IV die Wirkung des ersten Stosses bei *f* nicht versiegt, sondern noch über *h* hinausreicht, wenn sie sich auch hier wie dort fortwährend abschwächt. Die von der Wärmequelle weiter entfernten Theilchen verspüren also die Temperaturerhöhung rascher, wenn der Quotient $\frac{M}{m}$ abnimmt, d. h. die Leitungsfähigkeit des Gases nimmt zu, wenn sich die Masse der einzelnen Dynamiden verringert, welche Verringerung zwar nicht ganz, aber doch nahezu mit der Abnahme des Atomgewichtes zusammenfällt. Ein Gas mit kleinerem Atomgewicht hat also ein grösseres Wärmeleitungsvermögen.

Die experimentelle Bestimmung des Wärmeleitungsvermögens der Gase unterliegt bekanntlich bedeutenden Schwierigkeiten und selbst Herrn Magnus*) ist es nicht gelungen, die Gase nach ihrem relativen Leitungsvermögen zu ordnen, aber so viel ergiebt sich aus seinen Untersuchungen als sicher, dass dasjenige Gas, dessen Atomgewicht das geringste ist, der Wasserstoff, unter allen Luftarten die höchste Leitungsfähigkeit besitzt.

Hat man irgend eine Gasart in einem Gefässe, so befinden sich in diesem sowohl Dynamiden als Aethertheilchen. Comprimirt man nun das Gas, so sind in dem Gefässe noch die nämlichen Dynamiden, aber die Aethermenge hat sich um so viel vermindert, als der Raumverminderung entspricht, es ist um soviel Aether weniger vorhanden, als in einem Raume des allgemeinen Aethers sich befindet, der der Verringerung des Gasvolumens gleichkommt. Der Aether muss demnach aus dem Gefässe herausgekommen sein, er ist durch die Poren der Wände hindurch, denn einen andern Weg giebt es nicht. Ich habe nun nie etwas davon gehört, dass ein Beobachter ein Blasen oder dergleichen wahrgenommen hätte, wie man es bemerkt, wenn Luft durch enge Oeffnungen gepresst wird, und es bleibt daher nicht wohl ein anderer Schluss übrig als der, dass die Poren des Gefässes im Verhältniss zu den Dimensionen der Aetherkugeln sehr gross seien. Der

*) Pogg. Ann. CXII.

Aether geht durch die Wandungen wie Wasser durch ein weitmaschiges Netz und die Dynamiden sind, um das Bild zu vervollständigen, die Fische, die darin gefangen werden. Darum ist es wohl nicht fehlerhaft, wenn ich annehme, dass der Aether auf die Wände keinen Druck ausübt, und dass, wenn ein solcher beobachtet wird, dieser einzig der Wirkung der Dynamiden zuzuschreiben ist, und es müssen daher, insofern von einem Drucke nach aussen die Rede ist, die lebendigen Kräfte der Dynamiden und die der Aethertheilchen getrennt gehalten werden. Die Dynamiden stellen so und so viele elastische Körper vor, die hin und hergehen und an die Wand anprallen. Ob sie alle selbst an die Wand gehen, oder ob sich blos der Stoss jeweilig fortpflanzt, ist vollständig gleichgiltig, da die lebendigen Kräfte immer die nämlichen bleiben. Ich komme so ganz auf die Darstellung hinaus, welche Herr Krönig*) in seinen Grundzügen einer Theorie der Gase gegeben und mit deren Hilfe er das Mariotte'sche und das Gay-Lussac'sche Gesetz abgeleitet hat, und worauf ich hiermit verweise.

Man kann mir hier einen Einwurf machen. Nach Krönig ist die Wirkung, die ein Lufttheilchen auf die Wand ausübt, proportional dem Producte aus der Geschwindigkeit in die Zahl der Stösse, die es in der Zeiteinheit auf die Wand macht, und da diese Zahl wieder der Geschwindigkeit proportional ist, erhält er die Wirkung als im directen Verhältnisse zum Quadrate der Geschwindigkeit stehend. Ist ein Theilchen an die Wand angeprallt und stösst es am Rückweg (wir wollen setzen central) auf ein anderes, so kehrt es um und prallt wieder an; dafür kommt aber das andere nicht und der auf die Wand ausgeübte Effect bleibt also ungeändert.

Nach meinen Voraussetzungen geht die Dynamide nicht bis zur nächsten Dynamide zurück, sondern nur bis zum nächsten Aethertheilchen; sie kommt also jedenfalls früher an der Wand an, und seine Wirkung auf letztere vergrössert sich also. Dafür stossen aber entsprechend viele Dynamiden nicht an die Wand, sondern die Aethertheilchen thun es, die von dem in den Poren befindlichen Aether zurückgetrieben werden und keinen Druck auf die Wand ausüben. Nehmen wir z. B. an, die Theilchen seien alle in parallele Reihen geordnet, die Richtung der Bewegungen falle mit der Richtung der Reihe zusammen, die Wand stehe senkrecht darauf und zwischen je 2 Dynamiden seien 9 Aethertheilchen! Ist am äussersten Ende einer solchen Reihe eine Dynamide, so geht diese nach dem Anprallen bis zum nächsten Aethertheilchen zurück und kehrt wieder um. Ihr Weg ist durch die Einschaltung auf $\frac{1}{10}$ des ursprünglichen vermindert, sie kommt also zehnmal so oft und übt die zehnfache Pression aus. Bildet jedoch in jeder Reihe eine Dynamide das äusserste Glied? Nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist dieses unter 10 Reihen nur ein-

*) Pogg. Ann. XCIX.

mal der Fall. Neun Reihen unter zehn enden mit Aethertheilchen, drücken also nicht, und die zehnte wirkt mit der zehnfachen Kraft, wir haben also $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

Meine Annahme geräth also mit dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze nicht in Collision, und die Gase folgen diesen Gesetzen soweit die am Eingange angeführten Normen $n - 1 = cd$ oder $n^2 - 1 = cd$ richtig sind. Finden Abweichungen von diesen statt, so ist die Annahme, dass die Aetherabscheidung der Volumverminderung der Gase proportional sei, auch nicht mehr richtig, und es ergeben sich dann Abweichungen von den genannten Gesetzen.

IV.

Untersuchung einiger Gewölbformen, durch welche ein Raum mit trapezoidförmigem Grundrisse überwölbt werden kann.

Von

RUDOLF STAUDIGL,

Adjunct am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—11.)

Die wesentlichen Unterschiede der Gewölbe werden vorzugsweise durch die Form und Anordnung der Flächen bedingt, welche den Körper des Gewölbes nach unten begrenzen. Daher versteht man unter dem Worte Gewölbform fast immer nur die aus der Zusammensetzung jener Flächen entstandene Form. Am häufigsten werden Gewölbformen durch eine einzige Fläche gebildet, in welchem Falle man sie eine einfache nennen könnte, im Gegensatze zu den zusammengesetzten Gewölbformen, die durch Verbindung von zwei oder mehreren Flächen zu Stande kommen.

Wir wollen hier nur einige für unseren Fall anwendbare Gewölbformen untersuchen, und zwar solche, welche nicht nur praktisch verwendbar sind, sondern auch ein theoretisches Interesse bieten.

1. Die windschiefe Gewölbform mit horizontaler Richtebene und zwei elliptischen Leitlinien, welche zugleich Stirnbögen sind.

In Fig. 1 sind die Leitlinien der Fläche, welche wir in Betracht ziehen, über den Seiten $A'B'$ und $C'D'$ des vierseitigen, unregelmässigen Grundrisses angenommen. Die geradlinigen Erzeugenden, also auch die Schlusslinie, sollen alle horizontal werden, daher die Pfeilhöhen der Leitlinien gleich sein müssen. Nimmt man als Leitlinien Ellipsen mit gleichen verticalen Axen an, so erhält man Erzeugende, deren horizontale Projectionen ganz unabhängig von der Grösse dieser Axe sind, wie aus Folgendem hervorgeht.

Da jede Erzeugende horizontal ist, so müssen die Punkte, in welchen sie die beiden Leitlinien treffen, gleich hoch über der horizontalen Ebene des Grundrisses liegen. Es seien nun:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ und } \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichungen der beiden Leitlinien mit gleicher verticaler Halbaxe b und x', y', x'', y' seien die Coordinaten der gleich hoch liegenden Punkte m und p, in welchen eine Erzeugende beide Leitlinien schneidet, so bestehen für diese Punkte die Gleichungen:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1, \quad \frac{x''^2}{a_1^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$x' : a = x'' : a,$$

und daraus:

1) $$a + x' : a - x' = a_1 + x'' : a_1 - x''.$$

Nimmt man nun die Grundrissseiten $A'B'$ und $C'D'$ zugleich als horizontale Axen der Leitlinien an, so ist $m'M' = x'$ und $p'O' = x''$, wenn M' und O' die Mittelpunkte dieser Linien sind. Aus 1) folgt dann:

I) $$m'B' : m'A' = p'C' : p'D',$$

d. h. die horizontale Projection einer jeden Erzeugenden der windschiefen Fläche theilt die Grundrissseiten, über welchen die elliptischen Leitlinien angenommen wurden, proportional und ist unabhängig von der Grösse der verticalen Halbaxe b.

Daraus folgt, dass man die horizontale Projection einer Erzeugenden erhält, wenn man die entsprechenden Grundrissseiten proportional in zwei Theile theilt, so dass die grösseren oder kleineren Theile derselben Grundrissseite anliegen, und die Theilpunkte durch eine Gerade verbindet. Das Theilen geschieht auf einfache Weise wie folgt:

Wählt man m' als einen Punkt der $A'B'$, durch welchen die horizontale Projection einer Erzeugenden gehen soll, so wird $n'B' = m'A'$ gemacht, $n'a$ parallel zur Diagonale $B'D'$ und ap' parallel zur anderen Diagonale $A'C'$ gezogen, wodurch sich der Punkt p' in $C'D'$ als ein zweiter Punkt der gesuchten Projection ergiebt. Denn es ist zufolge der Construction:

$$\frac{n'A'}{n'B'}=\frac{aA'}{aD'}=\frac{p'C'}{p'D'},$$

und da $n'B' = m'A'$, $n'A' = m'B'$ ist:

$$\frac{m'B'}{n'A'}=\frac{p'C'}{p'D'},$$

welches Resultat mit I) übereinstimmt.

Die einfachste Art, horizontale Projectionen von Erzeugenden zu construiren, besteht jedoch offenbar darin, dass man die Seiten $A'B'$ und $C'D'$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilt und die Theilpunkte entsprechend durch gerade Linien verbindet.

Es soll nun untersucht werden, nach welchen Richtungen geschnitten diese Fläche Ellipsen giebt.

Zieht man irgend eine Gerade RT so, dass

$$\frac{ST}{SR}=\frac{m'B'}{m'A'}$$

wird, wenn S den Durchschnittspunkt von RT mit der horizontalen Projection irgend einer Erzeugenden $m'p'$ bezeichnet, halbirt RT in N und setzt:

$$RN=NT=A,$$
$$SN=x,$$
$$A'M'=M'B'=a,$$
$$m'M'=x',$$

so geht obige Gleichung über in folgende:

$$\frac{A+x}{A-x}=\frac{a+x'}{a-x'},$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{x}{A}=\frac{x'}{a}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{x'}{a}=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-y'^2},$$

wenn durch y' die Ordinate des Punktes m bezeichnet wird, also ist auch:

$$\alpha)\qquad \frac{x}{A}=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-y'^2}.$$

Die Ordinate in S ist ebenfalls gleich y', es besteht also, da $m'p'$ und somit auch S beliebig gewählt wurde, für alle Coordinaten x und y' des verticalen Schnittes RT der windschiefen Fläche die Gleichung α), welche eine Ellipse mit den Halbaxen A und b ausdrückt. Der Schnitt RT ist also unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{ST}{SR}=\frac{m'B'}{m'A'}$$

sei, eine Ellipse mit der horizontalen Axe RT und der verticalen $2b$. Wir wollen nun ermitteln, welche Lage RT haben muss, damit diese Gleichung erfüllt werde.

In dem Vierecke $ABCD$ (Fig. 2) seien AB und CD durch die Gerade mp in demselben Verhältnisse getheilt und ebenso AD und BC durch RT, so dass also:

$$\frac{mA}{mB}=\frac{pD}{pC}$$

und

$$\frac{RA}{RD}=\frac{TB}{TC}$$

ist. Verbindet man den Durchschnittspunkt E von mp und RT mit den Punkten A, R und D, zieht ferner die Linien CT, TG_1 und BH parallel zu mp, so wird die Verbindungslinie der Punkte F und H parallel zu AD, denn es ist:

$$\frac{ED}{EF}=\frac{pD}{pC}=\frac{mA}{mB}=\frac{EA}{EH}.$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke ADE und HFE folgt:

$$\frac{GH}{GF}=\frac{RA}{RD};$$

ferner weil CF, TG_1 und BH parallel sind:

$$\frac{G_1H}{G_1F}=\frac{TB}{TC}.$$

Aus letzteren zwei Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{GH}{GF}=\frac{G_1H}{G_1F},$$

d. h. die Punkte G und G_1 müssen zusammenfallen.

Die beiden Dreiecke RTG und RSE sind ähnlich, weil SE parallel zu TG ist und man hat daher:

$$\frac{SR}{ST}=\frac{ER}{EG}=\frac{EA}{EH}=\frac{mA}{mB}=\frac{pD}{pC}.$$

Die Linie RT wird also durch mp in demselben Verhältnisse getheilt, als AB und CD von mp getheilt werden, wenn RT die beiden anderen gegenüberliegenden Vierecksseiten proportional theilt.

Auf dieselbe Art lässt sich auch beweisen, dass mp von RT in demselben Verhältnisse getheilt wird, als RT die Seiten AD und BC theilt. Da nun mp und RT beliebig gewählt wurden, so gilt folgender Satz:

> Zieht man innerhalb eines Viereckes zwei Transversalen, welche je zwei gegenüberliegende Seiten proportional theilen, so dass die grösseren oder kleineren Stücke derselben Vierecksseite anliegen, so theilt auch jede Transversale die andere in demselben Verhältnisse, in welchem sie die gegenüberliegenden Vierecksseiten theilt.

Die Gerade RT (Fig. 1), für welche

$$\frac{ST}{SR}=\frac{m'B'}{m'A'}$$

wird und die zugleich die horizontale Trace einer verticalen Ebene sein soll, deren Schnitt mit der windschiefen Fläche eine Ellipse giebt, muss demnach die Widerlagslinien proportional theilen. Es lässt sich also der Satz aufstellen:

> Die windschiefe Gewölbform wird durch jede verticale Ebene, welche die beiden Widerlagslinien proportional theilt, so dass die grösseren oder kleineren Theile an demselben Stirnbogen liegen, nach einer Ellipse geschnitten, welche dieselbe verticale Axe hat wie die Stirnbögen und deren horizontale Axe die Verbindungslinie der Theilpunkte ist.

Dieser Satz ist bei der Ausführung des Lehrgerüstes von Wichtigkeit, denn er giebt an, nach welchen Richtungen die Gewölbform elliptische Lehrbögen zulässt und welche Axen diese Bögen haben müssen. Am einfachsten erhält man diese Richtungen, indem man die Widerlagslinien in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilt und die Theilpunkte entsprechend verbindet.

Sollen keine halben Ellipsen, sondern andere Ellipsensegmente als Leitlinien oder Stirnbögen benützt werden, so braucht man nur die verticalen Axen dieser Leitlinien gleich gross und in der Mitte zwischen den Anlaufspunkten der Stirnbögen anzunehmen, um bei der Construction der Erzeugenden in analoger Weise verfahren zu können, als wären die Leitlinien halbe Ellipsen. Denn denkt man sich die Gewölbform mit halben Ellipsen als Stirnbögen durch eine horizontale Ebene geschnitten und betrachtet die Durchschnittspunkte dieser Ebene mit den Stirnbögen als Anlaufspunkte, so ergiebt sich eine Gewölbform mit Ellipsensegmenten von gleicher Pfeilhöhe als Stirnbögen, welche aus derselben Fläche besteht, wie jene mit halben Ellipsen.

2. Eine Gewölbform, bei welcher alle vier Stirnbögen halbe Ellipsen mit gleich grosser verticaler Axe sind.

Nimmt man den Stirnbogen über einer Grundrissseite $A'D'$ (Fig. 3) als eine halbe Ellipse mit verticaler Halbaxe von der Länge b an und betrachtet denselben als Leitlinie für einen zweiten halben elliptischen Bogen mit constanter verticaler Halbaxe von derselben Länge b, dessen horizontale Projection in allen Lagen die Grundrissseiten $A'D'$ und $B'C'$ proportional theilt, so dass die grösseren oder kleineren Stücke derselben Grundrissseite anliegen, so ergiebt sich eine sehr zweckmässige Gewölbform mit vier elliptischen Stirnbögen von gleicher Pfeilhöhe.

Schon zufolge des Entstehungsgesetzes der Gewölbform sind die Stirnbögen AB und CD halbe Ellipsen mit verticalen Halbaxen von der Länge b, denn sie bilden zwei Lagen der erzeugenden Ellipse. Es soll nun bewiesen werden, dass auch der vierte Stirnbogen BC eine halbe Ellipse mit der verticalen Halbaxe b sein muss.

Zufolge des Entstehungsgesetzes der Gewölbform sind je zwei Punkte k und e der Stirnbögen AD und BC gleich hoch, wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$\frac{k'A'}{k'D'} = \frac{e'B'}{e'C'}.$$

Ist also die Ordinate von k im Stirnbogen AD gleich y, so muss auch jene von e im Stirnbogen BC gleich y sein, vorausgesetzt, dass man die horizontalen Axen dieser Bögen als Abscissenaxen ansieht. Die Gleichung des Stirnbogens AD ist:

$$\frac{x}{a}=\frac{1}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

wenn $a=A'H'=\frac{A'D'}{2}$ angenommen wird.

Aus obiger Gleichung folgt:

$$\frac{k'A'}{A'D'}=\frac{e'B'}{B'C'}$$

und wenn man

$$H'k'=x,\quad B'F'=\frac{B'C'}{2}=a_1,\quad F'e'=x'$$

setzt,

$$\frac{a-x}{2a}=\frac{a_1-x'}{2a_1},$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'}=\frac{1}{b}\sqrt{b-y^2}.$$

Da nun x' und y die Coordinaten des Punktes e im Stirnbogen BC sind, so muss dieser letztere eine Ellipse mit den Halbaxen a_1 und b sein.

Es sind also alle vier Stirnbögen dieser Gewölbform halbe Ellipsen mit gleich grosser verticaler Axe, der Grundriss mag was immer für eine vierseitige Figur sein.

Mit allen verticalen Ebenen, welche AD' und $B'C'$ proportional so theilen, dass die grösseren oder kleineren Theile derselben Grundrissseite anliegen, giebt diese Gewölbform halbe Ellipsen mit verticaler Halbaxe b zum Schnitte, denn diese Schnitte sind ja einzelne Lagen der erzeugenden halben Ellipse. Es sind aber auch alle Schnitte, welche die zwei anderen Grundrissseiten so theilen, halbe Ellipsen mit derselben verticalen Axe, wie aus Folgendem klar wird.

Es sei $k'e'$ die horizontale Projection einer beliebigen Lage der erzeugenden halben Ellipse und $c'h'$ die horizontale Trace einer verticalen Ebene, welche $A'B'$ und $C'D'$ so schneidet, dass

$$\frac{c'A'}{c'B'}=\frac{h'D'}{h'C'}$$

wird. Der Durchschnittspunkt von $k'e'$ und $c'h'$ heisse p'. Aus dem oben aufgestellten Satze über die Transversalen des Viereckes folgt unter den hier gemachten Voraussetzungen:

$$\frac{k'A'}{k'D'}=\frac{p'c'}{p'h'},$$

der

$$\frac{k'A'}{A'D'}=\frac{p'c'}{c'h'}.$$

Denkt man sich $c'h'$ in m halbirt und setzt wieder $H'k' = x$, $mp' = x'$, $A'H' = a$ und $mc' = A$, ferner die Ordinaten von k und p beziehungsweise gleich y und y', so hat man:

$$\frac{a-x}{2a} = \frac{A-x'}{2A},$$

woraus folgt:

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{A} = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - y^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet y die Ordinate des Punktes k im Stirnbogen AD. Um die Gleichung des Schnittes ch zu bekommen, muss in obiger Gleichung die Ordinate y durch y' ausgedrückt werden. Ist die Ordinate des Punktes c gleich δ, so wird mit Rücksicht auf das Entstehungsgesetz der Gewölbsform

$$y = y' - \delta.$$

Die Gleichung des Schnittes ch ist also:

$$\frac{x'}{A} = \frac{1}{b}\sqrt{b^2 - (y' - \delta)^2}.$$

Der Schnitt ist somit ebenfalls eine halbe Ellipse mit der verticalen Halbaxe b und der horizontalen Axe $c'h'$. Es lässt sich nun folgender Satz aufstellen:

> Jede verticale Ebene, welche zwei gegenüberliegende Seiten des Grundrisses proportional theilt, so dass die grösseren oder kleineren Stücke derselben Grundrissseite anliegen, giebt mit dieser Gewölbform eine halbe Ellipse als Schnitt, deren verticale Halbaxe der gleichnamigen Halbaxe der Stirnbögen gleich ist.

Der Fall, in welchem die Stirnbögen keine halben Ellipsen, sondern andere Ellipsensegmente mit gleich grosser Pfeilhöhe sind, unterscheidet sich von dem eben behandelten nur dadurch, dass die Ebene der Anlaufspunkte nicht auch die horizontalen Axen der Stirnbögen enthält, sondern höher als diese Axen liegt, ein Unterschied, welcher keine Aenderung in der Natur der Fläche bedingt, von der die Gewölbform gebildet wird.

3. Die von zwei Conoiden gebildete Kreuzgewölbform.

Es seien die Stirnbögen AB und AD (Fig. 4) Ellipsen mit gleichen verticalen Halbaxen b und sie sollen zugleich die Leitlinien der beiden geraden Conoide mit horizontaler Richtebene sein, welche in ihrer Verbindung die Kreuzgewölbform bilden. Sind P und Q die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegender Grundrissseiten, so müssen offenbar die geraden Leitlinien der Conoide durch je einen dieser Punkte hindurchgehen. Ferner werden die geraden Leitlinien vertical stehen müssen, nachdem wir gerade Conoide mit horizontaler Richtebene angenommen haben.

Die Stirnbögen BC und CD sind, wenn der Grundriss ein beliebiges unregelmässiges Viereck ist, im Allgemeinen keine Ellipsen, sondern Curven höherer Ordnung, da, wie bekannt, Conoide wie wir sie vorausgesetzt haben, nur nach einer Richtung elliptische ebene Schnitte geben.

Wenn die Richtung der gegenüberliegenden Grundrissseiten nicht allzusehr von einander abweicht, so ist auch die Form dieser nicht elliptischen Stirnbögen nicht sehr verschieden von der Form der Ellipse und immerhin noch praktisch verwendbar.

Eine besondere Beachtung verdienen die Gratbögen und deren horizontale Projection. Diese Bögen kommen durch die Durchdringung der beiden Conoide zu Stande und einzelne Punkte derselben ergeben sich im Durchschnitte zweier gleich hoch gelegener Erzeugenden der genannten Flächen.

Um die Grundrisse zweier solcher Erzeugenden zu finden, hat man nur $A'B'$ und $A'D'$ z. B. in den Punkten m' und p' proportional zu theilen, so dass

$$\frac{A'm'}{A'p'} = \frac{A'B'}{A'D'}$$

wird, und die Punkte m' und p' beziehungsweise mit Q und P zu verbinden. Der Durchschnitt von $m'Q$ und $p'P$ ist die horizontale Projection eines Punktes, der in dem von A ausgehenden Gratbogen liegt. Die verticale Projection desselben Punktes wird durch die Höhe der Punkte m und p bestimmt. — Dass letztere Punkte wirklich in derselben Höhe liegen, also die durch sie gezogenen Erzeugenden der Conoide sich schneiden müssen, lässt sich mit Zuhilfenahme der Gleichungen der elliptischen Leitlinien auf einfache Art nachweisen.

Theilt man also $A'B'$ und $A'D'$ proportional — am einfachsten in eine gleiche Anzahl gleicher Theile — und verbindet die Theilpunkte von $A'B'$ mit Q und jene von $A'D'$ mit P, so sind die Verbindungslinien horizontale Projectionen von Erzeugenden, deren entsprechende Durchschnittspunkte den Gratbögen angehören. Daraus folgt: Die horizontalen Projectionen der Gratbögen sind von der verticalen Halbaxe der elliptischen Leitlinien unabhängig.

Die Bestimmung der verticalen Projection der Gratbögen ist sehr einfach und besteht in der Aufsuchung der Punkte, in welchen sich die verticalen Projectionen der Erzeugenden mit den projicirenden Geraden schneiden.

Es soll nun untersucht werden, welcher Art die Curven sind, die man als horizontale Projectionen der Gratbögen erhält. Dazu benöthigen wir die Gleichungen dieser Curven.

Der Punkt E (Fig. 5), welcher die Seite AB des Grundrisses $ABCD$ halbirt, sei der Ursprung des Coordinatensystems, EP die Axe der x und die Ebene der Anlaufspunkte $ABCD$ sei zugleich die Ebene der xy. Setzen

wir $AE = EB = a$, die verticalen Halbaxen der elliptischen Leitlinien gleich b und die Coordinaten von Q gleich α und β, so ist:

$$1)\qquad \frac{1}{a^2}\left[\frac{\alpha y-\beta x}{\beta-y}\right]^2+\frac{z^2}{b^2}=1$$

die Gleichung des Conoides ABQ.

Für das zweite Conoid nehmen wir der Allgemeinheit wegen nicht AD, sondern eine beliebige andere, elliptische Leitlinie GH an.

Ist

$$FG = FH = a_1,\quad EG = \delta,\quad EP = \alpha_1$$

und der Winkel $PGH = \omega$, so wird:

$$2)\qquad \frac{1}{a_1^2 \cos\omega^2}\left[\frac{\delta\,.\,tang\,\omega\,(x-\alpha_1)-\alpha_1 y}{tang\,\omega\,(x-\alpha_1)-y}-a_1\cos\omega-\delta\right]^2+\frac{z^2}{b^2}=1$$

die Gleichung des zweiten Conoides GHP.

Durch Elimination von z aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man die Gleichung der horizontalen Projection des Schnittes beider Conoide. Bei dieser Elimination fällt auch b hinaus, wodurch der oben aufgestellte Satz gerechtfertigt erscheint.

Die Gleichung der horizontalen Projection des Schnittes ist:

$$\frac{1}{a_1\cos\omega}\left[\frac{\delta\,tang\,\omega\,(x-\alpha_1)-\alpha_1 y}{tang\,\omega\,(x-\alpha_1)-y}-a_1\cos\omega-\delta\right]=\pm\frac{\alpha y-\beta x}{a(\beta-y)}.$$

Dieser Schnitt besteht demnach aus zwei Theilen; für den einen gilt das obere, für den anderen das untere Zeichen. Für das obere Zeichen hat man:

$$3)\qquad \left\{\begin{array}{l}[a(\delta-\alpha_1)-a_1(\alpha-a)\cos\omega]\,y^2+a_1[\beta\cos\omega+(\alpha-a)\sin\omega]\,xy\\ -a_1\beta\sin\omega\,x^2+[a\beta(\alpha_1-\delta)-a_1\alpha_1(\alpha-a)\sin\omega-a\alpha_1\beta\cos\omega]\,y\\ +a_1\beta\sin\omega(\alpha_1+a)\,x-a\,a_1\alpha_1\beta\sin\omega=0\end{array}\right.$$

und für das untere:

$$4)\qquad \left\{\begin{array}{l}[a(\alpha_1-\delta)-a_1(\alpha+a)\cos\omega]\,y^2+a_1[\beta\cos\omega+(\alpha+a)\sin\omega]\,xy\\ -a_1\beta\sin\omega\,x^2-[a\beta(\alpha_1-\delta)+a_1\alpha_1(\alpha+a)\sin\omega-a\,a_1\beta\cos\omega]\,y\\ +a_1\beta\sin\omega(\alpha_1+a)\,x+a\,a_1\alpha_1\beta\sin\omega=0.\end{array}\right.$$

Diese Gleichungen sind vom zweiten Grade, mithin sind die horizontalen Projectionen der Gratbögen Kegelschnittlinien, welche Gestalt auch der Grundriss haben mag.

Für $y=0$ wird x aus Gleichung 3) gleich $+a$, also geht der durch 3) ausgedrückte Schnitt durch den Punkt B, während der durch 4) ausgedrückte Schnitt durch A geht, weil die Werthe $y=0$ und $x=-a$ diese Gleichung erfüllen.

Für $y=\beta$ erhält man sowohl aus 3) als auch aus 4):

$$x_1=\alpha,\quad x_2=\beta\,cotang\,\omega-\alpha_1$$

und für $y=0$ aus 3):

$$x_1=+a,\quad x_2=\alpha_1,$$

aus 4):

$$x_1=-a,\quad x_2=\alpha_1.$$

Beide Schnitte haben also die drei Punkte:

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha_1 \\ y=0 \end{array}\right\} r, \quad \left.\begin{array}{l} x=\alpha \\ y=\beta \end{array}\right\} s, \quad \left.\begin{array}{l} x=\beta \, cotang \, \omega-\alpha_1 \\ y=\beta \end{array}\right\} t$$

gemeinschaftlich. r und s sind die Coordinaten der Punkte P und Q und t sind jene des Durchschnittes zweier Geraden, wovon die eine parallel zu AB durch Q und die andere parallel zu GH durch P gezogen wird. Dieser Durchschnittspunkt heisse R.

Es lässt sich nun beweisen, dass die horizontalen Projectionen beider Gratbögen niemals zugleich geradlinig werden können.

Da, wie gezeigt wurde, der eine Schnitt immer durch die Punkte A, P, Q, R geht und der andere durch die Punkte B, P, Q, R, und da ferner sowohl die ersteren als auch die letzteren vier Punkte bei einem trapezoidförmigen Grundrisse niemals in einer einzigen Geraden liegen können, so müsste die horizontale Projection des Schnittes, wenn sie geradlinig werden soll in zwei Gerade übergehen. Mehr als zwei Gerade können die Gleichungen 3) und 4) nicht bedeuten, weil sie nur vom zweiten Grade sind. Diese zwei Geraden müssten für den durch A gehenden Schnitt die Geraden AR und PQ und für den durch B gehenden die Geraden BR und PQ sein, da sich die Conoide nie in einer anderen Curve schneiden können, deren horizontale Projection andere Verbindungslinien der fünf Punkte, nämlich die Linien AQ, BQ, AP oder AQ wären. Wir haben also nur drei gerade Linien, AR, BR und PQ, in welche die horizontalen Projectionen der Schnitte übergehen können. Sollen beide Gratbögen geradlinige horizontale Projectionen haben, so müssten also zwei von den drei Linien AR, BR und PQ diese Projectionen bilden und zugleich Diagonalen des Grundrisses sein. Diese zwei Geraden sind AR und BR, weil PQ unter keiner Bedingung durch eine Ecke des Grundrisses gehen kann. So lange der Grundriss ein Trapezoid ist, erhält man nur einen Punkt R; dieser Punkt liegt immer ausserhalb des Grundrisses, daher können AR und BR niemals zugleich Diagonalen des Grundrisses bilden. Daraus folgt:

Die horizontalen Projectionen der Gratbögen können, so lange der Grundriss ein Trapezoid ist, niemals zugleich geradlinig werden, wenn die eine elliptische Leitlinie als Stirnbogen, die andere an irgend einer Stelle angenommen wird.

Wir wollen nun wieder unseren speciellen Fall (Fig. 4) betrachten, in welchem zwei Stirnbögen AB und AD die elliptischen Leitlinien sind.

Um die Gleichung der horizontalen Projectionen der Gratbögen zu erhalten, hat man nur statt δ_1-a und statt $tang\,\omega$, $\frac{\beta}{a+\alpha}$ in die Gleichungen 3) und 4) zu setzen, wodurch sich ergiebt:

$$3'\left\{\begin{array}{l}[a_1(a^2-\alpha^2)-a(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2-\beta^2}]\,y^2+2a_1\beta\alpha xy-a_1\beta^2x^2\\ +[a\beta(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}+a_1\alpha_1\beta(a-\alpha)-aa_1\beta(a+\alpha)]\,y\\ +a_1\beta^2(a+\alpha_1)x-aa_1\alpha_1\beta^2=0;\end{array}\right.$$

$$4'\left\{\begin{array}{l}[-a_1(a+\alpha_1)^2+a(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2-\beta^2}]\,y^2+2a_1\beta(a+\alpha)xy-a_1\beta^2x^2\\ -[a\beta(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}+a_1\alpha_1\beta(a+\alpha)-aa_1\beta(a+\alpha)]\,y\\ -a_1\beta^2(a-\alpha_1)\,x+aa_1\alpha_1\beta^2=0.\end{array}\right.$$

Untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen $3'$ und $4'$ eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ausdrücken. Es ergiebt sich, dass $3'$ eine dieser Curven bedeutet, je nachdem beziehungsweise

$$(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}-aa_1 \gtreqless 0$$

ist und $4'$, je nachdem

$$-(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}\gtreqless 0.$$

Man sieht, dass $3'$ für einen trapezoidförmigen Grundriss unter keiner Bedingung eine Parabel werden kann, da $a+\alpha_1>a$ und

$$\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}=A'Q$$

immer grösser als a_1, also

$$(a+\alpha')\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}>aa_1$$

ist. Auch $4'$ kann nie eine Parabel werden, weil weder $a+\alpha_1$ noch $\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}$ für einen trapezoidförmigen Grundriss gleich Null werden können. Sind $a+\alpha_1$ und $\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}$ gleichbezeichnet, so wird $3'$ immer eine Ellipse, weil dann $(a+\alpha_1)\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}-aa_1$ positiv ist; sind diese beiden Werthe aber ungleich bezeichnet, so wird $3'$ eine Hyperbel. Bei $4'$ ist gerade das Umgekehrte der Fall. Aus dieser Untersuchung folgt mithin:

> Die horizontalen Projectionen der Gratbögen können, wenn sie nicht geradlinig oder kreisförmig sind, nur elliptische oder hyperbolische Bögen sein, doch werden nie beide zugleich elliptisch oder beide zugleich hyperbolisch.

Bemerkenswerth ist noch, dass für $\alpha=0$ die Axen des Kegelschnittes $3'$ und für $\alpha=-a$ die Axen des Schnittes $4'$ parallel zu den Coordinatenaxen werden, weil dann das Glied mit xy in diesen Gleichungen verschwindet.

Zieht man in Figur 4 durch P eine Parallele zu $A'D'$, so schneidet dieselbe die durch Q parallel zu $A'B'$ gezogene Gerade in einem Punkte R, welcher, wie oben bewiesen wurde, beiden Schnitten $3'$ und $4'$ angehören muss. Die Linien PB' und QR sind also Sehnen der horizontalen Projection des durch B' gehenden Gratbogens, weil auch P und Q in dieser Projection liegen müssen, und da PB' und QR parallel sind, so ist die Linie cd, welche PB' und QR in den Punkten c und d halbirt, ein Durchmesser dieser Projection. cd ist parallel zu EQ, weil

$$E'c = a + \frac{\alpha_1 - a}{2} = \frac{a+\alpha}{2}$$

und

$$Qd = \frac{QR}{2} = \frac{a+\alpha}{2},$$

also

$$E'c = Qd$$

ist. $E'Q$ schneidet die horizontalen Projectionen beider Gratbögen in S', folglich ist $S'Q$ eine Sehne des Kegelschnittes 3′, welche zu dem die parallelen Sehnen PB' und QR halbirenden Durchmesser cd parallel ist. Halbirt man also $S'Q$ in g und zieht gM parallel zu $A'B'$, so geben gM und cd die Lage zweier conjugirter Durchmesser der horizontalen Projection des durch B' gehenden Gratbogens an und der Mittelpunkt dieser Projection ist der Durchschnittspunkt M von gM mit cd.

Auf analoge Weise lässt sich zeigen, dass, wenn man $A'P$ in f und $A'Q$ in h halbirt und hM_1 parallel zu $A'B'$ zieht, die Linien hM_1 und fM_1 die Lagen zweier conjugirter Durchmesser der horizontalen Projection des durch A' gehenden Gratbogens angeben. Der Mittelpunkt dieser Projection ist der Durchschnittspunkt M_1 von hM_1 und fM_1.

Wird $\alpha = 0$, so stehen gM und cM senkrecht auf einander und gehen daher in Axen des Schnittes 3′ über. Ist $\alpha = -a$, so werden hM_1 und fM_1 aus demselben Grunde Axen des Schnittes 4′.

Man hat nun für die horizontalen Projectionen eines jeden Gratbogens zwei Punkte und die Lagen zweier conjugirter Durchmesser gegeben, aus welchen Angaben allein der entsprechende Kegelschnitt sich immer einfach construiren lässt. Die horizontalen Projectionen der Gratbögen können somit auch construirt werden, ohne dass man die Erzeugenden der Conoide zu suchen braucht.

Es dürfte von Interesse sein zu erfahren, unter welchen Bedingungen die horizontalen Projectionen der Gratbögen gerade Linien oder Kreisbögen werden.

Dass für einen trapezoidförmigen Grundriss nicht beide zugleich geradlinig werden können, wurde schon nachgewiesen, ebenso dass jede geradlinige Projection durch R gehen muss. Die horizontalen Projectionen der Gratbögen AC oder BD werden somit nur dann geradlinig, wenn beziehungsweise die Diagonalen $A'C'$ oder $B'D'$ durch R gehen, was nur möglich ist, sobald die Proportionen bestehen:

$$A'B' : A'D' = A'P : A'Q$$

oder

$$A'B' : A'D' = B'P : A'Q.$$

Diese Proportionen kann man auch schreiben:

$$a : a_1 = a + \alpha_1 : \sqrt{(a+\alpha)^2 + \beta^2},$$
$$a : a_1 = \alpha_1 - a : \sqrt{(a+\alpha)^2 + \beta^2}.$$

Die Gleichungen 3′ und 4′ können nur dann Kreise ausdrücken, wenn das Glied mit xy verschwindet und die Coefficienten von x^2 und y^2 einander gleich werden. Dies ist in 3′ nur dann der Fall, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \frac{a+\alpha_1}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}} &= \frac{a}{a_1} \end{aligned}\right\}$$

und in 4′, wenn:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -a \\ \frac{a+\alpha_1}{\beta} &= \frac{-a_1}{a} \end{aligned}\right\}$$

wird. Man sieht daraus, dass beide Gratbögen nie zugleich Kreisbögen als horizontale Projectionen haben können, weil a nicht gleich Null werden kann, also die Gleichungen $\alpha = 0$ und $\alpha = -a$ nie zugleich zu erfüllen sind.

Wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, unter denen die horizontale Projection eines Gratbogens ein Kreis und jene des zweiten eine Gerade wird.

Soll 3′ eine Gerade und 4′ ein Kreis sein, so müssen die Gleichungen erfüllt werden:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\alpha' - \alpha'}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}},$$
$$\alpha = -a,$$
$$\frac{a+\alpha_1}{\beta} = \frac{-a_1}{a},$$

aus denen folgt:

$$\alpha = -a,$$
$$\frac{a_1}{a} = \frac{-(a+\alpha_1)}{\beta},$$
$$\beta^2 = (a+\alpha_1)(\alpha_1 - a),$$

welchen Gleichungen in Fig. 6 Genüge geleistet wurde, daher ist in dieser Figur die horizontale Projection des durch B gehenden Gratbogens eine Gerade und jene des durch A gehenden ein Kreisbogen. Es wurde nämlich Winkel $B'A'Q = 90^0$ gemacht, zwischen $B'P\,(=a+\alpha_1)$ und $A'P\,(=\alpha_1 - a)$ die mittlere geometrische Proportionale Pk gesucht und $PR\,(=\beta)$ gleich Pk angenommen.

Soll 4′ eine Gerade und 3′ ein Kreis sein, so müssen die Gleichungen erfüllt werden:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{a+\alpha_1}{\sqrt{(a+\alpha)^2+\beta^2}},$$

$$\alpha = 0,$$
$$\frac{a_1}{a} = \frac{a + \alpha_1}{\sqrt{(a+\alpha)^2 + \beta^2}},$$

aus welchen folgt:

$$\alpha = 0, \quad a = a_1, \quad a + \alpha_1 = \sqrt{a^2 + \beta^2}.$$

Diesen Gleichungen wurde in Fig. 7 entsprochen. Es wurde nämlich Q in einer auf $A'B'$ senkrechten Geraden angenommen, wodurch $\alpha = 0$ wird, dann wurde $A'P = A'Q$ und $A'B' = A'D'$ gemacht, wodurch die beiden letzteren Gleichungen erfüllt werden. Es lässt sich einfach zeigen, dass in dem so entstehenden Grundrisse $A'B'C'D'$ auch $B'C' = C'D'$ und $A'C' = A'B' = A'D'$ sein muss. Der Grundriss ist demnach ein Deltoid, welches durch jede seiner Diagonalen in zwei gleichschenklige Dreiecke getheilt wird.

Wenn die elliptischen Leitlinien nicht zugleich Stirnbögen sind, dürfte es am zweckmässigsten sein, diese Linien so anzunehmen, dass deren horizontale Projectionen $E'G'$ und $F'H'$ (Fig. 8) verlängert durch die entsprechenden Durchschnittspunkte Q und P der gegenüberliegenden Grundrissseiten gehen und sich gegenseitig in ihrem Durchschnittspunkte S' halbiren, weil dann die Stirnbögen nicht allzusehr von der elliptischen Form abweichen. Durch zwei fehlerzeigende Curven wird S' wohl am einfachsten gefunden. Diese Curven ergeben sich, wenn man von P und Q aus beliebige (von S' nicht zu sehr entfernte) Gerade zieht und die Halbirungspunkte der zwischen den Grundrissseiten gelegenen Stücke durch eine stetige Curve verbindet. Der Durchschnittspunkt beider so erhaltener Curven ist S'. Da die fehlerzeigenden Curven sich der geraden Linie sehr nähern, so genügt es, von jeder derselben nur zwei bis drei Punkte zu bestimmen.

Die Construction der Stirn- sowie der Gratbögen ist hier ganz analog derjenigen des ersteren Falles.

Von Interesse dürfte es sein, wie dort die horizontalen Projectionen der Gratbögen zu untersuchen.

Es sei der Punkt S' der Ursprung, $S'P$ die Axe der x und die Ebene der Anlaufspunkte sei die Ebene der xy. Als Leitlinien nehmen wir wieder halbe Ellipsen, deren horizontale Axen $E'G'$ und $F'H'$ in der Anlaufsebene liegen und deren verticale Axe gleich gross ist. Letztere Axe sei gleich $2b$, ferner sei $S'H' = S'F' = q$, $S'E' = S'G' = a_1$, $S'P = \alpha_1$ und die Coordinaten von Q seien α und β.

Unter diesen Voraussetzungen ist:

$$1) \qquad \frac{1}{a^2}\left[\frac{\alpha y - \beta x}{\beta - y}\right]^2 + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung des Conoides ABQ und

2) $$\frac{\alpha_1^2(\alpha^2+\beta^2)y^2}{a_1^2\alpha^2\left[y-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha_1)\right]^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

die Gleichung des zweiten Conoides ADP.

Durch Elimination von z aus 1 und 2 ergiebt sich die Gleichung der horizontalen Projection des Schnittes beider Conoide. Bei dieser Elimination fällt auch b hinaus, es ist daher die horizontale Projection der Gratbögen von der verticalen Halbaxe b der elliptischen Leitlinien auch in diesem Falle unabhängig.

Die Gleichung dieser Projectionen ist:

$$\frac{\alpha_1 y\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{a_1\alpha\left[y-\frac{\beta}{\alpha}(x-\alpha_1)\right]}=\pm\frac{\alpha y-\beta x}{a(\beta-y)}.$$

Der Schnitt besteht also aus zwei Theilen; für das obere Zeichen hat man

3) $$\begin{aligned}&[a_1\alpha^2+a\alpha_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]\,y^2-2a_1\alpha\beta xy+a_1\beta^2x^2\\&+\alpha_1\beta[a_1\alpha-a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]y-a_1\alpha_1\beta^2x=0,\end{aligned}$$

für das untere Zeichen:

$$\begin{aligned}&[a_1\alpha^2-a\alpha_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]y^2-2a_1\alpha\beta xy+a_1\beta^2x^2\\&+\alpha_1\beta[a_1\alpha+a\sqrt{\alpha^2+\beta^2}]y-a_1\alpha_1\beta^2x=0.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind vom zweiten Grade, daher werden die horizontalen Projectionen der Gratbögen ebenfalls Kegelschnittslinien.

Für $y=0$ wird sowohl aus 3) wie aus 4):

$$x_1=0,\quad x_2=\alpha_1$$

und für $y=\beta$ ebenfalls aus beiden Gleichungen

$$x_1=\alpha;\quad x_2=\alpha+\alpha_1.$$

Die horizontalen Projectionen der Gratbögen haben also die vier Punkte

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=\alpha_1\\y=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=\alpha\\y=\beta\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=\alpha+\alpha_1\\y=\beta\end{matrix}\right\}$$

gemeinschaftlich; diese Punkte sind S', P, Q und R. Der Punkt R liegt im Durchschnitte der Geraden QR, welche parallel zu $H'F'$ und der Geraden PR, welche parallel zu $E'G'$ gezogen wird. S', P, Q und R bilden daher die Eckpunkte eines Parallelogramms. Der Mittelpunkt M dieses Parallelogramms ist zugleich der Mittelpunkt der horizontalen Projectionen der beiden Gratbögen, denn er ist der Durchschnittspunkt der Linien cd und fg, welche die Lagen von zwei conjugirten Durchmessern angeben, da sie die Seiten des Parallelogramms, welche Sehnen der Kegelschnitte sind, halbiren.

Für $\alpha=0$ werden cd und fg parallel zu den Coordinatenaxen und geben dann die Lagen der Kegelschnitte an. Uebrigens folgt unmittelbar

aus den Gleichungen 3 und 4, dass für $\alpha=0$ die Axen dieser Curven parallel zu den Coordinatenaxen werden, weil für diesen Werth das Glied mit xy aus 3) und 4) verschwindet.

Da man nun die Lage zweier conjugirter Durchmesser und zwei Punkte der Kegelschnitte kennt, bei welchen Angaben ein Kegelschnitt immer construirt werden kann, so lassen sich die horizontalen Projectionen der Gratbögen, ohne dass man die Erzeugenden der Conoide aufzusuchen braucht, bestimmen.

Auf ganz analoge Weise, wie im früheren Falle, kann auch hier nachgewiesen werden, dass die horizontalen Projectionen der beiden Gratbögen, so lange der Grundriss ein Trapezoid ist, unter keiner Bedingung zugleich geradlinig werden können.

Ist die durch A' gehende Projection geradlinig, so findet man, dass die Gleichung bestehen muss:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{-\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

und wenn die durch B' gehende Projection eine Gerade ist,

$$\frac{a}{a_1}=\frac{+\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Der Ausdruck $4AC-B^2 \gtreqless 0$, welcher erkennen lässt, ob eine Gleichung vom zweiten Grade eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel bedeutet, wenn A der Coefficient von y^2, B jener von xy und C der Coefficient von x^2 ist, wird für die Gleichung 3):

$$a\alpha_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \gtreqless 0$$

und für die Gleichung 4):

$$-a\alpha_1\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \gtreqless 0,$$

woraus man sogleich erkennt, dass die horizontalen Projectionen beider Gratbögen unter keiner Bedingung zugleich Ellipsen oder zugleich Hyperbeln werden können.

Da keiner der zwei Werthe gleich Null werden kann, nachdem alle Glieder, aus denen sie bestehen, endliche Grössen sind, so ist es auch unmöglich, dass für einen trapezoidförmigen Grundriss eine dieser Projectionen parabolisch wird.

Die Gleichung 3) bedeutet einen Kreis, wenn die Gleichungen bestehen:

$$\alpha=0,\ \frac{a}{a_1}=\frac{\beta}{\alpha_1}.$$

Die Gleichung 4) drückt einen Kreis aus, sobald $\alpha=0$ und $\frac{-a}{a_1}=\frac{\beta}{\alpha_1}$ ist; daraus erkennt man, dass die horizontalen Projectionen beider Gratbögen nie zugleich Kreisbögen werden können.

Damit eine Projection ein Kreisbogen und die andere eine Gerade werde, müssen folgende Gleichungen bestehen. Entweder:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{-\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \alpha=0,\quad -\frac{a}{a_1}=\frac{\beta}{\alpha_1},$$

oder:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{+\alpha_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \alpha=0,\quad +\frac{a}{a_1}=\frac{\beta}{\alpha_1}.$$

Die ersteren, sowie die letzteren Gleichungen geben $\alpha=0$, $a=a_1$, $\alpha_1=\beta$. Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird immer die Projection eines Gratbogens eine Gerade und die des anderen ein Kreisbogen.

In Fig. 9 ist ein solcher Fall angenommen worden. Das Trapezoid geht hier in ein Deltoid über, in welchem zwei gegenüberliegende Winkel $A'B'C'$ und $A'D'C'$ rechte sind.

4. Eine Kreuzgewölbform, welche aus windschiefen Flächen mit einer horizontalen Richtebene und zwei elliptischen Leitlinien besteht.

Die Kreuzgewölbform für einen trapezoidförmigen Grundriss kann auch mit Vortheil aus jenen windschiefen Flächen gebildet werden, die bereits unter 2 behandelt wurden. Man erhält durch diese Zusammensetzung (Fig. 10) eine Kreuzgewölbform mit vier Stirnbögen, welche halbe Ellipsen mit gleichen verticalen Axen sind.

Diese Form kann ebenso einfach wie jene der aus Conoiden zusammengesetzten construirt werden und hat gegen letztere noch den Vorzug der Schönheit voraus, nachdem alle vier Stirnbögen bei derselben elliptisch sind.

Die Construction der einzelnen Erzeugenden geschieht auf dieselbe Weise wie bei der unter 2 behandelten Gewölbform, aus welcher die hier betrachtete Form besteht. Es erübrigt nunmehr die Construction der Gratbögen zu untersuchen. Man gelangt mittelst derselben Schlüsse, welche bei der aus Conoiden gebildeten Form gemacht wurden und mit Rücksicht auf den oben aufgestellten Satz über die Transversalen des Viereckes zu dem Resultate:

Theilt man alle vier Grundrissseiten in demselben Verhältnisse in zwei Theile, so dass die grösseren oder kleineren Stücke von je zwei gegenüberliegenden Seiten derselben Seite anliegen, so sind die entsprechenden Verbindungslinien der vier Theilpunkte horizontale Projectionen von Erzeugenden, die sich in einem Punkte der Gratbögen schneiden.

Daraus folgt unmittelbar:

Die horizontalen Projectionen der Gratbögen sind von der verticalen Halbaxe der Stirnbögen unabhängig.

Die Construction der horizontalen Projection der Gratbögen besteht in der Bestimmung einzelner Punkte dieser Projection nach obigem Satze. Am einfachsten ist es dabei, die vier Grundrissseiten in dieselbe Anzahl gleicher Theile zu theilen. Die verticalen Projectionen werden so wie bei der aus Conoiden gebildeten Kreuzgewölbform bestimmt.

Es dürfte, wie bei der vorhergehenden Form, angezeigt sein, die horizontalen Projectionen der Gratbögen analytisch näher zu untersuchen.

Wir nehmen wieder E' (Fig. 10) als Ursprung, $E'B'$ als Axe der x und die Ebene der Anlaufspunkte als Ebene der xy an. Die verticale Halbaxe der Stirnbögen sei b, ferner setzen wir $E'A'=E'B'=a$, $G'C'=G'D'=a_1$, $H'A'=H'D'=c$, $F'B'=F'C'=c_1$. Die Coordinaten von G' seien $x=\alpha$, $y=\beta$, von P, in welchem Punkte $A'B'$ und $C'D'$ sich schneiden, $x=\alpha_1$, $y=0$, und die Winkel $D'A'B'=\varphi$, $C'B'A'=\psi$, $D'PB'=\omega$.

Die horizontalen Projectionen aller Erzeugenden zusammen genommen, welche $A'B'$ und $C'D'$ proportional-theilen, wollen wir der Kürze wegen das System I und alle übrigen Erzeugenden zusammen genommen, welche $B'C'$ und $A'D'$ in demselben Verhältnisse theilen, das System II nennen.

$p'q'$ sei eine Linie aus dem Systeme I und $r's'$ eine Linie aus dem Systeme II und sie seien so gewählt, dass ihr Durchschnittspunkt $1'$ ein Punkt der horizontalen Projection des durch B' gehenden Gratbogens ist. Dieser Voraussetzung zufolge müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{p'B'}{p'A'}=\frac{q'C'}{q'D'}=\frac{r'A'}{r'D'}=\frac{s'B'}{s'C'},$$

oder auch, wenn $p'B'=m$ gesetzt wird:

$$\frac{m}{a}=\frac{q'C}{a_1}=\frac{r'A'}{c}=\frac{s'B'}{c_1}.$$

Aus letzteren Gleichungen erhält man:

$$q'C'=\frac{ma_1}{a},\quad r'A'=\frac{mc}{a},\quad s'B'=\frac{mc_1}{a}.$$

Setzt man noch der Kürze halber:

$$a_1'=-a_1\cos\omega,$$
$$c'=c\cos\varphi,$$
$$c_1'=c_1\cos\psi,$$

so sind die Coordinaten von p', q', r' und s' folgende:

$$\left.\begin{array}{l} x=a-m \\ y=0 \end{array}\right\}p',\quad \left.\begin{array}{l} x=\alpha+a_1'-\dfrac{ma_1'}{a} \\ y=-(\alpha_1-\alpha)\,tang\,\omega+\left(a_1'-\dfrac{ma_1'}{a}\right)tang\,\omega \end{array}\right\}q',$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-a+\dfrac{mc'}{a} \\ y=\dfrac{mc'}{a}\,tang\,\varphi \end{array}\right\}r',\quad \left.\begin{array}{l} x=a+\dfrac{mc_1'}{a} \\ y=\dfrac{mc_1'}{a}\,tang\,\psi \end{array}\right\}s'.$$

Demnach ist die Gleichung der $p'q'$ oder des Systemes I, wenn m veränderlich gedacht wird:

$$1)\qquad y = \frac{\left(\alpha_1 - \alpha - a_1' + \frac{m a_1'}{a}\right) tang\,\omega}{a - m - \alpha - a_1' + \frac{m a_1'}{a}}, -(x - a + m)$$

und die Gleichung der $r's'$ oder des Systemes II:

$$y - \frac{m c' \, tang\,\varphi}{a} = \frac{\frac{m}{a}(c' \, tang\,\varphi - c_1' \, tang\,\psi)}{\frac{m}{a}(c' - c_1') - 2a} \left(x + a - \frac{m c'}{a}\right),$$

oder weil:

$$c' = \frac{\alpha - a_1' - a}{2}, \quad c' \, tang\,\varphi = \frac{-(\alpha_1 - \alpha + a_1') \, tang\,\omega}{2},$$

$$c_1' = \frac{\alpha + a_1' - a}{2}, \quad c_1' \, tang\,\psi = \frac{-(\alpha_1 - \alpha - a_1') \, tang\,\omega}{2}$$

ist:

$$2)\quad y + \frac{\alpha_1 - \alpha + a_1'}{2} \, tang\,\omega = \frac{-\frac{a_1'}{a} m \, tang\,\omega}{m\left(1 - \frac{a_1'}{a}\right) - 2a} \quad x + a - \frac{m(\alpha - a_1' + a)}{2a}\Big].$$

Für alle Punkte 1' der horizontalen Projection des durch B gehenden Gratbogens müssen 1 und 2 zugleich bestehen, wobei m veränderlich gedacht wird. Da nun jeder Werth von m einem bestimmten Punkte 1' zugehört, so ergiebt sich durch Elimination von m aus 1 und 2 die Gleichung für alle Punkte 1', also die Gleichung der horizontalen Projection des durch B gehenden Gratbogens.

Die Elimination von m geschieht wohl am einfachsten, indem man aus 1 und aus 2 die Grösse m bestimmt und die so erhaltenen Werthe einander gleichsetzt.

Aus 1 erhält man:

$$3)\qquad m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

und aus 2:

$$4)\qquad m = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1},$$

wenn die Grössen A, B, C, A_1, B_1, C_1, folgende Werthe haben:

$$A = \frac{a_1'}{a} \, tang\,\omega,$$

$$B = (\alpha_1 - \alpha - a_1') \, tang\,\omega + \frac{a_1'(x - a)}{a} \, tang\,\omega + \left(1 - \frac{a_1'}{a}\right) y,$$

$$C = (x - a)(\alpha_1 - \alpha - a_1') \, tang\,\omega - (a - \alpha - a_1') \, y,$$

$$A_1 = \frac{tang\,\omega}{2a}\left[\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)\alpha_1-\alpha\right],$$

$$B_1 = -(\alpha_1-\alpha+a_1')\,tang\,\omega + \frac{a_1'(x-a)}{a}\,tang\,\omega + \left(1-\frac{a_1'}{a}\right)y,$$

$$C_1 = -2ay.$$

Entwickelt man nun B^2-4AC und $B_1^2-4A_1C_1$, so zeigt sich, dass diese beiden Ausdrücke einander gleich werden und zwar ist:

$$B^2-4AC = B_1^2-4A_1C_1 = \left(1-\frac{a_1'}{a}\right)^2 y^2 + \frac{2a_1'\,tang\,\omega}{a}\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)xy$$

$$+\frac{a_1'^2}{a^2}\,tang\,\omega^2.\,x^2 + 2\left[(\alpha_1-\alpha)\left(1-\frac{a_1'}{2}\right)-\frac{2a_1'\alpha}{a}\right]tang.\,\omega.\,y$$

$$-\frac{2a_1'}{a}\,tang\,\omega^2\,(\alpha_1-\alpha)\,x + (\alpha_1-\alpha)^2\,tang\,\omega.$$

Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, ist die Gleichung der die horizontalen Projectionen aller Erzeugenden beider Flächen umhüllenden Curve, wie sogleich gezeigt werden wird.

Die Gleichung 1) hat die Form:

$$a)\qquad y = \frac{P+Qm}{R+Sm}(x+a+m).$$

Setzt man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dm}$ aus dieser Gleichung gleich Null und eliminirt aus $\frac{dy}{dm}=0$ und a die Grösse m, so ergiebt sich die Gleichung jener Curve, welche alle durch a ausgedrückten Geraden berührt oder umhüllt, unter der Voraussetzung, dass m veränderlich gedacht wird. Man erhält:

$$\frac{dy}{dm} = \frac{Q(x+a+2m)-Sy+P}{R+Sm} = 0$$

und daraus:

$$b)\qquad m = \frac{Sy-Qx-Qa-P}{2Q}.$$

Aus a wird:

$$c)\qquad m = \frac{Sy-Qx-Qa-P \pm \sqrt{(Sy-Qx-Qa-P)^2-4Q(Px+Pa-Ry)}}{2Q}.$$

Setzt man nun die Werthe von m aus b und c einander gleich, so ergiebt sich die Gleichung der Curve, welche das System I umhüllt:

$$(Sy-Qx-Qa-P)^2-4Q(Px+Pa-Ry)=0.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung $B^2-4AC=0$, wie man aus 3 und c sieht.

Dass dieselbe Curve auch das System II umhüllt, wird aus Folgendem klar:

$$y+p = \frac{mq}{r+ms}(x+a+mt)$$

ist die Form der Gleichung 2), woraus man erhält:

$$\frac{dy}{dm} = \frac{q(x+a+2mt) - s(y+p)}{r+sm} = 0,$$

$$b') \qquad m = \frac{s(y+p) - q(x+a)}{2qt},$$

und

$$c') \quad m = \frac{s(y+p) - q(x+a) \pm \sqrt{[s(y+p)-q(x+a)]^2 - 4qt(y+p)}}{2qt}.$$

Werden nun die Werthe von m aus b' und c' gleichgesetzt, so ergiebt sich die Gleichung der das System II umhüllenden Curve:

$$[s(y+p)-q(x+a)]^2 - 4qt(y+p) = 0,$$

welche Gleichung identisch ist mit der Gleichung $B_1^2 - 4A_1C_1 = 0$, wie man aus 4 und c_1 sieht; und da $B^2 - 4AC = B_1^2 - 4A_1C_1$ ist, so werden beide Systeme I und II von einer einzigen Curve umhüllt, wie oben behauptet wurde.

Die Gleichung der die horizontalen Projectionen aller Erzeugenden beider Flächen umhüllenden Curve ist demnach:

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)^2 y^2 + \frac{2a_1'}{a} \tan\omega \left(1-\frac{a_1'}{a}\right) xy + \frac{a_1'^2}{a^2} \tan\omega^2 . x^2 \\ 5) \quad &+ 2\left[(\alpha_1-\alpha)\left(1-\frac{a_1'}{a}\right) - \frac{2a_1'\alpha}{a}\right] \tan\omega . y - \frac{2a_1'}{a} \tan\omega^2 (\alpha_1-\alpha)\, x \\ &+ (\alpha_1-\alpha)^2 \tan\omega = 0. \end{aligned}$$

Diese umhüllende Curve wird immer eine Parabel sein, so lange der Grundriss trapezoidförmig ist, da Gleichung 5) in diesem Falle stets vom zweiten Grade und das Quadrat des Coefficienten von xy immer dem vierfachen Producte der Coefficienten von y^2 und x^2 gleich ist.

Wenn $My^2 + Nxy + Px^2 + Qy + Rx + S = 0$ einen Kegelschnitt ausdrückt und v ist der Winkel, den eine Hauptaxe dieses Schnittes mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, so wird bekanntlich:

$$\tan 2v = \frac{-N}{M-P}.$$

Ist also v der Winkel, den die Axe der umhüllenden Parabel mit der Linie $E'x$ (Fig. 10) einschliesst, so hat man:

$$\tan 2v = \frac{2\tan v}{1-\tan v^2} = \frac{-\frac{2a_1'}{a} \tan\omega \left(1-\frac{a_1'}{a}\right)}{\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)^2 - \frac{a_1'^2}{a^2}\tan\omega^2}$$

und daraus:

$$6) \qquad \tan v = -\frac{a_1'}{a-a_1'} \tan\omega = \frac{-a_1 \sin\omega}{a + a_1\cos\omega}.$$

Die Richtung dieser Axe kann somit leicht construirt werden.

Um die Gleichung der horizontalen Projection des durch B gehenden Gratbogens zu erhalten, setzen wir nun die Werthe von m aus 3) und 4) einander gleich und es ergiebt sich dadurch mit Rücksicht darauf, dass $B^2-4AC=B_1^2-4A_1C_1$ ist:

$$\pm B_1(B_1\mp B)\mp 4A_1C_1+2A_1C+2AC_1=0.$$

Behält man in dieser Gleichung die oberen Zeichen bei, so ist sie, wenn man für A, B, C, A_1, B_1, C_1 die Werthe setzt, nach x und y vom ersten Grade und kann daher mit diesen Zeichen nicht für alle Fälle der horizontalen Projection eines Gratbogens angehören. — Es würde zu weit führen, die Bedeutung der Gleichung mit den oberen Zeichen zu untersuchen. — Die Gleichung der horizontalen Projection des durch B gehenden Gratbogens ist somit:

$$7)\qquad -B_1(B_1+B)+4A_1C_1+2A_1C+2AC_1=0.$$

Die Glieder vom zweiten Grade sind:

$$2\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)y^2,\quad 4\frac{a_1'}{a}\,tang\,\omega\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)xy$$

und

$$2\frac{a_1'^2}{a^2}\,tang\,\omega^2.\,x^2,$$

aus denen man erkennt, dass die horizontale Projection des durch B gehenden Gratbogens ein parabolisches Segment ist.

Der Winkel v, den die Axe dieses Segmentes mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet, wird durch die Formel bestimmt:

$$tang\,2v=\frac{-\frac{4a_1'}{a}\,tang\,\omega\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)}{2\left(1-\frac{a_1'}{a}\right)^2-\frac{2a_1'^2}{a^2}\,tang\,\omega^2},$$

aus welcher folgt:

$$tang\,v=-\frac{a_1'}{a-a_1'}\,tang\,\omega=\frac{-a_1\sin\omega}{a+a_1\cos\omega}.$$

Dieses Resultat mit Gleichung 6) verglichen zeigt, dass die Axe dieses Parabelsegmentes und jene der umhüllenden Parabel parallel sind.

Um die Gleichung der horizontalen Projection des zweiten, durch A gehenden Gratbogens zu erhalten, hat man die Gleichungen der in einem Punkte $2'$ dieser Projection sich schneidenden Erzeugenden $p'q'$ und $r_1's_1'$ aufzustellen (Fig. 10) und aus diesen zwei Gleichungen m zu eliminiren. Da $r_1'D'=r'A'$, $s_1'C'=s'B'$, also $r_1'A'=2c-r'A'=2c-\frac{mc}{a}=(2a-m)\frac{c}{a}$ und $s_1'B'=2c_1-cB'=2c_1-\frac{mc_1}{a}=(2a-m)\frac{c_1}{a}$ ist, so braucht man, um die Gleichung der $r_1's_1'$ zu erhalten, in der Gleichung 2) der $r's'$ nur statt m $2a-m$ zu setzen.

Es ergeben sich demnach aus den Gleichungen der $p'q'$ und $r_1's_1'$ folgende Werthe von m:

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

$$m = 2a + \frac{B_1 \mp \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}}{2A_1},$$

welche, einander gleichgesetzt, die Gleichung der horizontalen Projection des durch A gehenden Gratbogens liefern. Diese Gleichung ist:

$$8) \quad B_1(B_1 + B) - 4A_1C_1 + 2A_1C + 2AC_1 + 4a(2aA + A_1B + AB) = 0,$$

in welcher A, B, C, A_1, B_1, C_1 die oben angeführten Werthe haben. Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung erhält man als Glieder mit den höchsten Potenzen von y und x:

$$2\left(1 - \frac{a_1'}{a}\right)^2 y^2, \quad 4\frac{a_1'}{a} \, tang\,\omega \left(1 - \frac{a_1'}{a}\right) xy$$

und

$$\frac{2a_1'^2}{a^2} \, tang\,\omega^2 . x^2,$$

welche mit jenen der Gleichung 7) identisch sind. Daraus folgt, mit Rücksicht auf die früheren Resultate:

> Die horizontalen Projectionen der beiden Gratbögen werden, so lange der Grundriss ein Trapezoid ist, stets parabolische Segmente, deren Axen parallel sind zur Axe der Parabel, welche die horizontalen Projectionen aller Erzeugenden beider Flächen umhüllt (Fig. 11).

Die Bestimmung einzelner Punkte der verlängerten parabolischen Segmente, welche Punkte ausserhalb des Grundrisses liegen, geschieht, indem man m negativ, oder auch grösser als $2a$ nimmt.

In Figur 11 wurden alle vier Grundrissseiten verlängert und auf denselben von den Eckpunkten aus die Länge der entsprechenden Seite mehrmals aufgetragen, also auf der verlängerten $A'B'$ die Länge $A'B'$ und auf der verlängerten $B'C'$ die Länge $B'C'$ u. s. w. Durch gehörige Verbindung der so erhaltenen Punkte, wie Fig 11 zeigt, ergab sich eine Reihe von Geraden, welche den Systemen I und II angehören.

Schliesslich soll noch bewiesen werden, dass wenigstens eine der Parabeln, deren Segmente Projectionen der Gratbögen sind, die umhüllende Parabel berührt. In Fig. 11 ist es die durch B gehende Parabel.

Wenn keine Berührung stattfände, so müssten sich die Curven entweder schneiden oder gar nicht treffen.

Schneiden können sie sich nicht, denn durch jeden Punkt a der horizontalen Projection eines Gratbogens müssen die horizontalen Projectionen zweier Erzeugenden gehen, welche eben durch ihren Durchschnitt den

Punkt a bestimmen, und da alle horizontalen Projectionen der Erzeugenden Tangenten an die umhüllende Parabel sind, so kann kein Punkt a innerhalb dieser letzteren Curve liegen.

Treffen müssen sie sich aber, denn sonst wäre es möglich, Tangenten an die umhüllende Parabel zu ziehen, welche keinen Punkt mit der durch B gehenden Parabel gemein haben, was nicht der Fall sein kann, wie aus Folgendem hervorgeht:

Jede Tangente T der umhüllenden Parabel wird, für einen entsprechenden Werth von m durch die Gleichung 1) ausgedrückt. Sieht man also 1 als die Gleichung von T an, bestimmt aus derselben die Grösse m und substituirt den so gefundenen Werth von m in die Gleichung 2), so erhält man die Gleichung einer Geraden T_1 des Systemes II, welche T in einem Punkte a der Parabel schneidet, deren Segment die horizontale Projection des durch B gehenden Gratbogens ist. Da nun für jede Tangente T die Grösse m reell ist, so muss es auch immer eine Gerade T_1 geben, welche die Tangente T in einem Punkte a der genannten Parabel schneidet. Es ist also nicht möglich, irgend eine Tangente T zu ziehen, welche keinen Punkt mit der durch B gehenden Parabel gemein hätte, woraus folgt, dass diese Parabel und die umhüllende sich treffen müssen.

Da, wie nun gezeigt wurde, diese Curven sich nicht schneiden können und doch treffen müssen, so können sie sich nur berühren.

V.

Ueber die einfachen Zahlensysteme.

Von

Dr. Georg Cantor

in Berlin.

---

§. 1. Das Problem, bei einem beliebig gegebenen Systeme

$$a, a', a'', \ldots$$

von positiven ganzen Zahlen zu bestimmen, wie oft sich eine Zahl n aus den Gliedern jenes Systemes durch Addition zusammensetzen lässt, ist durch Euler (*Introductio*, Abschnitt: *De partitione numerorum*) gleichsam des zahlentheoretischen Charakters entkleidet und als ein analytisches aufgefasst worden, bei welchem es sich darum handelt, ein unendliches Product in eine Potenzreihe zu verwandeln.

Jenes Zahlensystem kann so beschaffen sein, dass alle Glieder desselben von einander verschieden sind, es können aber auch darin mehrere Glieder, selbst in unendlicher Anzahl, einander gleich sein. Wir können uns daher das System so gegeben denken, dass die verschiedenen Glieder desselben der Grösse nach geordnet:

1) $$a, b, c, d, \ldots.$$

sind, und dass sie entsprechend in den Anzahlen:

2) $$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \ldots$$

vorkommen, wo

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \ldots$$

nicht bestimmte ganze Zahlen zu sein brauchen, sondern ausserdem noch das unendliche Vorkommen der entsprechenden Zahlen in 1) angeben können.

Man sagt nun: eine Zahl n wird in dem gegebenen Systeme dargestellt, wenn man n auf die Weise

$$n = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots$$

erhalten kann, wo α die Werthe:

$$0, 1, 2, \ldots \bar{a}$$

und allgemein die Zahl λ, welche ein beliebiges Glied l der Reihe 1) multiplicirt die Werthe:

$$0, 1, 2, \dots \bar{l}$$

annehmen darf.

Um die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer Zahl n in dem gegebenen Systeme zu finden, hat man nun nach Euler das Product:

$$(1+x^a+x^{2a}+\dots+x^{\bar{a}a})(1+x^b+x^{2b}+\dots+x^{\bar{b}b})\dots$$

in eine Potenzreihe:

$$1+C_1x^1+C_2x^2+C_3x^3+\dots$$

umzuwandeln. Die Zahl C_n stellt alsdann die gesuchte Anzahl vor, wie oft die Zahl n in dem gegebenen Systeme dargestellt werden kann.

Wir wollen dieses Euler'sche Partitionsproblem umkehren, indem wir fragen, welche Beschaffenheit das System haben muss, wenn die Zahlen C_1, C_2, C_3, ... gegeben sind und wollen hier zunächst den einfachsten Fall nehmen, wo C_1, C_2, C_3, ... alle gleich 1 sind. Demnach würde die Frage, welche wir hier behandeln, diese sein: Welches ist die Beschaffenheit eines Zahlensystemes, in welchem sich jede Zahl und jede nur auf eine einzige Weise darstellen lässt?

Die Zahlensysteme, welche die letzte Eigenschaft haben, verdienen vor allen übrigen ausgezeichnet zu werden; wir wollen sie einfache Zahlensysteme nennen. Unsere Aufgabe ist also keine andere, als zu bestimmen, welches die sämmtlichen einfachen Zahlensysteme sind; sie scheint mir deshalb nicht ohne Interesse, weil das verbreitetste aller Zahlensysteme, das dekadische, bei welchem die Reihen 1) und 2) diese sind:

1′) $1, 10, 100, 1000, 10000, \dots$

2′) $9, 9, 9, 9, 9, \dots,$

nebst sämmtlichen analogen, nämlich denjenigen, in welchen die Grundzahl nicht 10, sondern irgend eine andere Zahl ist, nur ganz specielle Fälle der allgemeinen einfachen Zahlensysteme bilden.

§. 2. Die Reihe 1), §. 1, besteht, um es zu wiederholen, aus den verschiedenen Zahlen des Systemes, ihrer Grösse nach geordnet, die Reihe 2), §. 1, aus den Anzahlen, wie oft die entsprechenden Zahlen in dem Systeme vorkommen. Soll das System ein einfaches sein, so muss man haben:

$$(1+x^a+x^{2a}+\dots+x^{\bar{a}a})(1+x^b+x^{2b}+\dots+x^{\bar{b}b})\dots=1+x+x^2+\dots,$$

oder anders:

$$1)\qquad \frac{1-x^{a(\bar{a}+1)}}{1-x^a}\cdot\frac{1-x^{b(\bar{b}+1)}}{1-x^b}\dots=\frac{1}{1-x}.$$

Da alle Zahlen, also auch die Einheit, sich im Systeme darstellen lassen, so muss die kleinste Zahl der Reihe 1), §. 1, die wir a genannt haben, die Einheit selbst sein.

Man hat alsdann:

$$(1-x^{\bar{a}+1})(1+x^b+\ldots)(1+x^c+\ldots)\ldots=1.$$

Bedenkt man, dass $b, c, \ldots$ grösser als die Einheit sind, und dass $b < c < d \ldots$, so sieht man, dass sich diese Gleichung weder mit der Annahme $\bar{a}+1 > b$, noch mit der Annahme $\bar{a}+1 < b$ verträgt; es muss also $\bar{a}+1 = b$ sein. Wir sehen hieraus, dass in einem einfachen Systeme die Einheit so oft vorkommt, als die um 1 verminderte nächstgrössere Zahl beträgt.

Durch Einführung dieses Resultates in 1) erhält man:

$$(1-x^{b(\bar{b}+1)})(1+x^c+\ldots)(1+x^d+\ldots)\ldots=1.$$

Diese Gleichung ist wiederum nur mit der Annahme:

$$b(\bar{b}+1)=c$$

verträglich, d. h.: in einem einfachen Zahlensysteme ist die drittgrösste Zahl theilbar durch die zweitgrösste und der Quotient aus der letzteren in die erstere um eins vermindert giebt die Anzahl, wie oft die zweitgrösste Zahl im Systeme vorkommt.

Setzen wir $\frac{c}{b}=b'$, so ist:

$$c=bb', \quad \bar{b}=b'-1,$$

und man hat nun die neue Gleichung:

$$(1-x^{c(\bar{c}+1)})(1+x^d+\ldots)(1+x^e+\ldots)\ldots=1,$$

aus welcher man ähnlich wie oben die Gleichung:

$$c(\bar{c}+1)=d$$

erschliesst.

Indem man diese Schlüsse wiederholt, erkennt man ganz allgemein, dass bei einem einfachen Systeme jede Zahl k der Reihe 1), §. 1, in der nächstgrösseren ohne Rest aufgeht und dass der entsprechende Quotient um 1 vermindert die Anzahl $\bar{k}$ giebt, wie oft die Zahl k im Systeme vorkommt.

Die Reihen 1) und 2) von §. 1 haben also bei einem einfachen Systeme die Gestalten:

2) $\qquad 1, b, bb', bb'b'', bb'b''b''', \ldots$

3) $\qquad b-1, b'-1, b''-1, b'''-1, b''''-1,$

wo:

4) $\qquad b, b', b'', b''', \ldots$

eine unendliche Reihe ganzer, von der Einheit verschiedener Zahlen ist. Es ist aber auch umgekehrt jedes Zahlensystem, wie das durch die Reihen 2), 3) definirte, ein einfaches; denn man hat:

$$(1+x+\ldots+x^{b-1})(1+x^b+\ldots+x^{(b'-1)b})\ldots$$
$$=\frac{1-x^b}{1-x}\cdot\frac{1-x^{bb'}}{1-x^b}\cdot\frac{1-x^{bb'b''}}{1-x^{bb'}}\ldots=\frac{1}{1-x},$$

also:

$$C_n=1.$$

Wir erhalten demnach das Resultat: die einfachen Zahlensysteme sind diejenigen, bei denen jede Zahl k in der nächstgrösseren l ohne Rest aufgeht und k so oft vorkommt als $\frac{l}{k}-1$ beträgt.

§. 3. Die einfachen Zahlensysteme haben eine weitergehende Bedeutung. Führt man ausser den ganzen Zahlen des Systemes noch die Brüche:

1) $$\frac{1}{b},\ \frac{1}{bb'},\ \frac{1}{bb'b''},\ \ldots$$

und zwar entsprechend in den Anzahlen:

2) $$b-1,\quad b'-1,\quad b''-1,\ \ldots$$

ein, so kann man in dem also erweiterten Zahlensysteme sämmtliche Zahlgrössen und jede nur auf eine einzige Weise durch Addition unendlich vieler Glieder des Systemes erhalten; d. h. wenn A eine beliebig gegebene Zahlengrösse ist, so hat man stets nur auf eine einzige Weise die Gleichung:

$$A=\alpha+\beta b+\gamma bb'+\delta bb'b''+\ldots+\frac{\lambda}{b}+\frac{\mu}{bb'}+\frac{\nu}{bb'b''}+\ldots,$$

in welcher die Reihe auf der rechten Seite unendlich ist und die Zahlen α, λ die Werthe $0, 1, 2, \ldots b-1$, die Zahlen β, μ die Werthe $0, 1, 2 \ldots b'-1$, die Zahlen γ, ν die Werthe $0, 1, 2, \ldots b''-1$ annehmen dürfen. Der ganzzahlige Theil:

$$A_0=\alpha+\beta b+\gamma bb'+\ldots$$

ist bestimmt durch die Bedingungen:

$$A>A_0;\quad A\leqq A_0+1,$$

die Zahl λ durch die Bedingungen:

$$(A-A_0)\,b>\lambda,\quad (A-A_0)\,b\leqq\lambda+1,$$

die Zahl μ durch die Bedingungen:

$$(A-A_0)\,bb'-\lambda b'>\mu,\quad (A-A_0)\,bb'-\lambda b'\leqq\mu+1$$

u. s. w.

§. 4. Wenn ein einfaches Zahlensystem die Beschaffenheit hat, dass bei beliebig gedachter Zahl q in der Reihe

$$1,\ b,\ bb',\ bb'b'',\ \ldots$$

von einem gewissen Gliede an, alle durch q theilbar sind, so lässt sich über die Darstellbarkeit eines rationalen Bruches $\frac{p}{q}$ das folgende Theorem aussagen:

Theorem: Ist

$$A=\frac{p}{q}$$



und

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{b\,b'} + \cdots,$$

so hat die Zahlenreihe:

$$\lambda,\ \mu \ldots$$

die Beschaffenheit, dass von einem gewissen Gliede an sämmtliche Glieder die höchsten ihnen zustehenden Werthe haben.

Beweis: Man bezeichne μ mit λ', ν mit λ'' u. s. w. und setze:

$$A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\lambda'}{b\,b'} + \cdots + \frac{\lambda^{(\varrho)}}{b\,b' \ldots b^{(\varrho)}} = \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}},$$

wo:

$$n^{(\varrho)} = b\,b' \ldots b^{(\varrho)}.$$

Dann ist einmal:

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} > 0,$$

andererseits:

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} \leqq \frac{b^{(\varrho+1)} - 1}{b\,b' \ldots b^{(\varrho+1)}} + \frac{b^{(\varrho+2)} - 1}{b\,b' \ldots b^{(\varrho+2)}} + \cdots$$

Das ist:

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(\varrho)}}{n^{(\varrho)}} \leqq \frac{1}{n^{(\varrho)}}.$$

Wir haben also:

$$p\,n^{(\varrho)} - q\,m^{(\varrho)} > 0; \quad p\,n^{(\varrho)} - q\,m^{(\varrho)} \leqq q.$$

Sei nun $n^{(\delta)}$ das erste Glied der Reihe

$$1,\ b,\ b\,b',\ \ldots$$

welches durch die Zahl q theilbar ist; dann ist

$$z = p\,n^{(\delta)} - q\,m^{(\delta)}$$

eine durch q theilbare ganze Zahl, die nach dem soeben Gezeigten in den Grenzen liegt:

$$z > 0; \quad z \leqq q;$$

es ist folglich:

$$z = q,$$

mithin:

$$\frac{p}{q} = \frac{m^{(\delta)}}{n^{(\delta)}} + \frac{1}{n^{(\delta)}},$$

oder auch:

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \cdots + \frac{\lambda^{(\delta)}}{b\,b' \ldots b^{(\delta)}} + \frac{b^{(\delta+1)} - 1}{b\,b' \ldots b^{(\delta+1)}} + \frac{b^{(\delta+2)} - 1}{b\,b' \ldots b^{(\delta+2)}} + \cdots,$$

wie zu beweisen war.

Corollar: Hat bei einer Zahl

$$A = A_0 + \frac{\lambda}{b} + \frac{\mu}{b\,b'} + \cdots$$

die Reihe λ, μ, ... nicht die Beschaffenheit, welche in dem be-

wiesenen Theoreme für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ gefordert ist, so ist die Zahl A eine Irrationalzahl.

Hierher gehört die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes:

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$$

§. 5. Von den einfachen Zahlensystemen wollen wir noch diejenigen berücksichtigen, bei denen die Reihe

$$b, b', b'' \ldots$$

von einem Glied $b^{(\varrho)}$ an periodisch ist.

Sei τ die Grösse der Periode, deren Glieder wir mit

$$c, c', \ldots c^{(\tau-1)}$$

bezeichnen wollen, so dass

$$1) \qquad b^{(\varrho+\tau'+h\tau)} = c^{(\tau')},$$

wo τ' die Zahlenwerthe $0, 1, 2, \ldots \tau-1$ annehmen kann und h eine beliebige positive ganze Zahl oder die Null ist.

Wird ferner:

$$b b' \ldots b^{(k)} = n^{(k)}$$

gesetzt und unter den dreien

$$b^{(-1)}, c^{(-1)}, n^{(-1)}$$

die positive Einheit verstanden, so hat man, wenn gesetzt wird:

$$2) \qquad n^{(\varrho-1)} = M, \quad c c' \ldots c^{(\tau-1)} = N,$$

die Gleichung:

$$3) \qquad n^{(\varrho-1+\tau'+h\tau)} = M N^h c c' \ldots c^{(\tau'-1)}.$$

Es besteht hier das folgende

Theorem: Ist in dem einfachen Zahlensysteme dieses Paragraphen eine Zahl

$$\frac{\beta}{b} + \frac{\beta'}{b b'} + \ldots$$

dargestellt, in welcher die Zahlenreihe $\beta, \beta', \ldots$ von einem Gliede an periodisch ist, so ist diese Zahl eine rationale Zahl, und umgekehrt, wird ein ächter rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ in dem Systeme dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{p}{q} = \frac{\beta}{b} + \frac{\beta'}{b b'} + \ldots,$$

so ist die Reihe $\beta, \beta', \ldots$ von einem bestimmten Gliede an periodisch.

Beweis: Den ersten Theil des Satzes zu beweisen hat keine Schwierigkeit, weil sich die gegebene Reihe auf eine endliche Anzahl geometrischer Reihen zurückführen lässt und damit eine rationale Zahl stets zur

Summe hat. Anders mit dem zweiten Theile, welcher die vollständige Umkehrung des ersten ist.

Wir denken uns den Bruch $\frac{p}{q}$ in der irreductibeln Form gegeben, darin p und q ohne gemeinschaftlichen Theiler sind und bezeichnen die ganze Zahl:

$$\beta^{(k)} + \beta^{(k-1)} b^{(k)} + \ldots + \beta b b' \ldots b^{(k)}$$

mit $m^{(k)}$, so dass

$$\frac{p}{q} = \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} + \frac{\beta^{(k+1)}}{n^{(k+1)}} + \ldots$$

Dann ist:

$$\frac{p}{q} - \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} > 0, \quad \frac{p}{q} - \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} \leqq \frac{1}{n^{(k)}}.$$

Führen wir daher eine Zahlenreihe

$$\delta, \delta', \delta'' \ldots$$

durch die Gleichung:

4) $$\delta^{(k+1)} = p n^{(k)} - q m^{(k)}$$

ein, so besteht dieselbe aus lauter positiven ganzen Zahlen, die sämmtlich kleiner sind als $q+1$. Diese Reihe der δ steht mit der Reihe der β in einer solchen Verbindung, dass wenn die eine periodisch ist, es auch die andere ist, wegen der Periodicität der Reihe der b.

Man hat nämlich:

5) $$\frac{b^{(k+1)} \delta^{(k+1)}}{q} = \beta^{(\ +1)} + \frac{\beta^{(k+2)}}{b^{(k+2)}} + \ldots$$

und daraus:

6) $$\frac{b^{(k+1)} \delta^{(k+1)}}{q} > \beta^{(k+1)}, \quad \frac{b^{(k+1)} \delta^{(k+1)}}{q} \leqq \beta^{(k+1)} + 1.$$

Durch die Gleichung 5) ist $\delta^{(k+1)}$ eindeutig aus den $\beta^{(k+1)}, \beta^{(k+2)}, \ldots$ bestimmt, durch die Ungleichheiten 6) hängt die ganze Zahl $\beta^{(k+1)}$ eindeutig von $\delta^{(k+1)}$ ab.

Wir haben also nur die Periodicität (von einem gewissen Gliede an) der Reihe:

$$\delta, \delta', \delta'', \ldots$$

nachzuweisen. Man hat, wenn $k = \varrho - 1 + \tau' + h\tau$:

$$\delta^{(k+1)} = p M N^h c c' \ldots c^{(\tau'-1)} - q m^{(k)}.$$

Sei s der grösste gemeinschaftliche Theiler von q und M, und es sei $q = sr$; sei $r = r' r''$, wo r'' alle Primfactoren von r enthält, die auch in N vorkommen, so dass r' relativ prim zu N und zu r'' ist.

Man verstehe ferner unter ϑ die kleinste Zahl, für welche

$$N^\vartheta \equiv 1, \ mod\, r'$$

und unter π die kleinste Zahl, für welche

$$N^\pi \equiv 0, \ mod\, r'';$$

dann ist in Bezug auf beide Moduln r' und r'':

$$N^{\varkappa+\vartheta'+g\vartheta} \equiv N^{\varkappa+\vartheta'},$$

wo ϑ' die Bedeutung einer der Zahlen $0, 1, 2, \ldots \vartheta-1$ hat und g eine beliebige ganze positive Zahl ist. Da r' und r'' relativ prim zu einander sind, so hat die letzte Congruenz auch für den Modul r Giltigkeit; es ist:

$$N^{\varkappa+\vartheta'+g\vartheta} \equiv N^{\varkappa+\vartheta'}, \; mod\, r.$$

Hieraus geht zunächst die Congruenz hervor:

$$7) \qquad \delta^{(\varrho+\varkappa\tau+\tau'+\vartheta'\tau+g\vartheta\tau)} \equiv \delta^{(\varrho+\varkappa\tau+\tau'+\vartheta'\tau)}, \; mod\, q.$$

Die Zahlen δ sind, wie wir gesehen haben, alle >0 und $<q+1$; sie können daher unter einander nur in dem Falle congruent in Bezug auf q sein, wenn sie einander gleich sind. Man hat also, wenn

$$\varrho+\varkappa\tau = \Omega, \quad \tau'+\vartheta'\tau = \Theta', \quad \tau\vartheta = \Theta$$

gesetzt wird:

$$8) \qquad \delta^{(\Omega+\Theta'+g\Theta)} = \delta^{(\Omega+\Theta')}.$$

Berücksichtigt man die Werthreihe der τ' und die der ϑ', so findet man, dass die Werthreihe der Θ'

$$0, 1, 2, \ldots \Theta-1$$

ist. Die Gleichung 8) zeigt uns also, dass die Reihe der δ vom Gliede $\delta^{(\Omega)}$ an periodisch mit der Periode $\Theta = \tau\vartheta$ ist. Einer frühern Bemerkung zufolge ist nun auch die Reihe der β vom Gliede $\beta^{(\Omega)}$ an periodisch, und zwar mit derselben Periode Θ, weil Θ theilbar ist durch τ.

Das dekadische Zahlensystem ist derjenige Fall der in diesem Paragraphen behandelten Systeme, in welchem

$$\varrho = 0, \quad \tau = 1, \quad c = 10.$$

VI.

Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear.

Von

Professor Dr. C. W. Baur

am Polytechnicum zu Stuttgart.

I.

Es möge an das allbekannte Beispiel erinnert werden, wonach man aus

$$x + y = a \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = b^2$$

zunächst

$$x - y = \pm \sqrt{2b^2 - a^2}$$

bestimmt. Ebenso erhält man aus

$$\alpha x + \beta y = a \quad \text{und} \quad Ax^2 + By^2 = b^2$$

zunächst

$$(A\beta x - B\alpha y)^2 = (A\beta^2 + B\alpha^2)(Ax^2 + By^2) - AB(\alpha x + \beta y)^2$$

$$A\beta x - B\alpha y = \pm \sqrt{(A\beta^2 + B\alpha^2)\, b^2 - AB \,.\, a^2}.$$

In beiden Fällen ist die Bestimmung der zwei Unbekannten auf die Auflösung zuerst einer reinen quadratischen Gleichung, und dann von zwei Gleichungen des ersten Grades zurückgeführt, von denen die eine auf ihrer Rechten eine zweideutige Wurzelgrösse enthält.

Die Verallgemeinerung dieses Verfahrens im Sinne der vorangestellten Ueberschrift führt, wenn die linke Seite der quadratischen Gleichung vorerst als homogen nach den Unbekannten angenommen wird, zu der Aufgabe:

Es soll eine Substitution

$$1) \qquad y_0 = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + \ldots + a_{0n} x_n$$

derart ermittelt werden, dass vermöge derselben und der willkürlich vorgeschriebenen Substitutionen:

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ y_2 = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_n = a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n \end{array} \right.$$

der Ausdruck:

$$3)\quad F(x_0, x_1, \ldots x_n) = \sum_0^n {}^i x_i \sum_0^n {}^k A_{ik} x_k, \quad \text{wo } A_{ik} = A_{ki},$$

sich in $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ darstellen lässt, ohne y_0 anders als in einem einzigen Gliede mit y^2_0 zu enthalten.

Haben nämlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ und F gegebene Werthe, so liefert die durch Auflösung dieser Aufgabe entstehende Gleichung:

$$4)\qquad F = B_{00} y^2_0 + \sum_1^n {}^i y_1 \sum_1^n {}^k B_{ik} y_k$$

für y_0 eine gegebene Wurzelgrösse, und erfordert also, nachdem die Coefficienten in 1) geeignet ermittelt worden sind, die Bestimmung der Unbekannten nur noch die Auflösung der n linearen Gleichungen 1) und 2).

Für den Zweck der verlangten Transformation denken wir uns die Gleichungen 1) und 2) nach $x_0, x_1, \ldots x_n$ aufgelöst und erhalten bekanntlich, wenn a'_{ik} den Coefficienten von a_{ik} in der Entwickelung der Determinante

$$5)\qquad a = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet:

$$6)\qquad a x_i = a'_{0i} y_0 + a'_{1i} y_1 + \ldots + a'_{ni} y_n.$$

Durch Substitution in 3) wird also:

$$7)\quad \begin{cases} a^2 F = \sum_0^n {}^i (a'_{0i} y_0 + a'_{1i} y_1 + \ldots + a'_{ni} y_n) \sum_0^n {}^k A_{ik} (a'_{0k} y_0 + a'_{1k} y_1 + \ldots + a'_{nk} y_n) \\ \quad = y^2_0 \sum_0^n {}^i a'_{0i} \sum_0^n {}^k A_{ik} a'_{0k} + 2 y_0 \sum_1^n {}^r y_r \sum_0^n {}^i a'_{ri} \sum_0^n {}^k A_{ik} a'_{0k} + a^2 F_0 \end{cases}$$

wo F_0 den Werth bedeutet, den vermöge des vorhergehenden Ausdrucks F für $y_0 = 0$ annimmt. Das zweite Glied des Ausdrucks 7) aber giebt als die Bedingung, dass die Transformation der gestellten Anforderung entspricht, die n folgenden Gleichungen zu erkennen, in welchen zur Abkürzung

$$\sum_0^n {}^k A_{ik} a'_{0k} = S_i$$

gesetzt ist:

$$\begin{aligned} a'_{10} S_0 + a'_{11} S_1 + \ldots + a'_{1n} S_n &= 0, \\ a'_{20} S_0 + a'_{21} S_1 + \ldots + a'_{2n} S_n &= 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . &\quad . \\ a'_{n0} S_0 + a'_{n1} S_1 + \ldots + a'_{nn} S_n &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn mit a''_{ik} der Coefficient von a'_{ik} in der Entwickelung der Determinante

$$a' = \begin{vmatrix} a'_{00} \, a'_{01} \dots a'_{0n} \\ a'_{10} \, a'_{11} \dots a'_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a'_{n0} \, a'_{n1} \dots a'_{nn} \end{vmatrix}$$

bezeichnet wird:

$$\frac{S_0}{a''_{00}} = \frac{S_1}{a''_{01}} = \dots = \frac{S_n}{a''_{0n}}.$$

Nun ist a' die adjungirte Determinante zu a in 5), also nach einem bekannten Satze:

$$a''_{0i} = a^{n-1} a_{0i},$$

somit, wenn die ursprüngliche Bedeutung der S wieder hergestellt wird:

$$\frac{A_{00} a'_{00} + A_{01} a'_{01} + \dots + A_{0n} a'_{0n}}{a_{00}} = \frac{A_{10} a'_{00} + A_{11} a'_{01} + \dots + A_{1n} a'_{0n}}{a_{01}} = \dots$$
$$= \frac{A_{n0} a'_{00} + A_{n1} a'_{01} + \dots + A_{nn} a'_{0n}}{a_{0n}}.$$

Da die a' bei der Entwickelung aus a nur die Coefficienten der gegebenen Substitutionen 2) enthalten, so ist hiermit das Verhältniss der Coefficienten der verlangten Substitution 1) gefunden, welches in der That auch allein durch die Aufgabe bestimmt wird, da in Gleichung 7) und den daraus gezogenen Folgerungen keine wesentliche Veränderung vor sich geht, wenn anstatt y_0 sein Product mit einem beliebigen Factor eingeführt wird. Nehmen wir daher für a_{00}, a_{01}, ... a_{0n} ihre obigen Proportionalen selbst, d. h. setzen wir:

$$a_{0i} = A_{i0} a'_{00} + A_{i1} a'_{01} + \dots + A_{in} a'_{0n} = \begin{vmatrix} A_{i0} \; A_{i1} \dots A_{in} \\ a_{10} \;\; a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n0} \;\; a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

so heisst die verlangte Substitution:

$$8) \quad \begin{cases} y_0 = (A_{00} a'_{00} + A_{01} a'_{01} + \dots + A_{0n} a'_{0n}) \, x_0 \\ \quad + (A_{10} a'_{00} + A_{11} a'_{01} + \dots + A_{1n} a'_{0n}) \, x_1 \\ \quad + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \quad + (A_{n0} a'_{00} + A_{n1} a'_{01} + \dots + A_{nn} a'_{0n}) \, x_n \\ = (A_{00} x_0 + A_{10} x_1 + \dots + A_{n0} x_n) \, a'_{00} \\ \quad + (A_{01} x_0 + A_{11} x_1 + \dots + A_{n1} x_n) \, a'_{01} \\ \quad + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \quad + (A_{0n} x_0 + A_{1n} x_1 + \dots + A_{nn} x_n) \, a'_{0n} \\ = \frac{1}{2} \frac{dF}{dx_0} a'_{00} + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx_1} \cdot a'_{01} + \dots + \frac{1}{2} \frac{dF}{dx_n} \cdot a'_{0n} \end{cases}$$

$$9) \quad = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_0} & \frac{dF}{dx_1} & \dots & \frac{dF}{dx_n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dasselbe Ergebniss kann auch so gewonnen werden: Gleichung 4) giebt partiell nach y_0 abgeleitet

$$2 B_{00} y_0 = \frac{dF}{dy_0} = \frac{dF}{dx_0} \frac{dx_0}{dy_0} + \frac{dF}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_0} + \ldots + \frac{dF}{dx_{11}} \cdot \frac{dx_n}{dy_0}$$

oder wegen 6)

$$2a\, B_{00} y_0 = \frac{dF}{dx_0} \cdot a'_{00} + \frac{dF}{dx_1} \cdot a'_{01} + \ldots + \frac{dF}{dx_n} \cdot a'_{0n}.$$

Aus dem oben angegebenen Grunde kann hierfür ebensowohl 8) oder 9) angenommen werden.

Es sind nun aber auch die Coefficienten der drei übrig bleibenden Glieder in 7) auf eine nur von den gegebenen Coefficienten abhängige Form zu bringen. Derjenige von y^2_0 ist es schon, auf der Linken wird

$$\begin{aligned} a &= a_{00}\, a'_{00} + a_{01}\, a'_{01} + \ldots + a_{0n}\, a'_{0n} \\ &= (A_{00} a'_{00} + A_{01}\, a'_{01} + \ldots + A_{0n} a'_{0n})\, a'_{00} \\ &\quad + (A_{10} a'_{00} + A_{11}\, a'_{01} + \ldots + A_{1n} a'_{0n})\, a'_{01} \\ &\quad + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad + (A_{n0} a'_{00} + A_{n1} a'_{01} + \ldots + A_{nn} a'_{0n})\, a'_{0n} \\ &= \sum_0^n {}^i\, a'_{0i} \sum_0^n {}^k\, A_{ik}\, a'_{0k} \end{aligned}$$

identisch mit dem Coefficienten von y^2_0. Wegen des letzten Gliedes führen wir ein System von Hilfsgrössen ein:

$$\begin{matrix} e_{10}\; e_{11} \ldots e_{1n}, \\ e_{20}\; e_{21} \ldots e_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_{n0}\; e_{n1} \ldots e_{nn}, \end{matrix}$$

welche den $n(n+1)$ Gleichungen genügen sollen, die aus

$$10) \qquad e_{r0} A_{0k} + e_{r1} A_{1k} + \ldots + e_{rn} A_{nk} = a_{rk}$$

dadurch hervorgehen, dass k alle ganzen Werthe von 0 bis n und r alle von 1 bis n durchläuft; mit anderen Worten, wir setzen, wenn A'_{ik} den Coefficienten von A_{ik} in der Entwickelung der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{10} & \ldots & A_{n0} \\ A_{01} & A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{0n} & A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

bedeutet:

$$11) \qquad A \,.\, e_{ri} = a_{r0} A'_{i0} + a_{r1} A'_{i1} + \ldots + a_{rn} A'_{in}.$$

Infolge dieser Annahme wird nach der Multiplicationsregel:

$$12) \qquad A \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_n \\ e_{10} & e_{11} & \ldots & e_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n0} & e_{n1} & \ldots & e_{nn} \end{vmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_0} & \frac{dF}{dx_1} & \ldots & \frac{dF}{dx_n} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = y_0.$$

Es könnte demnach scheinen, da auch $a''_{0i} = a^{n-1} \cdot a_{0i}$, also nach 1):

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ a'_{10} & a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n0} & a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a^{n-1} y_0,$$

dass $A a^{n-1} e_{ri} = a'_{ri}$ wäre, es ist dies jedoch nicht der Fall. Aus 12) aber ergiebt sich weiter:

$$13) \qquad y^2_0 = A \cdot \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ e_{10} & e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n0} & e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_0} & \frac{dF}{dx_1} & \dots & \frac{dF}{dx_n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung der Multiplicationsregel auf das Product der zwei letzten Factoren erhält man eine Determinante mit folgenderlei Gliedern:

$$x_0 \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_0} + x_1 \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_1} + \dots + x_n \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_n} = F;$$

ferner:

$$x_0 a_{r0} + x_1 a_{r1} + \dots + x_n a_{rn} = y_r;$$

ferner:

$$\begin{aligned} & e_{r0} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_0} + e_{r1} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_1} + \dots + e_{rn} \cdot \tfrac{1}{2} \frac{dF}{dx_n} \\ = & e_{r0} \cdot (A_{00} x_0 + A_{01} x_1 + \dots + A_{0n} x_n) \\ & + e_{r1} \cdot (A_{10} x_0 + A_{11} x_1 + \dots + A_{1n} x_n) \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + e_{rn} \cdot (A_{n0} x_0 + A_{n1} x_1 + \dots + A_{nn} x_n) \\ = & (e_{r0} A_{00} + e_{r1} A_{10} + \dots + e_{rn} A_{n0}) x_0 \\ & + (e_{r0} A_{01} + e_{r1} A_{11} + \dots + e_{rn} A_{n1}) x_1 \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + (e_{r0} A_{0n} + e_{r1} A_{1n} + \dots + e_{rn} A_{nn}) x_n \\ = & a_{r0} x_0 + a_{r1} x_1 + \dots + a_{rn} x_n = y_r \end{aligned}$$

vermöge 10) und 2).

Endlich kommt mit eingeführter Abkürzung noch ein System von Gliedern:

$$B_{rs} = a_{r0} e_{s0} + a_{r1} e_{s1} + \dots + a_{rn} e_{sn}$$

oder, wegen 11):

$$14) \quad \left\{ \begin{aligned} A B_{rs} = & a_{r0} (a_{s0} A'_{00} + a_{s1} A'_{01} + \dots + a_{sn} A'_{0n}) \\ & + a_{r1} (a_{s0} A'_{10} + a_{s1} A'_{11} + \dots + a_{sn} A'_{1n}) \\ & + \dots\dots\dots\dots \\ & + a_{rn} (a_{s0} A'_{n0} + a_{s1} A'_{n1} + \dots + a_{sn} A'_{nn}) \\ = & \sum_0^n {}^i a_{ri} \sum_0^n {}^k A'_{ik} a_{sk} = A B_{sr}. \end{aligned} \right.$$

Gleichung 13) liefert daher jetzt:

$$15)\quad y^2_0 = A \cdot \begin{vmatrix} F & y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1 & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ y_2 & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix} = A\,(B\,F - \sum_1^n{}^r\, y_r \sum_1^n{}^s\, B'_{rs} y_s),$$

wo B'_{rs} den Coefficienten von B_{rs} in der Entwickelung der folgenden Determinante bedeutet:

$$B = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Aufgabe ist nun vollständig aufgelöst.

Beispielshalber sei:

$$F = A_{00}x^2_0 + A_{11}x^2_1 + A_{22}x^2_2;\qquad y_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$
$$y_2 = a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2,$$

so wird

$$B_{11} = \frac{a^2_{10}}{A_{00}} + \frac{a^2_{11}}{A_{11}} + \frac{a^2_{12}}{A_{22}};\quad B_{12} = B_{21} = \frac{a_{10}a_{20}}{A_{00}} + \frac{a_{11}a_{21}}{A_{11}} + \frac{a_{12}a_{22}}{A_{22}};$$
$$B_{22} = \frac{a^2_{20}}{A_{00}} + \frac{a^2_{21}}{A_{11}} + \frac{a^2_{22}}{A_{22}},$$

$$\frac{1}{A_{00}A_{11}A_{22}}[A_{00}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_0 + A_{11}(a_{12}a_{20}-a_{10}a_{22})x_1 + A_{22}(a_{10}a_{21}-a_{11}a_{20})x_2]^2$$
$$= (B_{11}B_{22} - B^2_{12})F - B_{22}y^2_1 + 2B_{12}y_1y_2 - B_{11}y^2_2.$$

Tritt die erste Gleichung in der vollständigeren Gestalt auf:

$$F = A_{00}x^2_0 + 2A_{12}x_1x_2 + A_{11}x^2_1 + 2A_{20}x_2x_0 + A_{22}x^2_2 + 2A_{01}x_0x_1,$$

so wird:

$$A = 2A_{00}A_{11}A_{22} + 2A_{12}A_{20}A_{01} - A_{00}A^2_{12} - A_{11}A^2_{20} - A_{22}A^2_{01},$$
$$A'_{00} = A_{11}A_{22} - A^2_{12};\quad A'_{12} = A'_{21} = A_{20}A_{01} - A_{21}A_{00},$$
$$A'_{11} = A_{22}A_{00} - A^2_{20};\quad A'_{20} = A'_{02} = A_{01}A_{12} - A_{02}\cdot A_{11},$$
$$A'_{22} = A_{00}\cdot A_{11} - A^2_{01};\quad A'_{01} = A'_{10} = A_{12}A_{20} - A_{10}A_{22},$$

$$A\,B_{11} = A'_{00}a^2_{10} + 2A'_{12}a_{11}a_{12} + A'_{11}a^2_{11} + 2A'_{20}a_{12}a_{10} + A'_{22}a^2_{12}$$
$$+ 2A'_{01}a_{10}a_{11} = P_{11},$$

$$A\,B_{22} = A'_{00}a^2_{20} + 2A'_{12}a_{21}a_{22} + A'_{11}a^2_{21} + 2A'_{20}a_{22}a_{20} + A'_{22}a^2_{22}$$
$$+ 2A'_{01}a_{20}a_{21} = P_{22},$$

$$A\,B_{12} = A'_{00}a_{10}a_{20} + A'_{12}(a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) + A'_{11}a_{11}a_{21} + A'_{20}(a_{12}a_{20} + a_{10}a_{22})$$
$$+ A'_{22}a_{12}a_{22} + A'_{01}(a_{10}a_{21} + a_{20}\cdot a_{11}) = P_{12},$$

$$\left\{\begin{array}{l} (A_{00}x_0 + A_{01}x_1 + A_{02}x_2)\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ + (A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2)\,(a_{12}a_{20} - a_{10}a_{22}) \\ + (A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2)\,(a_{10}a_{21} - a_{11}a_{20}) \end{array}\right\}^2$$
$$= \frac{1}{A}(P_{11}P_{22} - P^2_{12})F - P_{22}y^2_1 + 2P_{12}y_1y_2 - P_{11}y^2_2.$$

In diesen Resultaten, sowie schon in der allgemeinen Gleichung 15) tritt der Coefficient von F nicht in derjenigen Gestalt auf, welche vermöge 7) zu erwarten war; wir haben denselben nämlich in der Determinante B ausgedrückt erhalten, während er dort angegeben wurde mit

$$a = \Sigma a'_{0i}\, \Sigma A_{ik}\, a'_{0k},$$

was bei der zuletzt behandelten vollständigen Form von F den Ausdruck liefert:

$$\begin{aligned} & A_{00}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2 + 2A_{12}(a_{12}a_{20} - a_{10}a_{22})(a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11}) \\ + & A_{11}(a_{12}a_{20} - a_{22}a_{10})^2 + 2A_{20}\,.\,(a_{10}a_{21} - a_{11}\,.\,a_{20})\,.\,(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \\ + & A_{22}(a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11})^2 + 2A_{01}(a_{11}a_{22} - a_{12}\,.\,a_{21})\quad(a_{12}a_{20} - a_{22}\,.\,a_{10}). \end{aligned}$$

Die Uebereinstimmung lässt sich, besonders im Fall des ersten Beispiels, durch eine wenig umfangreiche Rechnung nachweisen, man findet dort sogleich:

$$B_{11}B_{22} - B^2_{12} = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})^2}{A_{11}A_{22}} + \frac{(a_{12}a_{20} - a_{10}a_{22})^2}{A_{22}\,.\,A_{00}} + \frac{(a_{10}a_{21} - a_{20}a_{11})^2}{A_{00}A_{11}}.$$

Um die Uebereinstimmung allgemein nachzuweisen und zugleich die entsprechende Umwandlung mit dem Coefficienten von $y_r y_s$ vorzunehmen, soll hier in einer über das augenblickliche Bedürfniss hinaus erweiterten Fassung ein Satz über die Umwandlung gewisser aus einer bilinearen Function entspringenden Determinanten auf die Form ebenfalls einer solchen Function entwickelt werden.

Es seien $c, d, \ldots e$ und $f, g, \ldots h$ zwei bestimmte, nach der Nummernfolge geordnete Combinationen zu m zwischen den $n+1$ Zahlen 0, 1, 2, ... n. Man bilde die Werthe, welche aus:

$$B_{rs} = \sum_0^n{}^i\, a_{ri} \sum_0^n{}^k\, A_{ik}\, a_{sk}$$

dadurch hervorgehen, dass r die Werthe $c, d, \ldots e$ und s die Werthe $f, g, \ldots h$ durchläuft, so ist die Determinante, deren Umwandlung verlangt wird:

$$D = \begin{vmatrix} B_{cf} & B_{cg} & \ldots & B_{ch} \\ B_{df} & B_{dg} & \ldots & B_{dh} \\ . & . & . & . \\ B_{ef} & B_{eg} & \ldots & B_{eh} \end{vmatrix}.$$

Setzt man zu diesem Zweck:

$$u_{is} = A_{i0}\,a_{s0} + A_{i1}\,a_{s1} + \ldots + A_{in}\,a_{sn},$$

so wird:

$$B_{rs} = a_{r0}\,u_{0s} + a_{r1}\,u_{1s} + \ldots + a_{rn}\,u_{ns}.$$

Schreibt man hiernach die Elemente von D an, so lässt sich diese Determinante als eine Summe von Producten je zweier Determinanten durch folgenden Ausdruck darstellen, in welchem $c', d', \ldots e'$ alle überhaupt möglichen Combinationen derart wie $c, d, \ldots e$ bedeutet:

$$D = \sum_{c'd'..e'} \begin{vmatrix} a_{cc'} & a_{dc'} & \dots & a_{ec'} \\ a_{cd'} & a_{dd'} & \dots & a_{ed'} \\ . & . & . & . \\ a_{ce'} & a_{de'} & \dots & a_{ee'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{c'f} & u_{c'g} & \dots & u_{c'h} \\ u_{d'f} & u_{d'g} & \dots & u_{d'h} \\ . & . & . & . \\ u_{e'f} & u_{e'g} & \dots & u_{e'h} \end{vmatrix}.$$

Vermöge der Bedeutung von u_{is} geht nach demselben Verfahren der zweite Factor, wenn auch $f', g', \dots h'$ alle überhaupt möglichen Combinationen, wie $c, d, \dots e$ oder $f, g, \dots h$ darstellt, in folgende Summe über:

$$\sum_{f'g'..k'} \begin{vmatrix} A_{c'f'} & A_{c'g'} & \dots & A_{c'k'} \\ A_{d'f'} & A_{d'g'} & \dots & A_{d'k'} \\ . & . & . & . \\ A_{e'f'} & A_{e'g'} & \dots & A_{e'k'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{ff'} & a_{fg'} & \dots & a_{fk'} \\ a_{gf'} & a_{gg'} & \dots & a_{gk'} \\ . & . & . & . \\ a_{hf'} & a_{hg'} & \dots & a_{hk'} \end{vmatrix},$$

also, wenn der Kürze halber die schon oben zur Anschauung gebrachten Determinanten in der bekannten Weise durch ihre Anfangsglieder bezeichnet werden:

$$16)\quad D = \sum_{c'd'..e'} \pm (a_{cc'}\,a_{dd'} \dots a_{ee'}) \sum_{f'g'..k'} \pm (A_{c'f'}\,A_{d'g'} \dots A_{e'k'}) \cdot (a_{ff'}\,a_{gg'} \dots a_{hk'}).$$

Hiermit ist die verlangte Form in der Weise hergestellt, dass im Vergleich mit dem Ausdruck für B_{rs} an der Stelle der Coefficienten A und der Elemente a Partialdeterminanten aus deren Systemen auftreten.

Die Anwendung auf B und B'_{rs} in Gleichung 15) ist nicht schwierig. D geht vermöge 14) in $A^n B$ über, wenn für $c, d, \dots e$ nur $1, 2, \dots n$ angenommen wird und die A' an die Stelle der A treten; es gehen ferner $c', d', \dots e'$ und $f', g', \dots h'$ aus $0, 1, 2, \dots n$ hervor, wenn nach einander die einzelnen $(n+1)$ Zahlen aus der Reihe gestrichen werden. Schreibt man demgemäss z. B. für

$$c', d', \dots e' = 0, 1, 2, \dots i-1, \; i+1, \dots n,$$

und

$$f', g', \dots h' = 0, 1, 2, \dots k-1, \; k+1, \dots n$$

die drei Determinanten in Gleichung 16) an, so zeigt sich sogleich, dass sie die folgenden drei Werthe erhalten:

$$(-1)^i\, a'_{0i}, \qquad (-1)^{i+k} A_{ik} \,.\, A^{n-1}, \qquad (-1)^k\, a'_{0k},$$

somit

$$A^n B = \sum_0^n{}^i\, a'_{0i} \sum_0^n{}^k A_{ik}\, A^{n-1} \,.\, a'_{0k},$$

$$A B = \sum_0^n{}^i\, a'_{0i} \sum_0^n{}^k A_{ik}\, a'_{0k} = a,$$

womit die Coefficienten von F in 7) und 15) vollständig zur Uebereinstimmung gebracht sind.

Was ferner den Coefficienten von $y_r y_s$ in 15) betrifft, so geht D in $(-1)^{r+s} A^{n-1} B'_{rs}$ über, wenn für $c, d, \dots e$ und $f, g, \dots h$ die Combina-

tionen $1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots n$ und $1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots n$ gesetzt werden und statt der A wieder die A' auftreten. Die Combinationen $c', d', \ldots e'$ und $f', g', \ldots h'$ gehen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots n$ hervor, wenn nach und nach alle möglichen Combinationen zu 2 wie i,ι und $k,\varkappa$ von $0,1$ bis $n-1, n$ aus der Reihe gestrichen werden. Durch dieselbe Behandlung wie vorhin zeigt sich, dass die drei Determinanten in 16) folgende Werthe erhalten:

$$(-1)^{i+\iota+r} \begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0\iota} \\ a_{ri} & a_{r\iota} \end{vmatrix}'; \quad (-1)^{i+\iota+k+\varkappa} . \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{i\varkappa} \\ A_{\iota k} & A_{\iota\varkappa} \end{vmatrix} A^{n-2};$$

$$(-1)^{k+\varkappa+s} . \begin{vmatrix} a_{0k} & a_{0\varkappa} \\ a_{sk} & a_{s\varkappa} \end{vmatrix}'.$$

Die hier auftretenden gestrichelten Determinanten stehen zu den gleichlautenden ungestrichelten in derselben Beziehung wie a'_{ik} zu a_{ik}. Schliesslich wird nun:

$$A B'_{rs} = \sum_{0,1}^{n-1,n} {}^{i\iota} \begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0\iota} \\ a_{ri} & a_{r\iota} \end{vmatrix}' \sum_{0,1}^{n-1,n} {}^{k,\varkappa} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{i\varkappa} \\ A_{\iota k} & A_{\iota\varkappa} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{0k} & a_{0\varkappa} \\ a_{sk} & a_{s\varkappa} \end{vmatrix}'.$$

Gleichung 15) ist daher jetzt auf folgende Form gebracht:

$$17) \left\{ \begin{aligned} y^2_0 &= F . \sum_0^n {}^i a'_{0i} \sum_0^n {}^k A_{ik} a'_{0k} \\ &- \sum_1^n {}^r y_r \sum_1^n {}^s y_s \sum_{0,1}^{n-1,n} {}^{i\iota} \begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0\iota} \\ a_{ri} & a_{r\iota} \end{vmatrix}' \sum_{0,1}^{n-1,n} {}^{k,\varkappa} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{i\varkappa} \\ A_{\iota k} & A_{\iota\varkappa} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{0k} & a_{0\varkappa} \\ a_{sk} & a_{s\varkappa} \end{vmatrix}'. \end{aligned} \right.$$

Für $n=2$ reducirt sich der letzte, sowie der drittletzte Factor auf ein einzelnes a, der vorletzte auf ein A', wie dies schon die beiden oben behandelten Beispiele bemerken liessen.

Es bleibt jetzt nur noch der Fall zu betrachten, dass F keine homogene Function der Unbekannten $x_0, x_1, \ldots x_n$ ist. Derselbe lässt sich durch einen bekannten Kunstgriff auf den einer homogenen Function zurückführen, wenn man in F die Glieder des ersten und nullten Grades nach x durch Multiplication mit $x_p = 1$ und $x^2_p = 1$, wo $p = n+1$, in Glieder des zweiten Grades verwandelt und entsprechend den Coefficienten von x_i mit $2A_{ip}$, das Absolutglied aber mit A_{pp} bezeichnet. Mit der Anzahl der Unbekannten hat sich auch die Anzahl der Gleichungen 2) um Eins erhöht, es tritt nämlich

$$y_p = x_p = 1$$

hinzu, in welcher $a_{p0}, a_{p1}, \ldots a_{pn}$ verschwinden und $a_{pp} = 1$ ist. Absolutglieder auf der rechten Seite der bisherigen Gleichungen 2) anzunehmen hätte keinen Sinn, da dieselben negativ auf die linke Seite umgesetzt sich mit den gegebenen Werthen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ vereinigen liessen, es verschwinden also auch die Coefficienten $a_{1p}, a_{2p}, \ldots a_{np}$, welche der Uebergang von n in $n+1=p$ ins Spiel bringt.

Was nun zunächst die verlangte Substitution betrifft, so kommt der Ausdruck, welcher nach 9) dafür anzusetzen ist:

$$y_0 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{dF}{dx_0} & \frac{dF}{dx_1} & \cdots & \frac{dF}{dx_n} & \frac{dF}{dx_p} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wegen der Nullen in der letzten Horizontalreihe lediglich auf den bisherigen Ausdruck 9) zurück, nur dass die Ableitungen in der ersten Horizontalreihe auch die Coefficienten der Glieder des ersten Grades nach x enthalten.

Im ersten Gliede der rechten Seite der Gleichung 17), in welcher jetzt überall i und k, r und s bis p, die Combinationen i,ι und $k,\varkappa$ bis n, $n+1$ fortschreiten, behält der Factor a'_{0i} seine bisherige Bedeutung bei, so lange $i<p$, verschwindet aber wegen der Nullen in der letzten Horizontalreihe im System der Coefficienten a, für $i=p$, ebenso verhält es sich mit a'_{0k}, es brauchen hier also i und k nur bis n in Betracht gezogen zu werden und dieses erste Glied kann im Sinne der vorherigen Bezeichnung unverändert beibehalten werden.

Im zweiten Gliede der rechten Seite der neuen Gleichung 17) behält für $r<p$ der Factor

$$\begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0\iota} \\ a_{ri} & a_{r\iota} \end{vmatrix}'$$

seine vorherige Bedeutung bei, so lange $\iota<p$, verschwindet aber für $\iota=p$, es braucht also vorerst ι nur bis n oder i,ι nur bis $n-1, n$ in Betracht gezogen zu werden; entsprechend verhält es sich mit dem Factor

$$\begin{vmatrix} a_{0k} & a_{0\varkappa} \\ a_{sk} & a_{s\varkappa} \end{vmatrix}'$$

so lange $s<p$ und kann somit von der rechten Seite der neuen Gleichung 17) das zweite Glied der ursprünglichen Gleichung unverändert abgesondert werden.

Für $r<p$ und $s=p$, also $y_s=1$ heisst der letzte Factor

$$\begin{vmatrix} a_{0k} & a_{0\varkappa} \\ a_{pk} & a_{p\varkappa} \end{vmatrix}'$$

und verschwindet wegen der Nullen in der letzten Verticalreihe des Systems a so lange $\varkappa<p$, für $\varkappa=p$ aber geht er in a'_{0k} über, es braucht also nur der Uebergang der Combination $k,\varkappa$ von $0,p$ bis n,p oder der des allein noch veränderlichen Index k von 0 in n in Betracht gezogen zu werden und das Glied erhält denjenigen Werth, der im ersten Theile des weiter unten mitgetheilten Ausdrucks 18) noch mit dem Coefficienten 2 behaftet erscheint. Doppelt nämlich tritt der Werth auf, weil mit $r=p$

und $s < p$ lediglich dasselbe Resultat, nur mit $s, k, \varkappa, i$ statt r, i, ι, k gewonnen wird.

Für $r = p$ und $s = p$ kommt, wie vorhin $\varkappa$, so jetzt auch nur $\iota = p$, also nur der Fortschritt des veränderlichen Index i in der Combination i, ι von 0 bis n in Betracht, man erhält also schliesslich:

$$-\sum_0^n{}^i a'_{0i} \sum_0^n{}^k \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{ip} \\ A_{pk} & A_{pp} \end{vmatrix} a'_{0k} = -A_{pp} \sum_0^n{}^i a'_{0i} \sum_0^n{}^k A_{ik} a'_{0k} + \sum_0^n{}^i a'_{0i} \sum_0^n{}^k A_{ip} A_{pk} a'_{0k}.$$

Der erste dieser beiden Theile lässt sich mit dem ersten Gliede der rechten Seite von 17) vereinigen, wenn hier nur $F - A_{pp}$ statt F geschrieben wird, es lässt sich auch ganz davon absehen, wenn man sich vorbehält, ein etwaiges Absolutglied in F negativ auf die linke Seite umgesetzt mit dem gegebenen constanten Werth von F zu vereinigen, es sind also schliesslich unter dieser Voraussetzung für den Fall einer auch mit Gliedern der ersten Ordnung nach x behafteten Function F zu der rechten Seite von 17) im Sinne der vorherigen Bezeichnung nur folgende Glieder nachzutragen:

$$18)\quad \left\{ \begin{aligned} & -2 \sum_1^n{}^r y_r \sum_{0,1}^{n-1,n}{}^{i,\iota} \begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0\iota} \\ a_{ri} & a_{r\iota} \end{vmatrix}' \sum_0^n{}^k \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{ip} \\ A_{\iota k} & A_{\iota p} \end{vmatrix} a'_{0k} \\ & \qquad + \sum_0^n{}^i a'_{0i} \sum_0^n{}^k A_{ip} A_{pk} a'_{0k}. \end{aligned} \right.$$

In Betreff der Auflösung der linearen Gleichungen 1) und 2) soll nur bemerkt werden, dass der gemeinschaftliche Nenner der Ausdrücke für die Unbekannten $x_0, x_1, \dots x_n$ durch

$$a = \sum_0^n{}^i a'_{ri} \sum_0^n{}^k A_{ik} a'_{0k}$$

angegeben wird.

Die Anwendungen der hier entwickelten Methoden auf die Theorie der conjugirten Durchmesser und Diametralebenen der Curven und Flächen zweiter Ordnung liegen nahe. Werden unter x_0, x_1 und x_2 cartesische Coordinaten, unter y_1, y_2 aber constante Werthe verstanden, so bietet die Endgleichung in jedem der zwei oben behandelten Beispiele nach der Wurzelausziehung die Gleichung zweier parallelen und gleichweit vom Ursprung abstehenden Ebenen dar, welche mit den Ebenen

$$y_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

und

$$y_2 = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

dieselben Schnittpunkte liefern, wie die Fläche $F = Const.$; die parallel zu jenen beiden ersteren Ebenen durch den Ursprung gelegte halbirt also die Sehne, welche in den Schnitt der zwei anderen Ebenen fällt und, da die Gleichung $y_0 = 0$ jener durch den Ursprung gelegten Ebene y_1 und y_2 nicht enthält, so halbirt sie auch alle zu jener einen Sehne oder dem Schnitt der Ebenen $y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ parallelen Sehnen. Kürzer gelangt man zu demselben Resultat durch Betrachtung der Gleichung 15) oder 17) als der Gleichung der Fläche in transformirten Coordinaten y_0, y_1, y_2. Da dieser Gegenstand jedoch über die hier wesentlich gemachte Voraussetzung, dass eine Substitution zu den anderen gegebenen gefunden werden soll, hinausführt und andererseits erschöpfend behandelt ist, so wird nicht weiter darauf eingegangen.

(Schluss folgt.)

Stuttgart, December 1868.

Kleinere Mittheilungen.

IV. Ableitung des Potentiales bewegter elektrischer Massen aus dem Potentiale für den Ruhezustand. Von J. Loschmidt, Prof. der Physik an der Universität zu Wien.

Das Ampère'sche Gesetz wird zwar durch die Transformation Weber's mit dem Coulomb'schen in eine gewisse Verbindung gesetzt, allein die rationelle Deutung jenes Zusatzes, welchen das letztere Gesetz erhalten muss, um gleichzeitig die Fernwirkung der ruhenden und der bewegten Elektricität zu umfassen, ist bisher nicht gelungen. Die neueren Versuche, welche in dieser Richtung gemacht wurden, haben mit gutem Grunde die Verbindung zwischen den betreffenden Potentialformeln, statt jener zwischen den Formeln für die bewegenden Kräfte als nächstes Ziel ins Auge gefasst. Denn einmal ist es sehr wahrscheinlich, dass eben die Spannung, welche von dem elektrischen Theilchen ausgehend sich ringsum durch den Raum verbreitet, das Primäre der Anziehungserscheinungen sei, und daher mittelst einer schicklich gewählten Hypothese zu allernächst sich deduciren lassen dürfte, und zweitens ist auch der analytische Ausdruck für das Potentiale geschlossener Ströme — und nur die Wechselwirkung solcher lässt sich mit Genauigkeit experimental verfolgen — viel einfacher, als der entsprechende Ausdruck für die bewegende Kraft.

Wenn man die Ansicht von der Existenz zweier elektrischer Flüssigkeiten festhält, und die Wechselwirkung zweier Stromelemente nach der Weber'schen Weise in die vier Partialwirkungen der elektrischen Massentheilchen zerlegt, so kann man als eine allgemeinere Form für den Potentialwerth zweier elektrischer Massentheilchen e und e' im Abstande r im Zustande der Bewegung setzen:

$$\Pi = \frac{ee'}{r}\left[1 + Au + A'u' + Bu^2 + B'u'^2 + Cuu'\right],$$

worin u und u' die Geschwindigkeiten von e und e', A, A', B, B', C aber Constanten bedeuten. Unter Anwendung eines leicht verständlichen Algorithmus erhalten wir dann für die betreffenden vier Partialwirkungen die Ausdrücke:

$$+{}^e\Pi^{+e'} = +\frac{ee'\,ds\,ds'}{r}\,(1 + Au + A'u' + Bu^2 + B'u'^2 + Cuu')$$

$$+{}^e\Pi^{-e'} = -\frac{ee'\,ds\,ds'}{r}\,(1 + Au - A'u' + Bu^2 + B'u'^2 - Cuu')$$

$$-{}^e\Pi^{+e'} = -\frac{ee'\,ds\,ds'}{r}\,(1 - Au + A'u' + Bu^2 + B'u'^2 - Cuu')$$

$$-{}^e\Pi^{-e'} = +\frac{ee'\,ds\,ds'}{r}\,(1 - Au - A'u' + Bu^2 + B'u'^2 + Cuu')$$

und für ihre Summe

$$P = \frac{4ee'}{r}\,ds\,ds'\,Cuu'.$$

Der letztere Ausdruck wird mit der bekannten Potentialformel zweier Stromelemente identisch, wenn man setzt

$$C = \frac{1}{\alpha^2}\cos\theta\cos\theta',$$

wo θ und θ' die Winkel, welche ds und ds' mit der beiderseits nach auswärts verlängerten Verbindungslinie r bilden, und α eine bestimmte Constante bedeuten.

Es handelt sich nun zunächst darum, eine Hypothese ausfindig zu machen, welche erstlich zu der oben angeführten allgemeinen Form des Potentiales zweier elektrischer Massen führt, zweitens aber auch für die Constante C den ermittelten Ausdruck liefert

Eine zu diesem Ziele unmittelbar führende Annahme wäre nun die, dass die Intensität der von einem elektrischen Theilchen e ausgehenden Spannung gegen ein anderes e' vermehrt oder vermindert werde, je nachdem dasselbe eben in einer annähernden oder in einer dieser entgegengesetzten Bewegung gegen letzteres begriffen ist. Und zwar müsste die Vermehrung oder Verminderung proportional der betreffenden Geschwindigkeitscomponente genommen werden. Denn unter dieser Voraussetzung erhielte man für das partielle Potential den Ausdruck

$$\Pi = \frac{ee'}{r}\left(1 \pm \frac{u}{\alpha}\cos\theta\right)\left(1 \pm \frac{u'}{\alpha}\cos\theta'\right)$$

und für das totale

$$P = \frac{4ee'}{\alpha^2 r}uu'\cos\theta\cos\theta'.$$

Allein dieser Hypothese mangelt die unmittelbare Evidenz, und es müsste daher noch der Nachweis geliefert werden, wie die blosse Bewegung der elektrischen Masse eine solche Aenderung ihrer Spannungsverhältnisse hervorzubringen im Stande sei.

Da ein solcher Nachweis offenbar sehr schwer zu führen sein würde, ohne eine mechanische Theorie der elektrischen Wirkungen überhaupt vorauszusetzen, so war es natürlich, dass man einen Versuch machte mit der Annahme, jene Einwirkung der Bewegung möge sich zu allernächst

nicht direct auf die Spannung, sondern unmittelbar auf die Entfernung r beziehen, und so erst mittelbar jene Spannungsänderungen hervorrufen. Diese erst vor Kurzem von Riemann*) entwickelte Hypothese findet eine starke Stütze in dem merkwürdigen Umstand, dass sie für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Spannung genau die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ergiebt.

Die der Deduction Riemann's zu Grunde liegende Annahme beschränkt sich auf den einen Satz, dass die von einem elektrischen Theilchen ausgehende Spannung zu ihrer Verbreitung im Raume Zeit brauche, und dass die Geschwindigkeit dieser Verbreitung eine constante Grösse sei. Die Deduction Riemann's ist aber, wenigstens in der vorliegenden Ausführung, nicht genügend, und man findet bei näherer Betrachtung zudem, dass die angenommene Basis der Deduction eine zu beschränkte sei.

Denn nehmen wir an, dass im Moment t (s. Tafel IV, Fig. 5) die beiden elektrischen Theilchen e und e' sich in ξ und ξ' im Zustande der Ruhe befinden, so wird das Potential sein:

$$Q = \frac{ee'}{r}.$$

Lassen wir aber e und e' im Bewegungszustande sein, derart, dass e sich in der Richtung von η nach ξ mit der Geschwindigkeit u, und e' sich in der Richtung von η' gegen ξ' mit der Geschwindigkeit u' bewege, und dass im selben Moment t, e in ξ und e' in ξ' eintreffe, so wird das obige Potential infolge dieses Bewegungszustandes allerdings eine Aenderung erfahren müssen, wenn vorausgesetzt wird, dass die Wirkung von e' auf e und von e auf e' zu ihrer Fortpflanzung eine gewisse Zeit brauche.

Denn setzen wir die betreffende Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich α, so kommt im Moment t im Punkte ξ ein Impuls an, welcher von e' in einem vorausgegangenen Moment $t-\tau'$ ausgesendet wurde, als sich dasselbe noch in η' befand.

Die Distanz $\eta'\xi'$ bestimmt sich aus der Betrachtung, dass während derselben Zeit $\tau' e'$ mit der Geschwindigkeit u' von η' nach ξ', der von e' im Punkte η' ausgesendete Impuls aber mit der Geschwindigkeit α von η' nach ξ gekommen sein müsse.

Dieser in ξ eintreffende Impuls steht der Stärke nach aber im Verhältniss von $\frac{1}{r'} : \frac{1}{r}$ zu jenem, welcher stattgefunden hätte, wenn e' sich fortwährend in ξ' befunden hätte — wenn man die Distanz $\eta'\xi$ mit r' bezeichnet. Derselbe hat überdies die Richtung r' statt die von r, daher man noch mit dem Cosinus des Winkels o', den r und r' miteinander machen, zu multipliciren hat, um den Effect in der Richtung r zu erhalten. Es hat demnach die Bewegung von e', was die Einwirkung auf e im Moment t betrifft, den

*) Ein Beitrag zur Elektrodynamik von B. Riemann. Pogg. CXXXI, p. 237.

Effect, als ob sich in ξ' an der Stelle von e' eine elektrische Masse e_1' befände, deren Grösse gegeben ist durch die Gleichung:

$$e_1' = e' \frac{r}{r'} \cos o'.$$

Da sich auf das Elektricitätstheilchen e dieselben Betrachtungen anwenden lassen, infolge deren dasselbe bezüglich seiner Wirkung auf e' zur Zeit t durch die elektrische Masse e_1 zu ersetzen ist, wenn $e_1 = e\frac{r}{r_1}\cos o$, und $r_1 = \eta\xi'$ gesetzt wird, so könnte es allerdings scheinen, als ob sich für das Potentiale von e auf e' im Moment t der Ausdruck ergäbe:

$$\Pi = \frac{ee'}{r} \cdot \frac{r^2}{r_1 r'}, \cos o \cos o'.$$

Dieser Ausdruck würde nun freilich zu dem richtigen Werth für das Gesammtpotential zweier Stromelemente führen, aber leider involvirt der zuletzt gemachte Schritt eine unzulässige Voraussetzung. Es wird nämlich dabei stillschweigend angenommen, dass es bei der Wechselwirkung zwischen e und e' nur auf den Ort ankomme, von welchem die Impulse ausgehen und gar nicht auf denjenigen, wo sie aufgenommen werden. Sobald man aber für den Effect, den e von e' erfährt, die Richtung $\eta'\xi$ beibehält, wird das Gesammtpotential gleich Null.

Wenn es daher sehr zweifelhaft erscheint, dass die Annahme einer endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Spannung für sich allein ausreiche, so ist es doch wahrscheinlich geworden, dass die Einführung dieses Gedankens für die Lösung der vorliegenden Aufgabe ein sehr wichtiger Schritt gewesen ist, und dass es nur einer gewissen Modification bedürfen möge, um zum Ziele zu gelangen.

Eine solche Modification könnte man in der Annahme erblicken, dass die Intensität der Spannung, welche sich an e' von Seite des e manifestirt, proportional sei der Geschwindigkeit, mit welcher die von e ausgegangenen Impulse in e' eintreffen. Denn dadurch würde das Potential des Ruhezustandes:

$$Q = \frac{ee'}{r} \text{ in } \Pi = \frac{ee'}{r}\left(\frac{\alpha + u\cos\theta + u'\cos\theta'}{\alpha}\right)^2$$

übergehen. Dieses führt ohne Weiteres auf die richtige Formel für das Gesammtpotential, und es findet sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α der Werth der bekannten Weber'schen Constante c, also 59320 Meilen in der Secunde.

Aber auch diese Hypothese trifft der Vorwurf der mangelnden Evidenz, der Unzulänglichkeit für eine rationelle Ausdeutung. Wir wenden uns daher schliesslich zu einer anderen, welche dieser Vorwurf weit weniger zu treffen scheint.

Diese Hypothese nun, welche auch nach sonstigen Analogien als nicht unannehmbar erscheinen dürfte, besteht in Folgendem:

„Ein elektrisches Theilchen sendet fortwährend nach allen Richtungen periodische Impulse aus, welche sich mit constanter Geschwindigkeit im Raume fortpflanzen. Treffen dieselben bei ihrer Verbreitung auf ein anderes elektrisches Theilchen, so bewirken sie eine Anziehung oder Abstossung zwischen beiden elektrischen Theilchen im Sinne des Coulomb'schen Gesetzes.

Die Intensität der Spannung aber, mit welcher das erstere Theilchen auf das letztere wirkt, hängt nicht nur von der Stärke der einzelnen Impulse, sondern auch von der Anzahl derselben, die während der Zeiteinheit bei letzterem ankommen, ab, und zwar derart, dass sie dieser Anzahl proportional sei."

Bezeichnen wir also den Abstand der beiden elektrischen Theilchen e und e' mit r, die in r fallenden Geschwindigkeitscomponenten derselben, $u \cos\theta$ und $u' \cos\theta'$, mit v und v', nehmen der Einfachheit halber an, dass sowohl v als v' die Distanz r zu vermindern streben, und bestimmen wir nun den Einfluss, welchen beide Geschwindigkeiten v und v' auf die Anzahl der in der Zeiteinheit in e' von Seite des e anlangenden Impulse ausüben.

Zu diesem Ende betrachten wir eine auf r senkrechte Ebene AB im Abstande ϱ vom anfänglichen Orte des e, und bezeichnen das Zeitintervall zweier unmittelbar aufeinander folgender Impulse, welche in AB seitens e ankommen, wenn dieses sich im Ruhezustande befindet, mit δ, im Bewegungszustande aber mit δ_1.

Im letzteren Falle sendete e seinen ersten Impuls vom Ausgangspunkte ab; seinen zweiten nach der Zeit δ aber von einem Punkte, welcher um $v\delta$ näher an AB lag. Die Distanz, welche dieser zweite Impuls zu durchlaufen hat, ist daher $\varrho - v\delta$. Die Zeit τ, während welcher ϱ durchlaufen wird, ist $\frac{\varrho}{\alpha}$, wo α die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Impulse bedeutet. Daher die Zeit τ_1, während welcher $\varrho - v\delta$ durchlaufen wird, gleich $\frac{\varrho - v\delta}{\alpha}$, und die Differenz $\tau - \tau_1 = \frac{v\delta}{\alpha}$.

Um diese Differenz aber folgen die Impulse in AB schneller auf einander, als vordem im Ruhezustand. Es ist demnach $\delta_1 = \delta\left(1 - \frac{v}{\alpha}\right)$ und die Anzahl der in der Zeiteinheit in AB anlangenden Impulse:

$$n = \frac{1}{\delta_1} = \frac{1}{\delta\left(1 - \frac{v}{\alpha}\right)}.$$

Diese Anzahl von Impulsen würde nun in der Zeiteinheit auf e' treffen, wenn es in Ruhe wäre. Vermöge seiner Bewegung aber empfängt es statt n Impulse, die Anzahl von n' Impulsen. Denn hatte der zuerst in e' anlangende Impuls den Weg $\varrho' = r - \varrho$ zu durchlaufen und brauchte dazu

die Zeit $\frac{\varrho'}{\alpha}$, so hat der zweite nur mehr den Weg $\varrho'-v'\delta'$ zu durchlaufen, wozu er die Zeit $\frac{\varrho'-v'\delta'}{\alpha}$ brauchen wird.

Die Differenz beider Zeiten ist:

$$\frac{v'\delta'}{\alpha}.$$

Um diese Differenz $\frac{v'\delta'}{\alpha}$ wird nun das Zeitintervall je zweier Impulse vermindert; es wird also

$$\delta'=\delta_1-\frac{v'\delta'}{\alpha},$$

und

$$\delta'=\delta\,\frac{1-\frac{v}{\alpha}}{1+\frac{v'}{\alpha}},$$

demnach

$$n'=\frac{1}{\delta'}=\frac{1}{\delta}\cdot\frac{1+\frac{v'}{\alpha}}{1-\frac{v'}{\alpha}}.$$

Machen wir nun mit **Riemann** die sehr wahrscheinliche Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten, womit sich die elektrischen Massen im Strome bewegen, immer sehr klein bleiben gegen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α der elektrischen Spannung, so darf man auch setzen:

$$n'=\frac{1}{\delta}\left(1+\frac{v}{\alpha}+\frac{v'}{\alpha}+\frac{vv'}{\alpha^2}+\ldots\right)$$

und dieser Werth giebt für die Potentialformel zweier Stromelemente den Ausdruck:

$$P=\frac{4ee'uu'ds\,ds'}{\alpha^2 r}\cos\theta\cos\theta'=\frac{4\,eu\,e'u'\,ds\,ds'}{\alpha^2 r}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{dr}{ds'}.$$

Diese Formel giebt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit α den Werth $\frac{c}{\sqrt{2}}=41949$ geographische Meilen, also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen. Man kann aus ihr die bewegende Kraft, welche zwischen zwei Elementen zweier geschlossener Ströme thätig ist, ableiten dadurch, dass man die Analyse, welche vom **Ampère**'schen Gesetz zur Potentialformel führt, einfach umkehrt. Durch besondere Kürze scheint sich folgende Ableitung zu empfehlen.

Man differenzire P in dem Sinne, dass man den Leiter S parallel mit sich selbst in beliebiger Richtung σ um das unendlich kleine Stück $d\sigma$ verschiebe. Dabei geht r über in

$$r+dr=r+\frac{dr}{d\sigma}d\sigma,$$

und man hat

$$dP=\frac{4eue'u'}{\alpha^2}\int\!\!\int d\sigma\,ds\,ds'\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{d\sigma ds'}+\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{d\sigma ds}-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right].$$

Es ist aber:

$$\int\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d^2r}{ds\,ds'}ds'=\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds}\right]_{s'_0}^{s'_0}-\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{d\sigma ds'}-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds',$$

$$\int\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{d^2r}{ds\,ds'}ds'=\left[\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds'}\right]_{s_0}^{s_0}-\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{d\sigma\,ds}-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds.$$

Da die Ausdrücke rechts des Gleichheitszeichens vor den Integralen verschwinden, hat man auch

$$\int\!\!\int\left(\frac{2}{r}\frac{d^2r}{ds\,ds'}-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds\,ds'\frac{dr}{d\sigma}d\sigma=$$

$$=-\int\!\!\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{d\sigma ds'}+\frac{1}{r}\frac{dr}{ds'}\frac{d^2r}{d\sigma\,ds}-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\sigma}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds\,ds'\,d\sigma$$

und somit

$$R=-\frac{dP}{dr}=\frac{4eue'u'}{\alpha^2}\int\!\!\int\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right).$$

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.)

V. Ueber ein Problem der sphärischen Geometrie. Von Dr. ENNEPER.

Im VII. Jahrgang dieser Zeitschrift ist die Lösung des Problems enthalten:

> Die Relation zwischen den Elementen zweier Ellipsen zu finden, von denen die eine einem unregelmässigen Polygon umschrieben, die andere demselben eingeschrieben ist.

Durch ziemlich einfache analytische Betrachtungen lässt sich diese Aufgabe für zwei sphärische Ellipsen behandeln, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Auf einer Kugelfläche mit dem Radius r seien zwei feste Punkte A und A' gegeben; ist O die Mitte des Verbindungsbogens dieser Punkte, so sei $OA=OA'=\varepsilon$. Ist P ein Punkt einer sphärischen Ellipse, so ist die Summe seiner Distanzen von den Punkten A und A', gemessen durch Bogen grösster Kreise gleich 2α, wo α eine Constante bedeutet. Bezeichnet man die sphärische Distanz OP durch ϱ und durch ϑ den Winkel POA', so findet bekanntlich die Gleichung statt:

$$1)\qquad cot^2\varrho=cos^2\vartheta\,.\,cot^2\alpha+sin^2\vartheta\,cot^2\beta,$$

wenn $cos\,\alpha=cos\,\varepsilon\,cos\,\beta$ gesetzt wird. Um den Punkt O sei ein kleiner sphärischer Kreis beschrieben, dessen Radius gleich a ist. Durch P werde der Bogen eines grössten Kreises gezogen, welcher in Q normal steht auf dem Bogen AA' und den kleinen sphärischen Kreis im Punkte P_1 trifft.

Bezeichnet man durch ψ den Winkel, welchen der Bogen OP_1 mit dem Bogen OA' bildet, so geben die beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke OQP und OQP_1:

$$\cos^2 OQ = \frac{\cos^2 \varrho}{1-\sin^2\vartheta \sin^2\varrho}, \quad \cos^2 OQ = \frac{\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha + \cos^2\psi}.$$

Hieraus folgt:

$$\cot\varrho \cos\psi = \cot\alpha \cos\vartheta.$$

Die vorstehende Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 1) giebt:

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot^2\varrho &= \frac{1}{\tan^2\alpha\cos^2\psi + \tan^2\beta\sin^2\psi}, \\ \tan\vartheta &= \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\tan\psi. \end{aligned} \right.$$

Der Mittelpunkt der Kugelfläche werde zum Anfangspunkt orthogonaler Coordinaten genommen, die Ebene des Bogens AA' sei die xz-Ebene und O der Punkt, in welchem die positive z-Axe die Kugelfläche trifft. Sind x, y, z die Coordinaten von P, so lassen sich dieselben durch ϱ und ϑ auf folgende Weise ausdrücken:

$$x = r\sin\varrho\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varrho\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta.$$

Führt man in die vorstehenden Gleichungen ψ statt ϱ und ϑ mittelst der Gleichungen 2) ein, so gehen dieselben über in:

$$\frac{x}{\tan\alpha\cos\psi} = \frac{y}{\tan\beta\sin\psi} = z = \frac{r}{\sqrt{\{1+\tan^2\alpha\cos^2\psi + \tan^2\beta\sin^2\psi\}}}.$$

Der Winkel ψ ist nach Analogie einer planen Ellipse die excentrische Anomalie des Punktes P. Führt man statt ψ das Supplement 2φ dieses Winkels ein, setzt $\psi = \pi - 2\varphi$, so ergeben sich für x, y, z folgende Gleichungen:

$$3) \quad \frac{x}{-\tan\alpha\cos 2\varphi} = \frac{y}{\tan\beta\sin 2\varphi} = z$$
$$= \frac{r}{\sqrt{\{1+\tan^2\alpha\cos^2\varphi + \tan^2\beta\sin^2 2\varphi\}}}.$$

Auf dem Umfang der sphärischen Ellipse seien die beiden Punkte P und P' durch die Supplemente 2φ und $2\varphi'$ ihrer excentrischen Anomalien bestimmt. Legt man durch die Punkte P und P' einen grössten Kreis, so ist nach 3) die Gleichung der Ebene desselben:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -\tan\alpha\cos 2\varphi, & \tan\beta\sin 2\varphi, & 1 \\ -\tan\alpha\cos 2\varphi', & \tan\beta\sin 2\varphi', & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$4) \quad \frac{x}{\tan\alpha}\cos(\varphi'+\varphi) - \frac{y}{\tan\beta}\sin(\varphi'+\varphi) + z\cos(\varphi'-\varphi) = 0.$$

Um den Mittelpunkt der Kugelfläche werde das Coordinatensystem so gedreht, dass der Punkt O mit einem Punkte O' zusammenfällt, dessen Coordinaten in Beziehung auf das primitive System ξ, η, ζ sind. Bezeichnet

man die Coordinaten eines Punktes der Kugelfläche im primitiven System durch x, y, z und im zweiten System durch x', y', z', so finden die Gleichungen statt:

$$5)\quad \begin{cases} x' = lx + l'y + l''z, \\ y' = mx + m'y + m''z, \\ z' = nx + n'y + n''z, \end{cases}$$

wo zwischen l, m, n etc. die Gleichungen stattfinden:

$$6)\quad \begin{cases} l^2 + l'^2 + l''^2 = 1, & mn + m'n' + m''n'' = 0, \\ m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, & ln + l'n' + l''n'' = 0, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 = 1, & lm + l'm' + l''m'' = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung der berührenden Ebene im Punkte O', bezogen auf das System der x', y', z', ist $z' = r$. Wegen der dritten Gleichung 5) ist diese Gleichung im System der x, y, z:

$$7)\quad nx + n'y + n''z = r.$$

Die Gleichung der berührenden Ebene im Punkte O', dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, ist auch:

$$x\xi + y\eta + z\zeta = r^2.$$

Diese Gleichung muss mit 7) identisch sein. Hieraus folgt:

$$8)\quad n = \frac{\xi}{r}, \quad n' = \frac{\eta}{r}, \quad n'' = \frac{\zeta}{r}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen gehen die Gleichungen 6) über in:

$$9)\quad \begin{cases} l^2 + l'^2 + l''^2 = 1, & lm + l'm' + l''m'' = 0, \\ m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, & l\xi + l'\eta + l''\zeta = 0, \\ & m\xi + m'\eta + m''\zeta = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch ω den Winkel, welchen die Axen der y und y' einschliessen, oder auch, welchen die Ebene der xz mit der Ebene der $x'z'$ bildet, so ist:

$$m' = \cos\omega.$$

Aus der vorstehenden Gleichung und den Gleichungen 9) findet man:

$$10)\quad \begin{cases} l(\xi^2 + \zeta^2) = \frac{1}{r}\{r^2\zeta\cos\omega \pm \xi\eta\Delta\}, \\ l' \qquad = \mp\frac{\Delta}{r}, \\ l''(\xi^2 + \zeta^2) = \frac{1}{r}\{-r^2\xi\cos\omega \pm \zeta\eta\Delta\}, \\ m(\xi^2 + \zeta^2) = -\xi\eta\cos\omega \pm \zeta\Delta, \\ m' \qquad = \cos\omega, \\ m''(\xi^2 + \zeta^2) = -\zeta\eta\cos\omega \mp \zeta\Delta, \\ \Delta = \sqrt{\{(\xi^2 + \zeta^2)\sin^2\omega - \eta^2\cos^2\omega\}}. \end{cases}$$

Sind ξ, η, ζ, ω gegeben, so sind sämmtliche Coefficienten der Substitution 5) mittelst der Gleichungen 8) und 10) bestimmt. Nimmt man die Coordinaten x, y, z und x', y', z' gleichzeitig positiv, so gelten in den Glei-

chungen 10) die oberen Zeichen. Liegt z. B. der Punkt O' in der yz-Ebene, so ist

$$\xi = 0, \ \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichungen 5) und 10) geben dann

$$m = \pm 1, \quad m' = 0, \quad m'' = 0, \quad \text{also } y' = \pm x.$$

Zufolge der Gleichungen 3) kann die sphärische Ellipse mit dem Mittelpunkt O und den Halbaxen α, β als Durchschnitt der beiden folgenden Flächen angesehen werden:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{tang^2\,\alpha} + \frac{y^2}{tang^2\,\beta} = z^2.$$

Der Punkt O' werde zum Mittelpunkt einer sphärischen Ellipse mit den Halbaxen α' und β' angenommen. Liegt die Axe α' in der $x'z'$-Ebene und der Punkt O' in der Axe der z', so hat man für einen Punkt der Curve die Gleichungen:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2, \quad \frac{x'^2}{tang^2\,\alpha'} + \frac{y'^2}{tang^2\,\beta'} = z'^2.$$

Mittelst der Gleichungen 5) gehen die vorstehenden Gleichungen über in:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$11)\quad \left(\frac{lx + l'y + l''z}{tang\,\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{mx + m'y + m''z}{tang\,\beta'}\right)^2 = (nx + n'y + n''z)^2.$$

Sei x_1, y_1, z_1 ein Punkt der Kegelfläche 11) und:

$$lx_1 + l'y_1 + l''z_1 = L, \quad mx_1 + m'y_1 + m''z_1 = M, \quad nx_1 + n'y_1 + n''z_1 = N.$$

Zwischen L, M, N findet dann nach 11) die Gleichung statt:

$$12)\quad \frac{L^2}{tang^2\,\alpha'} + \frac{M^2}{tang^2\,\beta'} = N^2.$$

Die Gleichung der berührenden Ebene zur Kegelfläche 11) im Punkte (x_1, y_1, z_1) ist:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} & x\left(\frac{lL}{tang^2\,\alpha'} + \frac{mM}{tang^2\,\beta'} + nN\right) + y\left(\frac{l'L}{tang^2\,\alpha'} + \frac{m'M}{tang^2\,\beta'} + n'N\right) \\ & \qquad + z\left(\frac{l''L}{tang^2\,\alpha'} + \frac{m''M}{tang^2\,\beta'} + n''N\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese Ebene schneidet die Kugelfläche in einem grössten Kreise; soll derselbe mit dem Verbindungsbogen der Punkte P und P' zusammenfallen, so müssen die Gleichungen 4) und 13) identisch sein. Bedeutet g eine Umbestimmte, so findet man:

$$\frac{lL}{tang^2\,\alpha'} + \frac{mM}{tang^2\,\beta'} + nN = g\,tang\,\beta\,cos\,(\varphi' + \varphi),$$

$$\frac{l'L}{tang^2\,\alpha'} + \frac{m'M}{tang^2\,\beta'} + n'N = -\,g\,tang\,\alpha\,sin\,(\varphi' + \varphi),$$

$$\frac{l''L}{tang^2\,\alpha'} + \frac{m''M}{tang^2\,\beta'} + n''N = g\,tang\,\alpha\,tang\,\beta\,cos\,(\varphi' - \varphi).$$

Mittelst der Gleichungen 6) geben die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{1}{g}\frac{L}{tang^2\alpha'} = l\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - l'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi), \\ + l''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi),$$

$$\frac{1}{g}\frac{M}{tang^2\beta'} = m\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - m'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi), \\ + m''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi),$$

$$\frac{1}{g}N = n\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - n'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi) \\ + n''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi).$$

Setzt man diese Werthe von L, M und N in die Gleichung 12), so folgt:

$$tang^2\alpha'\{l\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - l'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi) + l''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi)\}^2 \\ + tang^2\beta'\{m\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - m'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi) + m''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi)\}^2 \\ = \{n\ tang\,\beta\cos(\varphi'+\varphi) - n'\ tang\,\alpha\sin(\varphi'+\varphi) + n''\ tang\,\alpha\ tang\,\beta\cos(\varphi'-\varphi)\}$$

oder

14)

$$tang^2\alpha'\{(l+l''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta - (tang\,\varphi + tang\,\varphi')\,l'\ tang\,\alpha \\ - (l - l''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta\ tang\,\varphi\ tang\,\varphi'\}^2 \\ + tang^2\beta'\{(m+m''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta - (tang\,\varphi + tang\,\varphi')\,m'\ tang\,\alpha \\ - (m - m''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta\ tang\,\varphi\ tang\,\varphi'\}^2 \\ = \{(n+n''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta - (tang\,\varphi + tang\,\varphi')\,n'\ tang\,\alpha \\ - (n - n''\ tang\,\alpha)\ tang\,\beta\ tang\,\varphi\ tang\,\varphi'\}^2.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so folgt:

$$\frac{H'\partial\varphi'}{\cos^2\varphi'} + \frac{H\partial\varphi}{\cos^2\varphi} = 0.$$

Setzt man in H' für $tang\,\varphi'$ ihren Werth aus 14) in Function von $tang\,\varphi$ und ebenso in H für $tang\,\varphi$ ihren Werth in Function von $tang\,\varphi'$, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \pm\frac{\partial\varphi'}{\sqrt{f(\varphi')}}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 6) findet man:

$$15)\ \left\{\begin{array}{l} f(u) = tang^2\alpha'\{-m\ tang\,\alpha\cos 2u + m'\ tang\,\beta\sin 2u + m''\}^2 \\ \quad + tang^2\beta'\{-l\ tang\,\alpha\cos 2u + l'\ tang\,\beta\sin 2u + l''\}^2 \\ - tang^2\alpha'\ tang^2\beta'\{-n\ tang\,\alpha\cos 2u + n'\ tang\,\beta\sin 2u + n''\}^2. \end{array}\right.$$

Da φ und φ' gleichzeitig wachsen, so ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} = \frac{\partial\varphi'}{\sqrt{f(\varphi')}}.$$

Diese Gleichung integrirt giebt:

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} = \int_{\lambda}^{\varphi'}\frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}},$$

oder

$$16)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} = \int_0^{\varphi'}\frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} - \int_0^{\lambda}\frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}},$$

wo λ der Werth von φ' ist, welcher dem Werthe $\varphi = 0$ entspricht. Setzt man in 14) $\varphi = 0$, so folgt:

$$17)\quad \left\{\begin{aligned} &\tang^2 \alpha' \,\{ (l + l'' \tang \alpha) \tang \beta - l' \tang \alpha \tang \lambda \}^2 \\ &+ \tang^2 \beta' \,\{ (m + m'' \tang \alpha) \tang \beta - m' \tang \alpha \tang \lambda \}^2 \\ &= \{ (n + n'' \tang \alpha) \tang \beta - n' \tang \alpha \tang \lambda \}^2. \end{aligned}\right.$$

Wegen der Gleichung 15) ist:

$$\int_0^{q\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} = q \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}},$$

$$\int_0^{q\pi+\varphi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} = \int_0^{\varphi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} + q \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}}.$$

Soll nun der Ellipse mit dem Mittelpunkt O ein p-Eck von q Umläufen eingeschrieben werden können, welches gleichzeitig der Ellipse mit dem Mittelpunkt O' umschrieben ist, so erhält man aus 16) auf bekannte Weise die Relation:

$$18)\quad \int_0^{\lambda} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}} = \frac{q}{p} \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\sqrt{f(u)}},$$

wo λ durch die Gleichung 17) bestimmt ist. Für den Fall zweier Kreise leitet man aus 17) und 18) ohne Schwierigkeit die von Richetot (Crelle's Journ., T. V) gegebenen Gleichungen ab, was hier der Kürze halber unterbleiben möge.

VI. Zwei Sätze über eine gewisse Zerlegung der Zahlen in unendliche Producte.

In Euler's „*Introductio in analysin infinitorum*“, im Abschnitte „*De partitione numerorum*“ findet sich, §. 328, das Product:

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^2)^{\lambda}\ldots,$$

dessen Werth daselbst, für $x < 1$, gleich $\frac{1}{1-x}$ gefunden wird.

Euler benutzt diese Gleichung nur dazu, die Zerlegung der ganzen Zahlen in die Summanden $1, 2, 4, 16, \ldots 2^{\lambda}, \ldots$ nachzuweisen.

Es ruht aber auf dieser Gleichung eine bemerkenswerthe Darstellungsweise von Zahlengrössen in der Form unendlicher Producte, welche von zahlentheoretischem Interesse ist, in vieler Hinsicht der Darstellung der Zahlen als einfache Kettenbrüche:

$$1 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \ldots}}$$

gegenüber gestellt werden kann, mit ihr sogar einige Anknüpfungspunkte gemein hat und vor allen Dingen, wie bei den Kettenbrüchen, auf alle Zahlengrössen sich bezieht und für jede bestimmte Zahlengrösse eine einzige, bestimmte ist.

Dies ist die Darstellung der Zahlengrössen $A > 1$ in der Form:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen sind, die unter einander den Grössenbedingungen unterworfen sind:

$$b \geqq aa, \quad c \geqq bb, \quad d \geqq cc. \ \ldots$$

Es mag hier genügen, die wesentlichsten Gesetze dieser Darstellungen in den beiden folgenden Theoremen zu geben.

Theorem I. Man kann eine jede Zahlengrösse $A > 1$ und zwar nur auf eine einzige Weise darstellen als Product:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen sind, so beschaffen, dass:

$$b \geqq aa, \quad c \geqq bb, \quad d \geqq cc. \ \ldots$$

Beweis. Wir wollen zuerst zeigen, dass, wenn die gegebene Zahlengrösse A in jener Form darstellbar, sie es nur auf eine Weise ist.

Aus

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\ldots$$

ergiebt sich zunächst:

$$A > 1 + \frac{1}{a};$$

dann aber, da

$$b \geqq aa, \quad c \geqq a^4, \ d \geqq a^8 \ldots,$$

ist auch:

$$A \leqq \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{aa}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{a^{2\lambda}}\right)\ldots$$

d. i. (nach Euler):

$$A \leqq 1 + \frac{1}{a-1}.$$

Man hat also:

$$a + 1 > \frac{A}{A-1}, \quad a \leqq \frac{A}{A-1}.$$

Diesen beiden Bedingungen genügt aber nur eine ganze Zahl a; man hat, wenn unter $E(x)$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl verstanden wird:

$$a = E\left(\frac{A}{A-1}\right).$$

Wird nun:

$$\frac{Aa}{a+1} = B$$

gesetzt, so ergiebt sich aus B, welche Grösse offenbar ebenfalls > 1 ist, ebenso b, nämlich:

$$b = E\left(\frac{B}{B-1}\right),$$

und führt man allgemein

$$1) \qquad N = \frac{Mm}{m+1}$$

ein, so hat man die Gleichungen:

$$2) \qquad a = E\left(\frac{A}{A-1}\right); \; b = E\left(\frac{B}{B-1}\right); \; c = E\left(\frac{C}{C-1}\right) \ldots$$

Aus 1) und 2) folgt, dass die $a, b, c, \ldots$ ganz bestimmte, ohne Zweideutigkeit aus A sich ergebende ganze Zahlen sind.

Nun ist zu zeigen, dass, wenn bei gegebener Zahl $A > 1$ die ganzen Zahlen $a, b, c, \ldots$ den Gleichungen 1) und 2) entsprechend bestimmt werden, sowohl:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \ldots,$$

als auch:

$$b \geqq aa, \quad c \geqq bb, \quad d \geqq cc. \ldots$$

Wir wollen zunächst den letzten Punkt erledigen, weil der erste damit zusammenhängt.

Man hat:

$$b = E\left(\frac{B}{B-1}\right) \text{ und } B = \frac{Aa}{A-1};$$

daher:

$$b = E\left(\frac{Aa}{a[A-1]-1}\right).$$

Ferner

$$a = E\left(\frac{A}{A-1}\right) = \frac{A}{A-1} - \alpha,$$

wo α eine positive Zahlengrösse, die kleiner als 1 ist.

Man findet daraus:

$$A = \frac{a+\alpha}{a+\alpha-1}.$$

Setzt man diesen Werth in den letzten Ausdruck für b ein, so folgt:

$$b = E\left(\frac{a\,[a+\alpha]}{1-\alpha}\right).$$

Hieraus sieht man unmittelbar, wegen der Bedeutung von α, dass:

$$b \geqq aa.$$

Ganz ebenso wird gezeigt, dass

$$c \geqq bb, \quad d \geqq cc. \ldots$$

Bemerkt man ausserdem, dass die ersten Zahlen der Reihe $a, b, c, \dots$ nur so oft $= 1$ sind, als die höchste in A enthaltene Potenz von 2 beträgt, so folgt aus dem soeben Bewiesenen, dass diese Zahlen von einer gewissen an sehr stark ins Unendliche zunehmen. — Man setze nun, wenn n eine beliebige von 1 verschiedene Zahl jener Reihe und m die ihr voraufgehende ist:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\dots\left(1+\frac{1}{m}\right)=X,$$

dann ist:

$$A = XN.$$

Aus

$$n = E\left(\frac{N}{N-1}\right)$$

folgt aber:

$$N > 1+\frac{1}{n}, \quad N \leqq 1+\frac{1}{n-1};$$

daher

$$A > X, \quad A < X+\frac{A}{n-1}.$$

Da nun n beliebig gross angenommen werden kann, so ist:

$$A = \lim X = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\dots$$

Hiermit ist der Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

Ich will beispielsweise die Darstellungen einiger Quadratwurzeln in der Form unserer Producte anführen, welche bei gehöriger Induction ein einfaches Gesetz offenbaren, nach welchem die Zahlen $a, b, c, \dots$ ins Unendliche wachsen. Man findet:

$$\text{I.} \qquad \sqrt{2} = \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\left(1+\frac{1}{577}\right)\left(1+\frac{1}{667967}\right)\dots$$

Man bemerkt, dass:

$$17 = 2 \,.\, 3^2 - 1, \quad 577 = 2.17^2 - 1, \quad 667967 = 2.577^2 - 1.$$

$$\text{II.} \qquad \sqrt{3} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{97}\right)\left(1+\frac{1}{17617}\right)\dots$$

$$7 = 2.2^2 - 1, \quad 97 = 2.7^2 - 1, \quad 17617 = 2.97^2 - 1;$$

$$\text{III.} \quad \sqrt{5} = 2\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{161}\right)\left(1+\frac{1}{51841}\right)\left(1+\frac{1}{5374978561}\right)\dots$$

$$161 = 2.9^2 - 1, \quad 51841 = 2.161^2 - 1, \quad 5374978561 = 2.51841^2 - 1;$$

$$\text{IV.} \quad \sqrt{15} = 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{31}\right)\left(1+\frac{1}{1921}\right)\left(1+\frac{1}{7380481}\right)\dots$$

$$31 = 2.4^2 - 1, \quad 1921 = 2.31^2 - 1, \quad 7380481 = 2.1921^2 - 1.$$

In diesen vier Beispielen tritt also bei der Zahlenreihe:

$$a, b, c, d, \dots$$

von einem bestimmten Gliede k an, das Gesetz hervor:

$$l = 2kk - 1, \quad m = 2ll - 1, \quad n = 2mm - 1 \dots$$

Theorem II. Ist A eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$, so hat die unter I nachgewiesene Entwickelung von A die specielle Form:

$$A = \left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots$$
$$\left(1+\frac{1}{i}\right)\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{kk}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^{2^{\lambda}}}\right)\cdots$$

oder anders ausgedrückt: von einem bestimmten Gliede k an ist in der Reihe: $a, b, c, d, \ldots$ einfach:

$$l = kk, \quad m = ll, \quad n = mm.$$

Beweis. Seien p, q relativ prim unter einander.

Man setze:

$$1) \quad \begin{cases} pa = \delta p', & q\,(a+1) = \delta q'; \\ p'b = \delta' p'', & q'\,(b+1) = \delta' q''; \\ p''c = \delta'' p''', & q''\,(c+1) = \delta'' q'''; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

wo unter δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von pa und $q(a+1)$, unter δ' der grösste gemeinschaftliche Theiler von $p'b$ und $q'(b+1)$ u.s.w. zu denken ist.

Man hat alsdann:

$$2) \quad A = \frac{p}{q}, \quad B = \frac{p'}{q'}, \quad C = \frac{p''}{q''}, \ldots$$

Aus 1) folgt:

$$3) \quad \begin{cases} \delta\,(p'-q') = a\,(p-q) - q \\ \delta'(p''-q'') = b\,(p'-q') - q' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Betrachten wir nun die Zahlenreihe:

$$4) \quad p-q, \quad p'-q', \quad p''-q'', \ldots$$

Aus 2) geht, da $A > 1$, $B > 1$, $C > 1, \ldots$ hervor, dass alle Glieder derselben positive ganze Zahlen sind; aus 3) erkennt man, dass zwei benachbarte Glieder derselben relativ prim zu einander sind; denn würden beispielsweise $p-q$, $p'-q'$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so wäre derselbe auch Theiler von q und p. — Ferner nehmen die Glieder unserer Reihe 4) bis zu einer gewissen Grenze ab; denn aus:

$$a = E\left(\frac{p}{p-q}\right)$$

folgt:

$$a \leqq \frac{p}{p-q},$$

daher mit Berücksichtigung der ersten Gleichung 3):

$$\delta\,(p'-q') \leqq p-q;$$

um so mehr:

$$p'-q' \leqq p-q.$$

Ganz ähnlich erkennt man, dass:

$$p'' - q'' \leqq p' - q', \quad p''' - q''' \leqq p'' - q'' \text{ etc.}$$

Die nachgewiesene Grenze, bis zu welcher die Glieder der Reihe 4) abnehmen, kann aber keine andere sein, als die Einheit; denn wäre sie grösser als 1, so hätte man zwei gleiche, von 1 verschiedene, benachbarte Glieder der Reihe 4), von denen soeben gezeigt worden ist, dass sie relativ prim zu einander sind.

Man hat also für ein gewisses λ:

$$p^{(\lambda)} - q^{(\lambda)} = p^{(\lambda+1)} - q^{(\lambda+1)} = \ldots = 1.$$

Setzt man:

$$p^{(\lambda)} = k,$$

so ist

$$q^{(\lambda)} = k - 1$$

und man hat:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{i}\right) K,$$

wo

$$K = \frac{p^{(\lambda)}}{q^{(\lambda)}} = \frac{k}{k-1};$$

nach unserer Quelle hat man aber:

$$K = \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \ldots,$$

somit:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{i}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{k^{2\lambda}}\right) \ldots,$$

was zu beweisen war.

Nehmen wir als Beispiel die Zahl:

$$A = \frac{164511}{87880}.$$

Man hat:

$$a = E\left(\frac{164511}{76631}\right) = 2,$$

$$B = \frac{164511.2}{87880.3} = \frac{54837}{43940}, \quad b = E\left(\frac{54837}{10897}\right) = 5;$$

$$C = \frac{54837.5}{43940.6} = \frac{18279}{17576}, \quad c = E\left(\frac{18279}{703}\right) = 26;$$

$$D = \frac{18279.26}{17576.27} = \frac{677}{676},$$

daher:

$$\frac{164511}{87880} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{26}\right)\left(1 + \frac{1}{677}\right)\left(1 + \frac{1}{677^2}\right) \ldots$$

Corollar. Hat man ein Product:

$$A = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) \ldots,$$

in welchem $a, b, c, \ldots$ ganze Zahlen, und $b > aa$, $c > bb$, $d > cc \ldots$, so ist A immer eine Irrationalzahl.

Ich führe als Beispiel die Zahl an:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{aa}\right)\left(1-\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{a^{2^\lambda}}\right)\ldots,$$

wo a eine beliebige ganze Zahl, ausser 1 sei. Der umgekehrte Werth dieser Zahl ist:

$$\left(1+\frac{1}{a-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{a^4-1}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{a^{2^\lambda}-1}\right)\ldots$$

Man findet aber:

$$a^{2^\lambda}-1 > (a^{2^{\lambda-1}}-1)^2;$$

deshalb ist die letzte Zahl und mit ihr die ursprünglich gegebene eine Irrationalzahl.

Berlin. Dr. Georg Cantor.

VII. Ueber einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven. In einen gegebenen Kegelschnitt ist eine Gerade von constanter Länge als Sehne eingetragen, und bei jeder ihrer unendlich vielen möglichen Lagen sind durch ihre Endpunkte Tangenten an den Kegelschnitt gezogen; man sucht den geometrischen Ort des Durchschnitts dieser Tangenten*).

In Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem sei

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

die Gleichung des Kegelschnitts, mithin die Gleichung der Tangente im Punkte xy:

$$Ax\xi + By\eta = 1;$$

bezeichnen nun $x_0\, y_0$ und $x_1\, y_1$ die Endpunkte der Sehne $ST = 2c$ (Taf. IV, Fig. 1) ist und $\xi\eta$ der Tangentendurchschnitt P, so müssen folgende fünf Bedingungen erfüllt werden:

$$1)\qquad Ax_0\xi + By_0\eta = 1,\quad Ax_1\xi + By_1\eta = 1,$$

$$2)\qquad Ax_0^2 + By_0^2 = 1,\quad Ax_1^2 + By_1^2 = 1,$$

$$3)\qquad (x_0-x_1)^2 + (y_0-y_1)^2 = 4c^2.$$

Die Differenz der Gleichungen 1) giebt mit No. 3) zusammen:

$$4)\qquad x_0 - x_1 = \frac{2B\eta}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}},\quad y_0 - y_1 = \frac{-2A\xi}{\sqrt{C(A^2\xi^2 + B^2\eta^2)}},$$

wobei $\frac{1}{c^2} = C$ gesetzt wurde. Ferner erhält man aus der Differenz der Gleichungen 2):

$$\frac{B(y_0+y_1)}{A(x_0+x_1)} = -\frac{x_0-x_1}{y_0-y_1},$$

oder, wenn man rechter Hand die in No. 4) angegebenen Werthe benutzt:

$$\eta(x_0+x_1) - \xi(y_0+y_1) = 0.$$

---

*) Prof. Grunert hat in seinem Archiv (Th 47, S. 477) dieselbe Aufgabe behandelt, jedoch ohne die gefundene Ortsgleichung irgend einer Discussion zu unterwerfen.

Nimmt man hierzu die Summe der Gleichungen 1), nämlich:

$$A\xi(x_0+x_1)+B\eta(y_0+y_1)=2,$$

so hat man zwei Gleichungen mit den Unbekannten x_0+x_1 und y_0+y_1; für letztere findet man:

$$5)\qquad x_0+x_1=\frac{2\xi}{A\xi^2+B\eta^2},\quad y_0+y_1=\frac{2\eta}{A\xi^2+B\eta^2}.$$

Aus den Gleichungen 4) und 5) ergeben sich die Werthe von x_0 und y_0, die man nur in die erste der Gleichungen 2) zu substituiren braucht, um die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η zu erhalten, nämlich:

$$6)\qquad \frac{C}{AB}(A^2\xi^2+B^2\eta^2)(A\xi^2+B\eta^2-1)=(A\xi^2+B\eta^2)^2.$$

Beachtet man noch, dass jede Gleichung von der Form

$$p(q-1)=q^2$$

umgewandelt werden kann in

$$1=\frac{1}{q}+\frac{1}{p-q},$$

so hat man auch statt No. 6):

$$7)\qquad 1=\frac{1}{A\xi^2+B\eta^2}+\frac{1}{A\left(\frac{C}{B}-1\right)\xi^2+B\left(\frac{C}{B}-1\right)\eta^2},$$

und diese Gleichungsform zeigt sofort die hauptsächlichsten Eigenschaften der betrachteten Curve.

a. Die Ellipse. Setzt man wie gewöhnlich $a>b$ voraus, ferner:

$$A=\frac{1}{a^2},\quad B=\frac{1}{b^2},\quad C=\frac{1}{c^2},$$

so gehen die Gleichungen 6) und 7) in die folgenden über:

$$8)\qquad \frac{a^2b^2}{c^2}\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)=\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)^2,$$

$$9)\qquad 1=\frac{1}{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}}+\frac{1}{\frac{b^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\eta^2}{b^2}},$$

deren letzte sich eleganter gestaltet, wenn man mittelst der Formeln

$$\xi=\varrho\cos\vartheta,\quad \eta=\varrho\sin\vartheta,$$

Polarcoordinaten einführt; es wird nämlich:

$$10)\qquad \varrho^2=\frac{1}{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}}+\frac{1}{\frac{b^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}+\frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}}.$$

Wir schreiben dafür einfach:

$$11)\qquad \varrho^2=r^2+r_1^2;$$

es ist dann r der zum Polarwinkel ϑ gehörende Radiusvector der gegebenen Ellipse, r_1 dagegen der demselben Winkel entsprechende Vector eines Hilfskegelschnittes. Dabei müssen drei Fälle unterschieden werden.

Für $c < b$ ist der Hilfskegelschnitt eine Ellipse mit den Halbaxen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2 - c^2}}, \quad b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Nimmt man demgemäss (Taf. IV, Fig. 2) $CA = a$, $CB = b$, $CA_1 = a_1$, $CB_1 = b_1$ und zieht durch C eine beliebige Gerade, welche die erste Ellipse in Q, die zweite in Q_1 schneidet, so erhält man den auf der Verlängerung von OQ liegenden Curvenpunkt P durch Auftragen der Strecke:

$$CP = \sqrt{(\overline{CQ}^2 + \overline{CQ_1}^2)};$$

nach dieser Bemerkung lässt sich die vom Punkte P beschriebene Curve leicht construiren. Aus No. 11) folgt noch:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\vartheta + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_1^2\, d\vartheta,$$

d. h. der ringförmige Raum zwischen der Ortscurve und der gegebenen Ellipse besitzt denselben Flächeninhalt wie die Hilfsellipse, oder umgekehrt, die zwischen der Ortscurve und der Hilfsellipse liegende Fläche ist gleich der Fläche der gegebenen Ellipse.

Für $c = b$ wird der Hilfskegelschnitt zu zwei Geraden, welche in den Entfernungen $\pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ parallel zur Abscissenaxe liegen und die Asymptoten der Ortscurve bilden (Taf. IV, Fig. 3). Für $c > b$ (natürlich aber $c < a$) geht der Hilfskegelschnitt in eine Hyperbel über, deren Asymptoten zugleich Asymptoten der Ortscurve sind (Taf. IV, Fig. 4). Die Construction des Punktes P bleibt in allen Fällen die nämliche; ebenso gilt immer der Satz, dass die zwischen der Ortscurve und dem Hilfskegelschnitte enthaltene Fläche $= \pi a b$ ist.

b. Die Parabel. Lässt man in No 8) $a - \xi$ an die Stelle von ξ, und ah an die Stelle von b^2 treten, so erhält man:

$$\frac{h}{c^2}\left(\frac{\eta^2}{h^2} + 1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2}\right)\left(\frac{\eta^2}{h} - 2\xi + \frac{\xi^2}{a}\right) = \left(\frac{\eta^2}{ah} + 1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2$$

und die Gleichung des zugehörigen Kegelschnittes ist:

$$y^2 = 2hx - \frac{h}{a}x^2;$$

für $a = \infty$ wird der Kegelschnitt zu einer Parabel und die Gleichung der entsprechenden Ortscurve lautet:

$$\frac{h}{c^2}\left(\frac{\eta^2}{h^2} + 1\right)\left(\frac{\eta^2}{h} - 2\xi\right) = 1,$$

oder:

$$12) \qquad \xi = \frac{\eta^2}{2h} - \frac{c^2 h}{2(h^2 + \eta^2)}.$$

Bezeichnen wir mit ξ_0 die Abscisse desjenigen Parabelpunktes, welcher dasselbe η wie die Ortscurve besitzt, so ist $\eta^2 = 2h\xi_0$; daraus folgt, wenn

$\frac{1}{2}h=k$ gleich dem Abstand des Brennpunktes vom Parabelscheitel gesetzt wird,

$$13) \qquad \xi = \xi_0 - \frac{\frac{1}{4}c^2}{k+\xi_0}.$$

Hiernach lassen sich beliebig viele Punkte der Ortscurve auf folgende Weise finden. Man construire eine gleichseitige Hyperbel (Taf. IV, Fig. 5) deren Asymptoten die Axe und die Directrix der Parabel sind und für welche die Gleichung

$$DM \, . \, MQ_1 = (\tfrac{1}{2}c)^2$$

gilt; man verlängere dann MQ_1 bis zum Durchschnitte Q mit der Parabel und lege parallel zur Parabelaxe die Strecke $QP = Q_1M$.

Die Curve der P hat die Parabel zur Asymptote; die zwischen beiden Curven enthaltene Fläche ist:

$$2\int_0^\infty (\xi_0 - \xi)\, d\eta = c^2 \int_0^\infty \frac{h\, d\eta}{h^2+\eta^2} = \frac{\pi}{2}c^2,$$

also unabhängig von dem Halbparameter der Parabel und gleich der Fläche des über $ST=2c$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises.

c. Die Hyperbel. Lässt man in No. 10) $-b^2$ an die Stelle von b^2 treten, so erhält man:

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{b^2}} - \frac{1}{\frac{b^2+c^2}{c^2}\cdot\frac{\cos^2\vartheta}{a^2} + \frac{a^2-c^2}{c^2}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{b^2}},$$

oder:

$$14) \qquad \varrho^2 = r^2 - r_1^2.$$

Darin bedeutet r den Radiusvector der gegebenen Hyperbel, r_1 den Vector eines Hilfskegelschnittes. Für $c<a$ ist der Hilfskegelschnitt eine aus den Halbaxen

$$a_1 = \frac{ac}{\sqrt{b^2+c^2}}, \quad b_1 = \frac{bc}{\sqrt{a^2-c^2}}$$

construirte Ellipse, welche in dem speciellen Falle

$$a>b, \quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

zu einem Kreise wird. Für $c=a$ besteht der Hilfskegelschnitt aus zwei Geraden, welche der Ordinatenaxe parallel in den Entfernungen $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ liegen. Für $c>a$ wird der Hilfskegelschnitt zu einer Hyperbel. In jedem Falle sind die Asymptoten der ursprünglichen Hyperbel zugleich Asymptoten der Ortscurve; die Radienvectoren der letzteren krummen Linie können nach No. 14) leicht construirt werden.

Schlömilch.

VIII. Ueber eine Spirale. Von einigem geometrischen Interesse dürfte vielleicht die Frage sein, ob es eine Curve giebt, in welcher der Krümmungshalbmesser für jeden Punkt gleich dem Radiusvector desselben Punktes ist; sie lässt sich rasch auf folgendem einfachen Wege beantworten.

Sind r und θ die Polarcoordinaten eines Curvenpunktes und setzt man wie gewöhnlich

$$\frac{dr}{d\theta}=r', \quad \frac{d^2r}{d\theta^2}=r'',$$

so gilt für den Krümmungshalbmesser die Formel

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{\sqrt{(r^2+r'^2)^3}},$$

und statt dieser kann man schreiben

$$1) \qquad \frac{r}{\varrho}=\frac{d\left(\frac{r}{\sqrt{1+q^2}}\right)}{dr}, \quad q=\frac{r}{r'}.$$

Für $\varrho=r$ folgt hieraus, wenn $-2a$ die willkürliche Constante der Integration bezeichnet,

$$\frac{r}{\sqrt{1+q^2}}=r-2a,$$

$$q=\frac{2\sqrt{a(r-a)}}{r-2a},$$

mithin vermöge der Bedeutungen von q und r'

$$\theta=\int\frac{r-2a}{2\sqrt{a(r-a)}}\cdot\frac{dr}{r}$$

und durch Ausführung der Integration

$$2) \qquad \theta-\gamma=\sqrt{\frac{r-a}{a}}-2\arctan\sqrt{\frac{r-a}{a}},$$

worin γ die Integrationsconstante bezeichnet. Selbstverständlich kann man der vorkommenden Wurzel auch das entgegengesetzte Zeichen geben, wodurch ein zweiter Curvenzweig entsteht, der dem ersten symmetrisch entgegengesetzt liegt.

Setzt man $\theta-\gamma=\vartheta$, was auf eine Verlegung der Polaraxe hinausläuft, so bemerkt man leicht folgende Eigenschaften der Curve. Der Polarwinkel ϑ nimmt anfangs von Null an ab bis zu dem Minimum

$$1-\tfrac{1}{2}\pi=-32^0\,42'\,15'',$$

welchem der Radiusvector $2a$ entspricht, und wächst dann in's Unendliche. Die Curve schneidet die Polaraxe in den Punkten

$$\begin{aligned}
\vartheta&=0, & r&=a,\\
\vartheta&=0, & r&=a\sec^2 66^0\,46'\,54'',\\
\vartheta&=\pi, & r&=a\sec^2 80^0\,27'\,36'',\\
\vartheta&=2\pi, & r&=a\sec^2 83^0\,48'\,8'',\\
\vartheta&=3\pi, & r&=a\sec^2 85^0\,23'\,29''
\end{aligned}$$

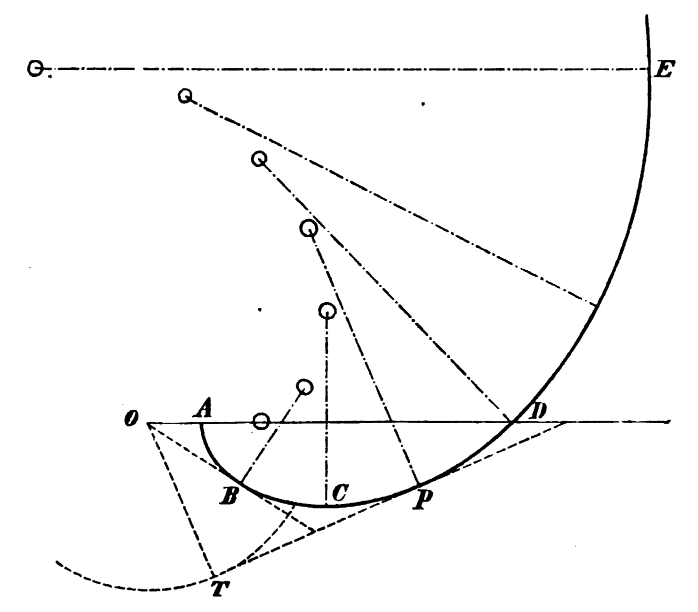
u. s. w.

Die Tangenten der Curve liegen parallel zur Polaraxe, wenn ϑ und r folgende Werthe haben

$$\vartheta = \frac{m\pi}{2} - 2\,arctan\,\frac{m\pi}{2}, \quad r = a\left\{1 + \left(\frac{m\pi}{2}\right)^2\right\},$$

in denen m eine ungerade Zahl bezeichnet; nimmt man dagegen für m gerade Zahlen, so erhält man diejenigen Punkte, an welchen die Tangenten senkrecht zur Polaraxe sind. Irgend eine durch den Punkt (r, ϑ) gehende Tangente berührt zugleich den Kreis, welcher mit dem Radius $r - 2a$ um den Pol beschrieben ist. In dem speciellen Falle, wo ϑ seinen Minimalwerth $2a$ erreicht, wird die Tangente identisch mit dem Radiusvector. Der Bogen s vom Pol bis zu irgend einem Punkte (r, ϑ) bestimmt sich durch die Formel

$$s = \frac{r + 2a}{3}\sqrt{\frac{r - a}{a}}.$$



Die vorstehende Figur zeigt den Anfang des einen Curvenzweiges; es ist darin

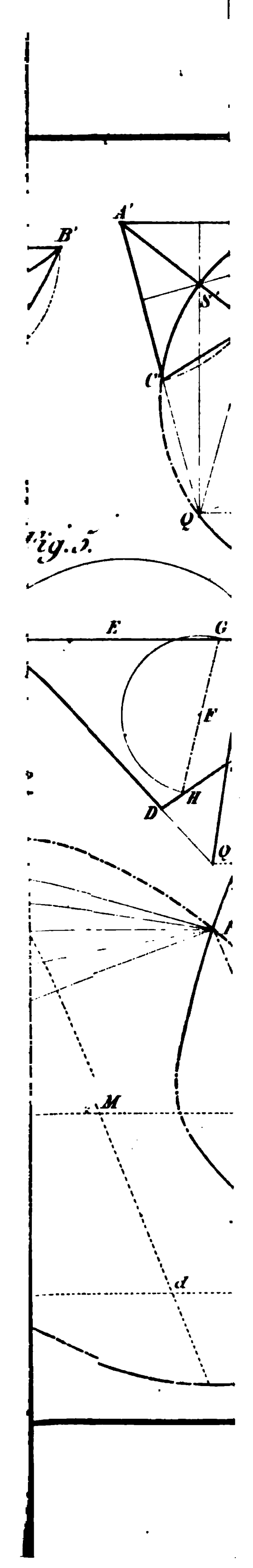
$$OA = a, \quad OB = 2a, \quad OC = a\left(1 + \tfrac{1}{4}\pi^2\right) = 3{,}4674\,.\,a,$$

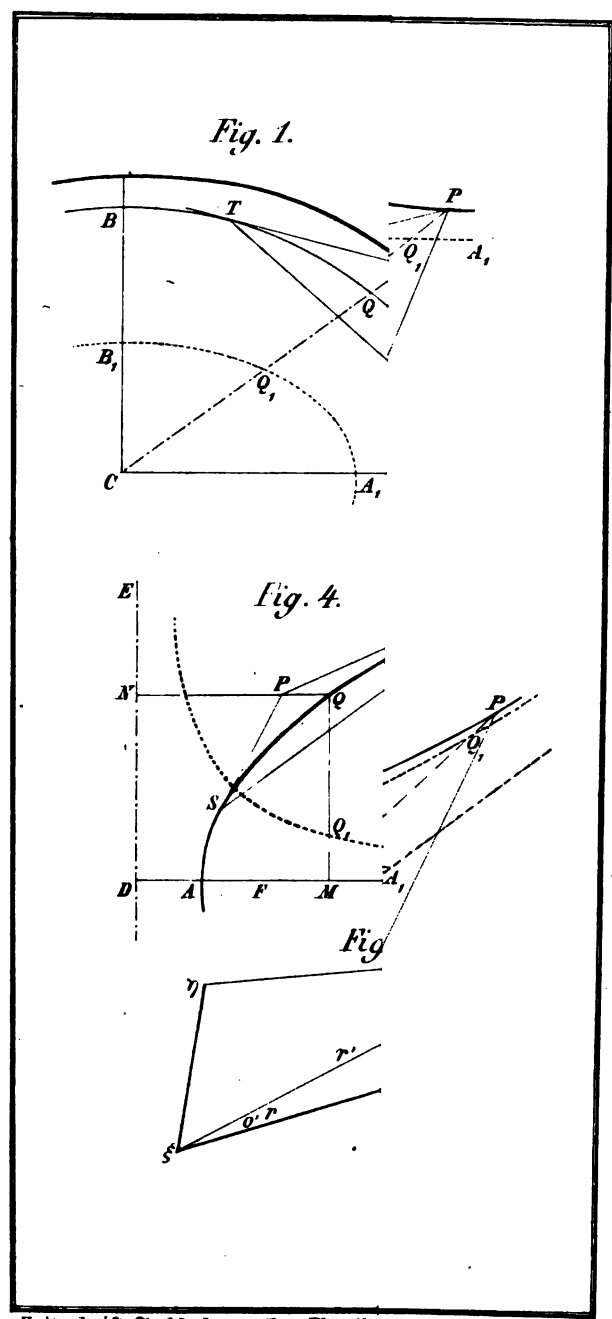
$$OD = a\,sec^2\,66^0\,46'\,54'' = 6{,}4341\,.\,a,$$

$$OE = a\left(1 + \pi^2\right) = 10{,}8696\,.\,a.$$

Noch sei im Allgemeinen bemerkt, dass die Formel 1) überhaupt zur Bestimmung derjenigen Curven dient, in welchen der Krümmungshalbmesser eine gegebene Function des Radiusvector darstellen soll.

Schlömilch.


A'
B'
S'
C'
Q
Fig. 5.
E
G
F
H
D
Q
M
d


Fig. 1.
P
B
T
Q,
A,
Q
B,
Q,
C
A,
E
Fig. 4.
N
P
Q
P
Q,
S
Q,
D
A
F
M
A,
Fig
η
r'
ρ r
S

VII.

Die Entdeckung der Gravitation — und Pascal.

Ein literarischer Bericht

von

Dr. Hermann Hankel.
Professor an der Universität Erlangen.

Am 15. Juli 1867 überraschte Chasles die gelehrte Welt mit der Nachricht, dass Pascal, dem man in der Geschichte der Gravitation bis dahin keine Stelle eingeräumt hatte, lange vor Newton in der irdischen Schwere die Kraft erkannt habe, welche den Lauf des Mondes um die Erde und die der Planeten um die Sonne bedinge.

An diese erste Mittheilung knüpften sich zu wachsendem Erstaunen eine Reihe immer wunderbarerer Mittheilungen, welche die ganze Geschichte der Mechanik und Astronomie in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts vollkommen umzustossen schienen. Zahlreiche Angriffe auf die Echtheit der von Chasles publicirten, in seinem Besitze befindlichen handschriftlichen Documente, Repliken von Chasles und wiederholte Dupliken haben schliesslich das Material, welches man, um sich in dieser Frage ein selbstständiges Urtheil zu bilden, gegenwärtig haben muss, so angehäuft, dass es mir nützlich erschienen ist, dasselbe, soweit es von wesentlichem Belange ist, zusammenzustellen.

Zur Orientirung*) mag zunächst Folgendes vorausgeschickt werden:

Im Juni 1682 fand die berühmte Sitzung der Royal Society statt, in der Newton zuerst die Resultate der 1669 von Picard bei Paris ausgeführten vortrefflichen Gradmessung erfuhr, die ihm seine Hypothese, dass es die Schwerkraft sei, welche den Mond in seiner Bahn erhalte, endgiltig bestätigte. Die nächsten vier Jahre waren durch die Arbeiten ausgefüllt,

---

*) In Bezug auf die Entdeckung der Gravitation durch Newton und ihre Vorgeschichte, die Entwickelung der Ideen von der Schwere und der die Planeten bewegenden Ursachen verweise ich auf meinen Artikel: „Gravitation“ (Ersch und Gruber, Encyclopädie, 1869).

die Newton am 28. April 1686 der Societät vorlegte; im nächsten Jahre erschienen die *Principia phil. nat. mathem.* im Druck.

Das früheste Datum für Newton's Beschäftigung mit der Frage nach der auf den Mond wirkenden Centralkraft war bisher traditionell das Jahr 1666, wo Newton (geb. 1643) zu Woolsthorpe jenen berühmten Apfel fallen sah.

Die ersten Bemerkungen seines geistvollen Rivalen, Robert Hooke, fallen in dieselbe Zeit; denn dieser legte 1666 bereits der Royal Society einen Bericht über eine Reihe von Experimenten vor, um zu bestimmen, ob die Körper bei verschiedenen Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde eine Veränderung in ihrem Gewichte erleiden. Im Jahre 1674 erschien eine Schrift von Hooke, in der er mit grosser Klarheit auseinandersetzte, dass bei der aller Materie eigenen Trägheit eine einzige Centralkraft genüge, um eine der Erfahrung entsprechende Bahn der Planeten zu erhalten; und dass diese von der Sonne zu den Planeten, wie unter diesen wirkende Kraft mit der Schwerkraft identisch sei. Das Gesetz der Abnahme dieser Kraft mit der Entfernung aber aufzufinden, „damit kann er sich nicht selbst befassen, weil er viele andere Sachen unter den Händen hat, die er zu vollenden wünscht."

Im Jahre 1679 schlug Newton der Societät einen directen Versuch vor, die Bewegung der Erde aus der östlichen Abweichung fallender Körper zu bestimmen. Hooke wurde mit dem betreffenden Versuche beauftragt, nachdem er jene Bemerkung Newton's berichtigt hatte. Letzterer hatte nämlich den Gang eines nach der Erde fallenden Körpers bei Berücksichtigung ihrer Rotation als spiralförmig angenommen, während Hooke ihn als elliptisch nachwies.

Obgleich ich bei dem Mangel an der einschlägigen Literatur nicht im Stande bin, auf diese Beziehungen zwischen Hooke und Newton näher einzugehen, so ist doch so viel unzweifelhaft, dass Newton bei der Publication seiner *Principia* gegen Hooke ebenso wenig edel verfuhr, als er es in dem Streite über die Priorität der Differentialrechnung gegen Leibniz gethan hatte. Hooke hatte, wie nach Obigem begreiflich, mündlich geäussert, er habe jene Entdeckung des Gravitationsgesetzes gemacht und dem Newton die ersten Winke dazu gegeben; er verlange nur in der Vorrede in dieser Beziehung genannt zu werden. Aber Newton war nicht gewillt, nur ein Titelchen seines Ruhmes aufzugeben; er antwortete sehr heftig und vergass sich soweit, auszusprechen, Hooke verdanke die Kenntniss dieses Gesetzes vielleicht einem seiner Briefe; endlich, nachdem sich Freunde ins Mittel gelegt, gedachte er Hooke's in dem matten Scholium zu prop. 4, lib. I der *Principia*, was er noch dadurch abschwächte, dass er Christoph Wren und Halley gleichzeitig als Entdecker des Gesetzes von dem Quadrate der Entfernung aus dem dritten Keppler'schen Gesetze nannte, obgleich letztere beiden in keiner Weise darauf Ansprüche machten.

Wenn es sich nun auch zeigen sollte, dass bereits einige Decennien früher Boullau, Borelli u. A. die Idee gefasst haben, dass man zur Erklärung der Planetenbewegungen mit einer von der Sonne ausgehenden Centralkraft ausreiche, so kommt alles dies nicht in Betracht gegen den Inhalt einer Anzahl eigenhändiger Briefe Pascal's, die Chasles im Jahre 1867 der Pariser Akademie des sciences vorlegte*). Denn in diesen sprach Pascal um das Jahr 1652 das Gesetz der Gravitation klar so aus, dass sie proportional den Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirke; er folgerte daraus die Keppler'schen Gesetze, ganz wie es Newton gethan; in dem dritten dieser Gesetze erkannte er das Mittel, die Massen derjenigen Planeten zu bestimmen, die von Trabanten umgeben sind; berechnete so überraschend richtig das Verhältniss der Masse der Sonne zu der der Erde, des Jupiter und Saturn (obgleich ein Saturnstrabant erst 1655 von Huyghens entdeckt wurde!), und behauptete schliesslich, dass diese Kraft zur Erklärung aller Störungen das Mittel liefere.

Die Quelle, aus der Chasles schöpfte, war eine umfangreiche Sammlung von einzelnen Zetteln, auf denen von Pascal's Hand die betreffenden Bemerkungen bald mehr, bald minder zusammenhängend und ausführlich aufgezeichnet waren. Daneben enthält die umfangreiche, im Besitze Chasles' befindliche Sammlung von Manuscripten aus dem 17. Jahrhundert eine reiche Menge von Briefen, welche zeigten, dass Pascal seine Entdeckungen vielen anderen Gelehrten, zunächst 1652 an Boyle mitgetheilt hatte.

Dem allgemeinen Erstaunen über diese merkwürdige historische Entdeckung gaben in der nächsten Sitzung der Akademie vom 22. Juli zunächst Duhamel und Faye (p. 122) Ausdruck, indem sie bemerkten, dass die Behauptungen Pascal's eine Reihe mechanischer und mathematischer Theoreme voraussetzen, welche erst von Huyghens und Newton datiren und es unglaublich sei, dass solche bedeutende Entdeckungen so lange unbekannt hätten bleiben können; und erinnerten, dass, da sich Pascal, wie Newton, des Mondes zur Bestätigung der quadratischen Abnahme der Gravitation bediente, diese eben nicht vor der Picard'schen Gradmessung von 1669 geliefert werden konnte.

Darauf antwortete Chasles mit der Veröffentlichung einer neuen Reihe von Documenten, die das Erstaunen noch vermehrten (p. 125). In ihnen gab Pascal den Satz, dass bei einer kreisförmigen Bewegung die

*) *Comptes rendus*. Paris 1867. Juli — Dec., p. 89. Alle folgenden Citate ohne nähere Angabe beziehen sich auf diesen Band, in dem die Verhandlungen über die Chasles'schen Manuscripte einen beträchtlichen Theil ausmachen. In Bezug auf das Detail muss ich den Leser, der an diesem literarischen Roman Gefallen findet, auf jenen Band verweisen.

Centrifugalkraft dem Quadrate der Geschwindigkeit direct und dem Radius indirect proportional sei (was bisher als eine der glänzendsten Entdeckungen von Huyghens galt). Ferner fand sich in ihnen die Bemerkung, dass die Körper unter dem Aequator $^1/_{289}$ ihrer Schwere verlieren müssten. Nach der bisherigen Kenntniss der Geschichte*) war aber eine Abnahme der Schwere unter dem Aequator erst 1671 bei Gelegenheit der Ausrüstung der Expedition von Richer und Picard in der Pariser Akademie als Vermuthung ausgesprochen — und Pascal war bereits 1662 gestorben. Ja, die Briefe enthielten sogar die Behauptung, dass vermöge jener Abnahme der Schwere der Durchmesser an den Polen sich zu dem im Aequator wie 229 : 230 verhalten müsse. Diese Zahl stimmt genau mit der Berechnung Newton's (*Princ. l. III, prop.* 19), die man immer für eine der glänzendsten Leistungen des letzteren angesehen hat.

Aber das Ueberraschendste sollte noch kommen: Chasles theilte (p. 185) aus seiner Sammlung Briefe mit, welche Newton 1654 als elfjähriger Schüler zu Grantham von Pascal erhielt, dem er sich durch die Uebersendung dreier Abhandlungen (über die Rechnung des Unendlichkleinen, über das System der Wirbel und das Gleichgewicht der Flüssigkeiten, über die Schwere) empfohlen hatte. Pascal, der erst nach directen Erkundigungen bei den Schulmeistern des kleinen Newton von der sehr natürlichen Meinung zurückkam, dass er mystificirt werde, beglückwünscht den Knaben über seine Leistungen, ermahnt ihn in phrasenhafter Weise, auf der Bahn des Ruhmes fortzuschreiten, jedoch mit Maass, und ohne seine physischen Kräfte zu untergraben, wie er es leider gethan; schickt ihm seine u. a. die Gravitation behandelnden Manuscripte zu, und bittet ihn um seinen Rath über einige Fragen aus der Mechanik.

So wäre denn Newton nicht nur ein frecher Plagiator, sondern es fiele auch der Schatten des schwärzesten Undankes auf den Verfasser der *Principia*, der niemals, auch nur mit einem Worte, seines Lehrers und väterlichen Freundes gedacht hatte. Es war unglaublich! Nie hatte man nur von entfernten Beziehungen zwischen Pascal und Newton gehört, und nun erfuhr man, dass letzterer bereits seit seinem elften Lebensjahre im engsten Verkehr mit dem französischen Gelehrten gestanden habe. Man konnte es nicht glauben, und doch sprachen Documente.

Die Sache sollte indess eine andere Wendung bekommen. In derselben Sitzung (p. 202) trat der Herausgeber der *Pensées* von Pascal, Faugère, mit der Versicherung auf, dass er nach einer Einsicht jener Papiere zu der festen Ueberzeugung gelangt sei, dass sie nicht von Pascal's Hand geschrieben seien. Gleichzeitig machte Bénard darauf aufmerksam, dass der Styl der Briefe ein durchaus moderner und anglisirender sei. Er meint, die Fabrikation der Manuscripte sei die böswillige Rache eines Eng-

*) Humboldt, Kosmos, t. IV, p. 154.

länders für die zahlreichen Revindicationen englischer Entdeckungen durch die Franzosen, der die französischen Gelehrten in einem eclatanten Falle vor der Welt lächerlich machen wolle. Der berühmte Biograph Newton's, Brewster, erklärte nach einer ihm zugesandten Photographie die Unterschrift Newton's für unzweifelhaft gefälscht (p. 537) und die sämmtlichen Briefe für eine Fälschung (p. 261). Vor 1661 habe Newton keinerlei mathematische Kenntnisse besessen und als elfjähriger Knabe keine gelehrten Abhandlungen geschrieben, sondern sich in einer für sein Alter passenderen Weise mit dem Bau kleiner Windmühlen, Sonnenuhren u. s. w. beschäftigt. Zugleich zeigte er, dass die Briefe theilweise falsche Adressen haben, und fügte hinzu, dass er bei dem sorgfältigsten Studium der Papiere Newton's nie eine Andeutung von einer Beziehung zu Pascal gefunden hätte.

Auf alle diese Angriffe hatte Chasles keine andere Antwort, als dass er (p. 263) einen Haufen von Briefen veröffentlichte, welche sich aus den verschiedensten Correspondenzen in seinem unerschöpflichen Zauberkasten befanden, so Briefe der Schwester Pascal's, Jacqueline, welche an Newton hinterlassene Manuscripte ihres Bruders schickt, Briefe Newton's, in denen er von seinen Beziehungen zu Pascal spricht, Briefe von dem Emigranten Desmaizeaux (einem thätigen Literaten und Sammler von Handschriften, in England 1740 gestorben), in denen er Newton um Ueberlassung Pascal'scher Manuscripte bittet, die letzterer indessen ablehnt u. s. w.

Um die Sache noch mehr zu verwickeln, werden Briefe mehrerer Schriftsteller des 18. Jahrhunderts mitgetheilt, welche es als ausgemacht hinstellen, dass Newton Alles von Pascal entlehnt habe. Lächerlich, aber für den Zweck der Fälschung bezeichnend, ist ein Brief von Montesquieu an Desmaizeaux, den ich nicht umhin kann, übersetzt mitzutheilen: „Das, was unsere Freunde zu wissen wünschen, ist der Ursprung der Ideen Newton's, d. h. ob sie auf eigenem Boden gewachsen, oder unseren (!) Autoren, wie Descartes, Pascal oder anderen Vorgängern entlehnt sind; und vor Allem, warum er die Schriftsteller nicht aufführt, welche er doch sicherlich studirt hat. Sie haben genaue Beziehungen zu ihm und können sich daher, wie ich denke, hierüber unterrichten.“ So konnte es freilich nicht fehlen, dass Desmaizeaux diese Vermuthungen bestätigte, die denn so weit gehen, dass Louis Racine die Behauptung ausspricht: „*que le chevalier Newton devoit tout son savoir à Pascal*“. Es geht doch Nichts über diese historische Unparteilichkeit!

Für Newton bleibt Nichts übrig. Selbst der Brief, den er an einen jungen Freund Aston geschrieben hat, um ihm gute Regeln über sein Benehmen auf einer grossen Reise zu geben und den Brewster in der Biographie Newton's als Anhang abgedruckt hat, ist von Pascal geschrieben (p. 550).

Doch des Wunderbaren ist noch lange kein Ende: Zwei Monarchen steigen in die Arena herab, um den Kampf um die Priorität zu führen. Da schreibt Jacob II. aus seinem Exile in Saint-Germain 1689, kaum 14 Tage nach seiner Flucht aus England, an Newton (p. 551): die gelehrte Welt Frankreichs sei über die Verleugnung seiner intimen Beziehungen zu Pascal empört; die Franzosen hätten die Documente in den Händen, um Alles zu enthüllen. Uebrigens sei der König Louis XIV. höchst aufgebracht über die Beleidigungen, welche er in einem Briefe an Huyghens dem Andenken von Descartes und Pascal zugefügt habe. Er möge sich vorsehen und jene Ausdrücke zurücknehmen. So schreibt der König aus dem Hause Stuart an einen Gelehrten! — und Newton bittet den König Louis XIV. allerunterthänigst um Verzeihung über die Verunglimpfungen seiner Gelehrten. Aber um den unglaublichen Roman zu vollenden, so muss Louis XIV., der stolze Selbstherrscher, persönlich in diese kleinlichen Zänkereien der Gelehrten eingreifen, und p. 685 kann der erstaunte Leser einige Briefe finden, die er in dieser Angelegenheit eigenhändig geschrieben haben soll.

Endlich trat, um über die Echtheit dieser famosen Schriftstücke zu entscheiden, eine Commission von Mitgliedern der Akademie mit Faugère zusammen. Das Resultat der Prüfung war für Faugère dies: Kein Buchstabe jener Zettel und Briefe ist von Pascal geschrieben. Es ist Alles gefälscht und der Betrüger hat sich nicht einmal die Mühe genommen, die Handschrift zu imitiren. Seine grösste Schwierigkeit sei offenbar die gewesen, sich altes, vergilbtes Papier in hinreichender Menge zu verschaffen; nachdem er diese überwunden, habe er in einer jener Zeit ungefähr angepassten Orthographie den Pascal einen trivialen, phrasenhaften Styl schreiben lassen, wie er dem netten präcisen Style dieses grossen Schriftstellers nicht gleicht (p. 340.) Die anderen Mitglieder der Commission schwiegen.

Nach allem diesen wies Chasles (p. 331) theils aus seinen Papieren, theils aus gedruckten Schriften nach, dass Pascal viele Manuscripte ungedruckt hinterlassen habe. Er meinte, es sei unmöglich, neben den Hunderten von Zetteln und Briefen Pascal's noch drei umfangreiche Abhandlungen zu verfassen und dann, um den Betrug zu decken, noch mehrere Hundert anderer Briefe zu fabriciren.

Faugère antwortete darauf (p. 344), dass man es hier mit einer an Kühnheit und Grossartigkeit beispiellosen Fälschung zu thun habe, die einem weiten Complot gleiche; denn es sei ungemeine Kunst angewandt, alle Theile des Werkes mit einander zu verbinden. In der That steigt die Zahl der Zettel und Briefe auf mehrere Tausende; die Sammlung enthält Briefe von Pascal an Newton, Boyle, Hobbes, Hooke, Wallis, Huyghens, Mercator, an Frau Perrier, Jacqueline Pascal, an Mersenne, Descartes, Gassendi, die Königin Christine, an Nicole, Homon, Arnauld, Lemaistre de Sacy, Labruyère etc. etc.,

unzählige Briefe der verschiedensten Personen, deren Register allein mehrere Seiten füllt (p. 376 und 690).

Ich übergehe die zahlreichen Scharmützel zwischen Chasles und Faugère (p. 375, 437, 455, 617, 643), in denen lezterer fortwährend historische Unmöglichkeiten nachweist, die Unechtheit der Schriftstücke behauptet und auf ihre officielle Untersuchung dringt. Chasles nimmt ihm gegenüber eine gedrückte Stellung ein, weil er sich entschieden weigert, die Quelle anzugeben, aus der seine Sammlung stamme. Der Streit wird schliesslich so heftig, dass Faugère (p. 620) den Chasles wenig verblümt einen Fälscher nennt, den man der Justiz überliefern müsse*). Nur dass der entfernte Ursprung der Documente in dem Cabinete von Desmaizeaux zu suchen sei, verräth schliesslich der bedrängte Besitzer, der nicht aufhört, zahllose Briefe aus seiner unerschöpflichen Sammlung zu veröffentlichen, welche die Priorität für Pascal in Anspruch nehmen und Newton als schmählichen Plagiator erscheinen lassen.

Es ist ein bemerkenswerthes Factum, dass alle diese Briefe nie eine mathematische Begründung der in ihnen ausgesprochenen Sätze enthalten oder den Weg dazu andeuten; in keinem einzigen ist nur eine mathematische Formel angegeben; sie haben einen ganz anderen Charakter, als alle anderen gelehrten Briefe dieser Zeit, in der die Correspondenz der Gelehrten ein wesentliches Stück ihrer Publicationen ausmachte. Die Briefe bleiben sämmtlich ganz an der Oberfläche und geben die Resulate so weit, als sie ein dilettantisch gebildeter Mann etwa begreifen kann. Briefe dieser Art konnte recht wohl ein geschickter Literat fabriciren, der mit den wesentlichen Fortschritten der Astronomie seiner Zeit aus populären Schriften bekannt war.

Von einer anderen und sehr interessanten Seite griff der Astronom Grant (p. 571) die Echtheit der Documente an; er machte darauf aufmerksam, dass die numerischen Angaben derselben ganz genau mit denen in der dritten Ausgabe von Newton's *Principia* (1726) übereinstimmen, nicht aber mit denen der ersten Ausgabe (1687). Und doch sind die der dritten Ausgabe berechnet mit Hilfe von Beobachtungen Cassini's, Bradley's, Pound's u. A., die lange nach Pascal's Tode angestellt sind. Folgende Beispiele mögen genügen:

*) Es bedarf wohl nicht der Versicherung, dass der Verfasser dieses Berichtes, trotz der unmotivirten Weigerung von Chasles, die Art und Weise anzugeben, wie er zu seinem Schatze gelangte, der festen Ueberzeugung ist, dass der berühmte Geometer in der für ihn so unangenehm gewordenen Angelegenheit durchaus *bona fide* gehandelt hat. Nur hat ihn Begeisterung für nationale Gloire blind für unbefangene Kritik gemacht.

	♃	♄	♁
Die Massen (Sonnenmasse = 1):			
Pascal 1662 und Newton 1726	$^1/_{1067}$	$^1/_{3021}$	$^1/_{169282}$
Newton 1687	$^1/_{1100}$	$^1/_{2360}$	$^1/_{28700}$
Die Dichtigkeiten (Sonne = 100):			
Pascal 1662 und Newton 1726	94½	67	400
Newton 1687	76	60	387
Intensität der Schwere an der Oberfläche (an der Oberfläche der Sonne = 10000):			
Pascal 1662 und Newton 1726	943	529	435
Newton 1687	804½	536	805½.

An Zufall zu denken, ist hier nicht mehr möglich; es musste also, um die Aechtheit der Schriftstücke zu retten, das äusserste Mittel angewandt werden — und Chasles wagt es, auszusprechen: „*C'est donc évidemment Newton qui, après s'être écarté en* 1687 *des nombres de Pascal, qu'il connaissait, y est revenu en* 1726" (p. 541). So wäre denn Newton nicht nur ein schamloser Plagiator, sondern auch ein infamer Betrüger. Es bleibt ihm nichts als Schande übrig.

Und weiter bemerkt Chasles (p. 586): Newton habe 1687 aus Furcht, von den Freunden Pascal's als Plagiator ausgerufen zu werden, absichtlich falsche Zahlen angegeben. Pascal aber habe bereits in seinem 18. Lebensjahre 1641 diese Zahlen gefunden, gestützt auf unedirte Schriften Keppler's und Beobachtungen Galilei's († 1642). Es werden Briefe des letzteren mitgetheilt, von denen der eine von 1641 schon die Angabe enthält, die Schwere müsse, wie das dritte Keppler'sche Gesetz beweise, nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirken, und es müsse sich zufolge einer solchen Kraft ein Planet in einer Ellipse bewegen. So wäre denn auf Galilei der Ruhm zu übertragen, den nach den bisherigen Mittheilungen von Chasles, Pascal in Anspruch nahm. Ueberdem spricht Galilei von einem Saturnstrabanten, dessen Umlaufszeit er bestimmt habe*).

Der arme Chasles hat Unglück. Kaum hat er sich auf diese aus Florenz von 1641 datirten Briefe berufen, so tritt der Italiener Gilbert Govi ihm entgegen (p. 953) und beweist: 1. dass Galilei niemals französische Briefe geschrieben, 2. seine Briefe aus Arcetri datirt habe, 3. dass er 1641 vollkommen blind war, 4. dass er die Umlaufszeiten der Jupitermonde nicht einmal annähernd kannte, 5. dass er von einem Saturnstrabanten nichts wusste, 6. dass kein Zeugniss seines Verkehrs mit Pascal vorhanden ist.

*) Huyghens, den man bisher als Entdecker des ersten (jetzt sechsten) Saturnstrabanten im Jahre 1655 ansah, soll nach diesen Briefen von jener früheren Entdeckung Galilei's gewusst haben. Gegen diese und andere ungerechte Verunglimpfungen des grossen niederländischen Mathematikers ist die Akademie seines Vaterlandes in einem Rapport vom 25. Januar 1868 aufgetreten, der in Grunert's Archiv, Th. 49, p. 81 abgedruckt ist.

Und was jenen Newton insinuirten Betrug betrifft, so weist Grant nach (p. 784), dass Newton sowohl 1687 als 1726 nach den besten jeweiligen Beobachtungen vollkommen richtig gerechnet habe.

So werden noch von verschiedenen Seiten her*) gegen die Echtheit der Documente gegründete Zweifel erhoben. Der Ton, in dem der von Niemand vertheidigte und von Allen angegriffene Chasles antwortet, wird immer bitterer und ärgerlicher, so dass sich ein unbetheiligter Akademiker am 23. December 1867 (p. 1057), fast ein halbes Jahr nach der ersten Publication dieser ominösen Documente, veranlasst sieht, die Gelehrten zu bitten, dass sie nicht durch fortgesetzte Scharmützel das Leben des betagten Greises untergraben, und fordert Chasles auf, seine ganze Kraft an die Publication jener Manuscripte zu setzen, über deren Echtheit dann die Welt urtheilen könne. Damit erreicht denn dieser Streit in der Hauptsache sein Ende. Sein Resultat ist nicht zweifelhaft, und ich bin durch die gegebene Darstellung des Kampfes jedem thetischen Urtheile überhoben. Auch hat man bisher Nichts von einer wirklich begonnenen Veröffentlichung der Sammlung gehört, die, wie man im Interesse historischer Wahrheit wünschen muss, hoffentlich ganz unterbleibt.

Wo aber haben wir den Urheber dieser kolossalen Fälschung, die kaum an der berüchtigten, vor wenigen Jahren in Frankreich aufgetauchten, Sammlung von apokryphen Briefen der Marie Antoinette ihres Gleichen hat, zu suchen, und welchen Motiven verdankt sie ihren Ursprung? Damit betreten wir ein Gebiet, auf dem die allersorgfältigsten Untersuchungen der Papiere doch nur zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit führen könnten. Brewster hält**) jenen erwähnten Desmaizeaux, der von 1734—1740 ein eifriger Mitarbeiter am *Dictionnaire général* war, für den Fälscher. „Er hat seine gefälschten Manuscripte um 200 Pfund an den Chevalier Blondeau de Charnage verkauft, in der Hoffnung, dass sein Haufen von Lügen nie das Licht der Oeffentlichkeit erblicken werde. Aber er hatte nicht die Frechheit, seine Infamie in dem *Dictionnaire général* zu verewigen und das Gedächtniss der bedeutendsten Männer öffentlich so zu beschimpfen (p. 771).“ Wir lassen es dahingestellt sein, wie weit diese Vermuthung gerechtfertigt werden kann.

Erlangen, 5. Januar 1869.

---

*) Siehe *Compt. rend.* 1867, p. 987, 989, 1018, 1041 u. s. w.

**) *Compt. rend.* p. 717, 757, 826, und in zweien mir unzugänglichen Nummern der englischen Times aus dem October oder November 1867, wo er seine Vermuthung näher zu begründen versucht.



VIII.

Beiträge zur Theorie der Ausgleichung trigonometrischer Netze.

Von

Dr. HELMERT.

Noch immer ist die Frage nach Vereinfachungen in der Theorie und Praxis dieser Ausgleichungen eine rege, wenn auch weniger dringend, seit Hansen's kürzlich veröffentlichte Methode die Menge der Zahlenrechnungen möglichst zu vermindern, und die Anwendung der Rechenmaschine von Thomas die Ausführung derselben in bequemerer Weise als mit vielstelligen Logarithmen zu bewirken gestatten.

So bedarf wohl auch die Vorführung der nachstehenden drei Beiträge keiner besonderen Rechtfertigung, es sind eben dieselben ausgearbeitet worden, um vielleicht die Frage der weitern Vereinfachung der Rechnungen lösen zu helfen. Insbesondere ist aber der zweite Beitrag infolge einer Notiz in dem Bericht über die Conferenz der europäischen Gradmessung im Jahre 1867 entstanden, wo empfohlen wird, der Schleiermacher'schen Methode mehr Beachtung zu schenken.

Directe Ausgleichung trigonometrischer Netze.

1.

Die Anzahl der aufzulösenden Gleichungen für die Ausgleichungsrechnung der Winkelmessungen eines trigonometrischen Netzes wächst bei ungeänderter Anzahl der Netzpunkte mit der Anzahl der eingestellten Richtungen und erreicht ein Maximum, wenn jede mathematisch denkbare Verbindung zweier Netzpunkte als Richtung beobachtet wird. Sind im Ganzen überhaupt R Richtungen eingestellt worden, ist aber n die Anzahl der Netzpunkte, mithin $2(n-2)$ die Anzahl der zur Construction des

Netzes nothwendigen Richtungsunterschiede, so beträgt die Anzahl der überschüssigen Richtungen, wenn jeder Netzpunkt auch Beobachtungsstation ist,

$$(R-n)-2(n-2)$$

und ebenso viele Bedingungsgleichungen oder aufzulösende Gleichungen liefert das beobachtete Netz.

Nach beendeter Ausgleichung bezieht man stets die Netzpunkte auf ein Coordinatensystem (Polarcoordinaten, rechtwinklige Coordinaten oder Längen- und Breitencoordinaten), welches durch zwei derselben in seiner Lage fixirt wird; es geht mithin das Ziel aller Rechnungen darauf hinaus, zur Kenntniss von $2(n-2)$ Coordinaten, nämlich denen von $n-2$ der Netzpunkte, zu gelangen. Diese $2(n-2)$ Coordinaten sind die eigentlichen Unbekannten der Rechnung und sobald ihre Anzahl kleiner ist, als die der aufzulösenden Bedingungsgleichungen, kann es von Vortheil sein, die Ausgleichungsrechnung für die directe Berechnung der Coordinaten mit Uebergehung der Bedingungsgleichungen einzurichten. Es wird dies eintreten, wenn

$$(R-n)-2(n-2)>2(n-2)$$

oder die Anzahl der eingestellten Richtungen der Ungleichung genügt

$$1) \qquad R>5n-8.$$

Sind nicht die Coordinaten zweier Punkte gegeben, welche die Lage des Coordinatensytems fixiren, sondern nur die Coordinaten eines Punktes, dem Coordinatenanfange, die Richtung von demselben nach einem der anderen Punkte, und eine Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten zweier Punkte (etwa infolge einer Basismessung), so geht die Ungleichung 1) über in

$$2) \qquad R>5n-6,$$

indem nicht mehr $2(n-2)$ unbekannte Coordinaten vorhanden sind, sondern $2(n-1)-1$, also auch ebenso viele Gleichungen, zu denen noch die genannte Bedingungsgleichung hinzutritt.

Der Vortheil der geringeren Anzahl aufzulösender Gleichungen, welchen die directe Ausgleichung bietet, erreicht ein Maximum für

$$R=n(n-1),$$

wofür die Ungleichungen 1) und 2) geben

$$1) \qquad n^2-6n+8>0 \quad \text{oder} \quad n>4,$$

$$2) \qquad n^2-7n+6>0 \quad \text{oder} \quad n \gtreqless 5,$$

d. i. in beiden Fällen wesentlich dieselbe Forderung.

2.

Es leuchtet ein, dass vor Allem möglichst scharfe Näherungswerthe der Coordinaten ermittelt werden müssen, ehe von einer Ausgleichung im obigen Sinne (die man füglich „Coordinatenausgleichung" nennen könnte) die Rede sein kann. M a n w ä h l e d a h e r m i t H i l f e d e r B e o b a c h t u n g s w e r t h e e i n z u r m a t h e m a t i s c h e n C o n s t r u c t i o n d e s N e t z e s

erforderliches Winkelsystem aus, berechne (auf Hundertel resp. Tausendel Secunden) die diesem Systeme ganz scharf entsprechenden Richtungsunterschiede, welche auch beobachtet worden sind, sowie auch mit gleicher Genauigkeit, als wäre das System das endgiltige, die deselben entsprechenden Coordinaten der Netzpunkte*).

Ist eine Längendimension im Netze auch noch nicht genau bekannt, so muss doch soviel über eine solche ermittelt werden, dass die sphärische resp. sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigt werden kann. Diese vorläufige Längendimension genügt auch gleichzeitig für die Coordinatenberechnung, wie sich dies noch im weiteren Verlaufe dieser Abhandlung zeigen wird.

Als Coordinatensystem empfiehlt sich das polare. Vor dem rechtwinkligen hat es den Vorzug der Einfachheit. und vor dem geographischen den erheblichen Vorzug einer geringeren Abhängigkeit von der Gestalt der Erde.

3.

Denkt man sich zunächst eine Kugeloberfläche als Träger des Netzes und seien P und Q zwei Netzpunkte, O Coordinatenursprung, also

$$p = OP \quad q = OQ \quad s = PQ$$

die Seiten des Dreiecks OPQ,

$$\angle OQP = Q \quad \angle OPQ = P \quad \angle QOP = O$$

die Winkel desselben Dreiecks im Drehungssinn links-rechts, wo insbesondere noch O die Differenz der Anomalien für P und Q, die letzteren in demselben Drehungssinne genommen, bezeichnet:

$$\angle QOP = O = \varphi_p - \varphi_q,$$

so gilt für kleine Aenderungen dieser Grössen p, q, s u. s. f. die Formel**)

$$dP = -\frac{\sin Q}{\sin s} \cdot dq - \frac{\sin P}{\tan s} \cdot dp - \frac{\sin q}{\sin s} \cdot \cos Q \cdot dO,$$

welche Gleichung sich leicht verificiren lässt durch Betrachtung der Differentialdreiecke, die aus der Einzeländerung von q, p und O hervorgehen.

Diese strenge Formel beizubehalten ist jedoch nicht nöthig, sobald man an den Dreieckswinkeln die zur Reduction des Dreiecks auf ein ebenes von gleichlangen Seiten erforderlichen Reductionen anbringt. Diese Reductionen selbst ändern sich für kleine Formveränderungen des Dreiecks nicht, man bedarf überhaupt keiner genaueren Kenntniss derselben als auf höchstens Zehntelminuten.

---

*) Ueber die Berechnung der Coordinaten auf Kugel und Ellipsoid vergl. man Hansen, Geodät. Untersuchungen, Leipzig 1865, Abschn. 80, 131 u. a.

**) Brünnow, Sphärische Astronomie, Berlin 1862, p. 14 (11, 3).

Es seien jetzt P, Q, O auf die Ebene reducirt; p, q, s seien die Längen der Seiten des sphärischen oder ebenen Dreiecks; dann hat man

$$p : q = \sin(P+O) : \sin P$$

$$3)\qquad dP = -\left(\frac{\sin Q}{s}\,dq + \frac{\sin P}{s}\,dp\right).206265 - \frac{q}{s}\,.\cos Q.dO$$

dP und dO in Secunden.

Die Coefficienten der Differentiale lassen sich mit Bequemlichkeit berechnen, da die Coordinatenberechnung die Werthe der Grössen Q, P, s, q zum Theil mit angiebt, resp. leicht mitfinden lässt. Es genügt, diese Coefficienten auf 4 bedeutliche Ziffern zu kennen, daher man die Hilfsgrössen entsprechend genau auf höchstens 5 bedeutliche Ziffern resp. Zehntelminuten zu kennen braucht.

4.

Die Gleichung 3) kann man nun anwenden, die Aenderung des Richtungsunterschiedes zu finden, der in P zwischen den Richtungen nach den Objecten Q_1 und Q_2 beobachtet worden ist. Es ergiebt sich

$$dP_2 - dP_1 = -\varrho_2\,.\frac{\sin Q_2}{s_2} + \varrho_1\,.\frac{\sin Q_1}{s_1} - \varrho\,.\frac{\sin P_2}{s_2} + \varrho\,.\frac{\sin P_1}{s_1}$$

$$-\frac{q_2}{s_2}\cos Q_2\,.(\psi-\psi_2) + \frac{q_1}{s_1}\cos Q_1\,.(\psi-\psi_1),$$

worin bedeuten

ϱ ϱ_1 ϱ_2 ψ ψ_1. ψ_2

die Werthe

$206265\,.dp$ $206265\,.dq_1$ $206265\,.dq_2$ $d\varphi_p$ $d\varphi_{q_1}$ $d\varphi_{q_2}$.

Man hat aber auch, sobald man dP als wahrscheinlichste Aenderung von P ansieht

$d(P_2 - P_1) = dP_2 - dP_1 =$ beobachteter Winkelwerth $P_2 - P_1$,
+ Beobachtungsfehler $(P_2) - (P_1)$,
— berechneter Winkelwerth $\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1$,

mithin

$$(P_2) - (P_1) = (\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1) - (P_2 - P_1) - \varrho_2\,.\frac{\sin Q_2}{s_2} + \varrho_1\,.\frac{\sin Q_1}{s_1} - \varrho\,.\frac{\sin P_2}{s_2}$$

$$+\varrho\,.\frac{\sin P_1}{s_1} - \frac{q_2}{s_2}\,.\cos Q_2\,(\psi-\psi_2) + \frac{q_1}{s_1}\cos Q_1\,(\psi-\psi_1).$$

In dieser Gleichung tritt nur die Differenz $(\mathfrak{P}_2 - \mathfrak{P}_1)$ auf, so dass $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_1$ für sich allein nicht bekannt zu sein brauchten, wenn diese Werthe nicht in die Berechnung der Coefficienten der ϱ für die Werthe P_2 und P_1 zu substituiren wären. Immerhin bedarf man nur einer genäherten Kenntniss der Einzelwerthe $\mathfrak{P}$.

Jede weitere Richtung nach Q_3, Q_4, Q_5 u. s. f., die in P eingeschnitten wird, giebt eine ähnliche Gleichung, wenn man sich diese Richtungen mit

zelnen Theile der Normalgleichungen, welche von den Beobachtungen auf den einzelnen Stationen herrühren, von einander unterscheiden.

So kommen hinsichtlich der Messungen auf Station P aus den beiden Systemen 4 und 5 in die Normalgleichung für ϱ_i die Glieder (rechter Hand vom Gleichheitszeichen, wenn links immer schliesslich die Null zu stehen kommt)

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} &-\{u\,.\,g_i+u'\,.\,g_i'+\ldots\}\,.\,\frac{\sin Q_i}{s_i}\\ &+\{(P_i-\mathfrak{P}_i)\,g_i+(P_i-\mathfrak{P}_i)'\,.\,g_i'+\ldots\}\,.\,\frac{\sin Q_i}{s_i}\\ &+\left\{\frac{\sin Q_i}{s_i}\,.\,\frac{\sin Q_i}{s_i}\,.\varrho_i+\frac{\sin Q_i}{s_i}\,.\,\frac{\sin P_i}{s_i}\,.\,\varrho\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\sin Q_i\cos Q_i}{s_i}\,.\,\frac{q_i}{s_i}\,.\,(\psi_i-\psi)\right\}\,.\,\{g_i+g_i'+\ldots\}.\end{aligned}\right.$$

Dagegen ergeben sich für die Normalgleichung von ϱ, einer Coordinatenverbesserung von P, aus den Messungen auf Station P die Werthe

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} &-\left\{\frac{\sin P_1}{s_1}\,.g_1+\frac{\sin P_2}{s_2}\,.g_2+\frac{\sin P_3}{s_3}\,.\,g_3+\ldots\right\}\,.\,u\\ &-\left\{\frac{\sin P_1}{s_1}\,.g_1'+\frac{\sin P_2}{s_2}\,.g_2'+\frac{\sin P_3}{s_3}\,.\,g_3'+\ldots\right\}\,.\,u'\\ &-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\ &+\{(P_1-\mathfrak{P}_1).g_1+(P_1-\mathfrak{P}_1)'.\,g_1'+\ldots\}\,.\,\frac{\sin P_1}{s_1}\\ &+\{(P_2-\mathfrak{P}_2).\,g_2+(P_2-\mathfrak{P}_2)'.\,g_2'+\ldots\}\,.\,\frac{\sin P_2}{s_2}\\ &+\{(P_3-\mathfrak{P}_3).\,g_3+(P_3-\mathfrak{P}_3)'.\,g_3'+\ldots\}\,.\,\frac{\sin P_3}{s_3}\\ &+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\ &+\left\{\frac{\sin Q_1}{s_1}.\frac{\sin P_1}{s_1}.\varrho_1.-\frac{\sin P_1\,.\cos Q_1}{s_1}.\frac{q_1}{s_1}.\psi_1\right\}.\,\{g_1+g_1'+\ldots\}\\ &+\left\{\frac{\sin Q_2}{s_2}.\frac{\sin P_2}{s_2}.\varrho_2-\frac{\sin P_2\,.\cos Q_2}{s_2}.\frac{q_2}{s_2}.\psi_2\right\}.\{g_2+g_2'+\ldots\}\\ &+\left\{\frac{\sin Q_3}{s_3}.\frac{\sin P_3}{s_3}.\varrho_3-\frac{\sin P_3\,.\cos Q_3}{s_3}.\frac{q_3}{s_3}.\psi_3\right\}.\,\{g_3+g_3'+\ldots\}\\ &+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\ &+\left\{\frac{\sin P_1}{s_1}.\frac{\sin P_1}{s_1}(g_1+g_1'+\ldots)+\frac{\sin P_2}{s_2}.\frac{\sin P_2}{s_2}(g_2+g_2'+\ldots)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\sin P_3}{s_3}.\frac{\sin P_3}{s_3}(g_3+g_3'+\ldots)+\ldots\right\}\,.\,\varrho\\ &+\left\{\frac{\sin P_1\,.\cos Q_1}{s_1}.\frac{q_1}{s_1}(g_1+g_1'+\ldots)+\frac{\sin P_2\,.\cos Q_2}{s_2}.\frac{q_2}{s_2}(g_2+g_2'+\ldots)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\sin P_3\,.\cos Q_3}{s_3}.\frac{q_3}{s_3}\,.\,(g_3+g_3'+\ldots)+\ldots\right\}.\psi.\end{aligned}\right.$$

Hierzu treten noch Gliederschaaren ähnlich denen unter 7) wegen der Messungen auf den anderen Stationen, während zu 7) Gliederschaaren treten, die denen unter 8) gleichen, soweit sie von den Messungen auf der Station herrühren, zu welcher ϱ_i gehört, dagegen denen unter 7) gleichen, soweit sie andere Stationen betreffen.

Aus den Normalgleichungen für die ϱ und ψ eliminirt man die u mit Hilfe der in Abschnitt 5 angegebenen Werthe derselben.

Selbstverständlich erheischt die Uebersicht des Ganzen eine tabellarische Anordnung, die noch näher erörtert werden wird.

7.

Unter den beobachteten Richtungen giebt es auch locale Visuren, die Objecte betreffen, welche nur von einer Station aus eingeschnitten werden, — oder untergeordnete Objecte, die zwar von mehreren Stationen eingeschnitten werden, jedoch viel weniger oft als die anderen Objecte, weshalb man den Zusammenhang der Visuren im Netze aufgiebt und sich vorstellt, dass diese Visuren gewissermassen verschiedene Objecte beträfen. Für das von P aus in localen Visuren eingeschnittene Object Q_n gestalten sich die Fehlergleichungen zunächst wie für jedes andere Object; da man aber offenbar die Glieder

$$\frac{\sin Q_n}{s_n}.\varrho_n \qquad \frac{q_n}{s_n}.\cos Q_n.\psi_n$$

nicht trennen kann, indem eine andere Function von ϱ_n und ψ_n nicht vorkommt, so vereinige man vorerst diese Glieder unter dem Symbol y und die betreffenden Fehlergleichungen in System 4 und 5 gehen dann über in

$$\text{für 4:}\quad (P_n) = u - (P_n - \mathfrak{P}_n) - \frac{\sin P_n}{s_n}.\varrho - \frac{q_n}{s_n}.\cos Q_n.\psi - y$$

$$\text{„ 5:}\quad (P_n)' = u' - (P_n - \mathfrak{P}_n)' - \frac{\sin P_n}{s_n}.\varrho - \frac{q_n}{s_n}.\cos Q_n.\psi - y.$$

Obgleich nun ϱ und ψ auch noch in anderer Verbindung vorkommen, so erhellt doch, dass eine weitere Vereinfachung gestattet ist durch Zusammenziehung der Glieder

$$-\frac{\sin P_n}{s_n} \qquad \varrho.\frac{q_n}{s_n}.\cos Q_n.\psi \qquad y$$

in die Unbekannte x, so dass man als Fehlergleichungen erhält

$$9)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{für 4)} & (P_n) = u - (P_n - \mathfrak{P}_n) + x \\ \text{„ 5)} & (P_n)' = u' - (P_n - \mathfrak{P}_n)' + x \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Die Zulässigkeit dieser Vereinfachung lässt sich auch dadurch zeigen, dass man sich die Normalgleichungen für die ϱ und ψ gebildet denkt mit Einführung des y. Nach Elimination der u zeigt sich alsdann immer, dass in diesen Normalgleichungen dasjenige, was von

$$\frac{\sin P_n}{s_n}.\varrho + \frac{q_n}{s_n}.\cos Q_n.\psi + y$$

herrührt, so zusammengefasst werden kann, dass dieses Aggregat als eine Grösse — x — auftritt.

Jeder localen Visur entspricht eine Unbekannte x und dieser eine Normalgleichung von der Form

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &+ u\,.\,g_n + u'.\,g_n' + \dots \\ &- (P_n - \mathfrak{P}_n)\,g_n - (P_n - \mathfrak{P}_n')\,g_n' - \dots \\ &+ x\,(g_n + g_n' + \dots). \end{aligned}\right.$$

Kommen in einem Gyrus mehrere locale Visuren vor, so greifen die Normalgleichungen derselben in einander ein. Jedenfalls wird die Elimination der u aus diesen Gleichungen und die darauf erfolgende Elimination der x aus den Normalgleichungen der ϱ und ψ nicht viele Mühe machen.

Die Uebersichtlichkeit des Ganzen wird gewinnen, wenn die Objecte der localen Visuren die ersten Nummern erhalten, oder auch die Unbekannten x den ϱ und ψ vorangesetzt werden.

8.

Vorschrift zu tabellarischer Berechnung.

Unter der Annahme, dass nur Gewichte 1 oder Null vorkommen, soll jetzt in Worten eine Vorschrift zu tabellarischer Berechnung gegeben und diese weiterhin durch ein Beispiel erläutert werden.

Für jede Station werden die beobachteten Gyris zusammengestellt und dabei die Reihen mit denselben Objecten insbesondere unter einander gruppirt. Den Ablesungen für eine Richtung giebt man wie üblich den Betrag Null und ist in einem Gyrus dieselbe nicht beobachtet, so wählt man doch die Ablesung für eine der beobachteten Richtungen so, dass sie ungefähr denselben Betrag erreicht, wie in den übrigen Reihen, wo jene Richtung nicht fehlt.

Die berechneten Richtungsunterschiede geben das Mittel zur Berechnung derjenigen $\mathfrak{P}$, welche in den Differenzen $(P - \mathfrak{P})$ vorkommen. Man wird für die Richtung, deren Ablesung Null ist, auch $\mathfrak{P}$ Null setzen und dem entsprechend die Werthe $\mathfrak{P}$ für die anderen Richtungen aufstellen.

Von den Beobachtungswerthen ziehe man jetzt die betreffenden berechneten Werthe ab und trage die Differenzen in eine Tabelle — für jede Station eine besondere — derartig ein, dass die Werthe eines Gyrus unter einander, die einer Richtung neben einander zu stehen kommen. Diese Tabelle heisse PI für Station P. In diesen Tabellen bilde man die Summen der verticalen Colonnen, bilde hieraus die Quotienten dieser Summen und der betreffenden Gliederzahl und ziehe die so erhaltenen Mittelwerthe von jedem Gliede der zugehörenden Colonne ab. Die Differenzen setze man in eine Tabelle II — für Station P PII —, so dass die Werthe für einen

Gyrus nunmehr neben einander, hingegen die einer Richtung unter einander zu stehen kommen. Die Summen der Glieder der horizontalen Reihen müssen hiernach Null sein.

Die negativen Summen der verticalen Colonnen aber trägt man für alle Stationen zusammen in eine Haupttabelle, welche die Summen der Stationstabellen in Horizontalreihen aufnimmt, doch so, dass die Summen, welche für verschiedene Stationen denselben Objecten entsprechen, Verticalreihen bilden. Die Tabelle enthält daher für jede Beobachtungsstation eine Horizontalreihe, für jedes beobachtete Object eine Verticalreihe und es ist wünschenswerth, die Verticalreihen solcher Objecte, die locale Visuren geben, den anderen vorangehen zu lassen.

In Tabellen III, für jede Station eine besondere, trage man nun die Coefficienten der ϱ und ψ*) entsprechend den Visuren nach den Objecten ein, so dass in einer Horizontalreihe die Coefficienten für alle Visuren nach demselben Objecte, in einer Verticalreihe die Coefficienten derselben Unbekannten stehen. Die Anordnung der Horizontalreihen zu einander muss der Reihenfolge der Verticalreihen der Haupttabelle entsprechen und ebenso die Anordnung der Verticalreihen, nur dass die Verticalreihen, mit Ausnahme für die Unbekannten x, Doppelreihen sind für ϱ und ψ desselben Netzpunktes.

Jeder Horizontalreihe setze man eine Zahl bei, welche angiebt, wie oft die betreffende Visur wiederholt worden ist.

Auch bemerke man, dass die Coefficienten der ϱ zweier gegenseitig beobachteten Netzpunkte in den beiden Fehlergleichungen gleich sind, so dass resp. ϱ_m und ϱ_n in der Visur MN dieselben Coefficienten besitzen, als resp. ϱ_m und ϱ_n in der Visur NM.

Zur Bildung der u addire man die Verticalreihen der Tabellen III, nachdem man diejenigen Horizontalreihen, welche nichtbeobachteten Objecten zukommen, verdeckt hat; die Summen dividire man durch die Anzahl der freien Horizontalreihen und setze die Glieder als Horizontalreihe in Tabelle IV. Für jede Station ergiebt sich eine Tabelle IV, in denen die Glieder der Horizontalreihen die Coefficienten der Unbekannten sind, mit denen sie multiplicirt die negativen Werthe der u der sämmtlichen Gyris der Reihe nach angeben. Gyris mit gleichen Objecten haben gleiche u, deren Werth nur ein Mal aufgeführt zu werden braucht.

Nunmehr hat die Bildung der Normalgleichungen für die x, ϱ und ψ zu beginnen. Jede derselben stelle man auf zwei Bogen dar, deren einer die von den u unabhängigen Glieder aufzunehmen hat, während die von den u abhängigen Glieder den anderen erfüllen. Zieht man die letzteren

*) Also $-\frac{\sin Q_1}{s_1}$ für ϱ_1; $\frac{q_1}{s_1} \cos Q_1$ für ψ_1 u. s. f.

sodann von den ersteren ab, so ergiebt sich die gleich Null zu setzende rechte Seite der Normalgleichung.

Auf den ersten Bogen der Normalgleichung für ϱ_i kommen nun z. B. hinsichtlich der Messungen auf Station P zu stehen

als Theil des Absolutgliedes eine Summe von Producten gebildet aus dem 1., 2., 3., ... Gliede der P^{ten} Horizontalreihe der Haupttabelle mit resp. den gleichnamigen Gliedern der Verticalreihe in P III, welche ϱ_i zugehört,

alle Glieder, welche entstehen, indem man die Horizontalreihen von P III als rechte Seiten von Gleichungen ansieht, aus denen man die Normalgleichungen für ϱ_i zu bilden hat. Als Gewicht dieser Reihen oder Gleichungen sind die Zahlen anzusehen, welche hinter diese Reihen gesetzt wurden.

Auf den zweiten Bogen kommen für dieselbe Normalgleichung

a) wenn ϱ_i zum Radiusvector von P gehört: eine Reihe von Producten gebildet aus den in Tabelle IV befindlichen negativen u-Werthen mit resp. den Summen derjenigen Glieder der zu ϱ_i gehörenden Verticalreihe in P III, welche zu nicht verschwindenden Horizontalreihen gehören. (Es mussten nämlich schon bei Bildung der u diejenigen der letzteren, welche nichtbeobachteten Objecten entsprachen, bedeckt werden.)

b) wenn ϱ_i zum Radiusvector von P nicht gehört: das Product aus dem in diesem Falle einzigen Coefficienten der zu ϱ_i gehörenden Verticalreihe in P III mit der Summe aller negativen u, deren Gyris die zu ϱ_i gehörende Station als Object enthalten.

Wesentlich einfacher ist die Bildung der Normalgleichung für die x, sie erhellt unmittelbar aus Gleichungssystem 9), lässt sich überdies genau so vornehmen, wie die Bildung der Normalgleichung für ein ϱ oder ψ.

9.

Die nichtquadratischen Coefficienten der Normalgleichungen müssen in symmetrischer Weise mit einander übereinstimmen und ist dies eine Rechnungscontrole.

Die Auflösung der Normalgleichungen erfolgt nun zunächst soweit, dass nur noch die Unbekannten ϱ und ψ, nicht aber die x mehr vorkommen, und diese Normalgleichungen sollen nun im Folgenden immer als diejenigen für ϱ und ψ bezeichnet werden, indem auch die Schwierigkeiten der Elimination der x zu denen der weiteren Auflösung in keinem Verhältnisse stehen, und diese x wie die u nur als vorübergehend wichtige Hilfsgrössen auftreten.

Die weitere Auflösung erfolgt im Falle zweier gegebenen Punkte wie gewöhnlich, ebenso die Gewichtsberechnung.

Substituirt man die ermittelten ϱ, ψ, x, u in die Fehlergleichungen, so ergeben sich die Verbesserungen der Richtungen und Winkel und es müs-

sen die ausgeglichenen Winkel den Winkel- und Seitenbedingungsgleichungen des Netzes genügen, was indess nur ein Zeichen der genauen Aufstellung der Fehlergleichungen ist, welche diese Bedingungsgleichungen identisch erfüllen müssen.

Die sorgfältigste Controle der Ausgleichung besteht in nochmaliger Berechnung der Coordinaten mittelst der ausgeglichenen Winkelwerthe und müssen die so ermittelten Werthe mit den verbesserten anfänglichen Werthen genau übereinstimmen.

10.

Die schematische Berechnung der Beobachtungsfehler erfolgt, indem man zunächst mit Hilfe der Tabellen IV die negativen u-Werthe bestimmt, sodann die numerischen Werthe der Glieder (welche mit ihren resp. Unbekannten zu multipliciren sind) der Horizontalreihen der Tabellen III summirt und von diesen Summen die betreffenden negativen u-Werthe subtrahirt und ebenso die betreffenden Glieder der Tabellen II subtrahirt.

Man erhält z. B. die Verbesserungen der Visuren nach den einzelnen Objecten des ersten Gyrus auf Station P, wenn man von den Summen der Horizontalreihen P III, welche beobachteten Objecten entsprechen, den negativen u-Werth des ersten Gyrus subtrahirt und hiervon resp. das 1., 2., 3. ... numerisch angegebene Glied der Tabelle P II abzieht.

11.

Um die tabellarische Anordnung an einem Beispiele wenigstens etwas zu erläutern, werde die Beobachtung eines reinen Quadrates fingirt. Es sei der Einfachheit halber als eben vorausgesetzt, Station 1 sei Coordinatenanfang, die Anomalie der Seite 1. 2 (von links nach rechts gezählt) sei 45^0 und die Länge 2. 4 sei gleich $\sqrt{2}$ gefunden.

Die genäherten, mit Hilfe des vorläufigen, der reinen Quadratform scharf entsprechenden Winkelsystemes berechneten Coordinaten seien

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = 1, \qquad r_3 = \sqrt{2}, \qquad r_4 = 1,$$
$$\varphi_1 \text{ fällt aus}, \qquad \varphi_2 = 45^0, \qquad \varphi_3 = 90^0, \qquad \varphi_4 = 135^0.$$

Obgleich die Länge $r_2 = 1$ nicht definitiv ist, soll dies doch so angenommen werden, um an den Fall zunächst anzuschliessen, wo die Coordinaten zweier Punkte bekannt sind.

Nach erfolgter Ausgleichung lässt sich dann immer noch in einfacher Weise die Messung von 2. 4 berücksichtigen, sobald es auf Gewichtsberechnung nicht ankommt. Ist diese erwünscht, so darf die Ausgleichung sich wie im Folgenden nicht blos auf die Coordinaten von 3 und 4 erstrecken, sondern muss auch die Grösse ϱ_2 enthalten.

Die beobachteten Richtungswerthe (wobei von localen Visuren, als welche in sehr einfacher Weise in die Rechnung eingehen, abgesehen ist) seien folgende für:

Station 1.

	2.	3.	4.
1. Satz	0. 0. 0.	45° 0′ 0, 3	90° 0′ 0,″9
2. „	0. 0. 0.	45 0 1,0	
3. „		45 0 0,0	89 59 59,8

Station 2.

	1.	3.	4.
1. Satz	0. 0. 0.	270° 0′ 0,″6	315° 0′ 0,″3
2. „	0. 0. 0.		315 0 0,6
3. „		270 0 0,0	315 0 1,0

Station 3.

	1.	2.	4.
1. Satz	0. 0. 0.	45 0 1,0	315 0 0,5
2. „	0. 0. 0.	45 0 0,3	314 59 59,7

Station 4.

	1.	2.	3.
1. Satz	0. 0. 0.	45 0 0,2	90 0 1,3
2. „	0. 0. 0.	45 0 1,0	90 0 0,5

Hieraus folgen die Tabellen I und II, sowie die Haupttabelle:

1. I.

	1. Satz.	2. Satz.	3. Satz.
2.	0,0	0,0	
3.	0,3	1,0	0,0
4.	0,9		— 0,2
Mittel	0,4	0,5	— 0,1

2. I.

	1.	2.	3.
1.	0,0	0,0	
3.	0,6		0,0
4.	0,3	0,6	1,0
	0,3	0,3	0,5

3. I.

	1.	2.
1.	0,0	0,0
2.	1,0	0,3
4.	0,5	— 0,3
	0,5	0,0

4. I.

	1.	2.
1.	0,0	0,0
2.	0,2	1,0
3.	1,3	0,5
	0,5	0,5

1. II.

	2.	3.	4.	Controle
1. Satz	— 0,4	— 0,1	+ 0,5	0,0
2. „	— 0,5	+ 0,5		0,0
3. „		+ 0,1	— 0,1	0,0
Summe	— 0,9	+ 0,5	+ 0,4	0,0

2. II.

	1.	3.	4.	
1. Satz	— 0,3	+ 0,3	0,0	0,0
2. „	— 0,3		+ 0,3	0,0
3. „		— 0,5	+ 0,5	0.0
	— 0,6	— 0,2	+ 0,8	0,0

3. II.

	1.	2.	4.	
1. Satz	— 0,5	+ 0,5	0,0	0,0
2. „	0,0	+ 0,3	— 0,3	0,0
	— 0,5	+ 0,8	— 0,3	0,0

4. II.

	1.	2.	3.	
1. Satz	— 0,5	— 0,3	+ 0,8	0,0
2. „	— 0,5	+ 0,5	0,0	0,0
	— 1,0	+ 0,2	+ 0,8	0,0

Haupttabelle.

	1.	2.	3.	4.	
1.	.	+ 0,9	— 0,5	— 0,4	
2.	+ 0,6	.	+ 0,2	— 0,8	
3.	+ 0,5	— 0,8	.	+ 0,3	
4.	+ 1,0	— 0,2	— 0,8	.	

Hierauf berechnen sich die Tabellen III und IV mit Weglassung der Colonnen für ϱ_1, ϱ_2, ψ_1, ψ_2 zu:

1. III.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4	
1.	.	.	.	.	.
2.	.	.	.	.	2.
3.	0,0	+ 1,0	.	.	3.
4.	.	.	0,0	+ 1,0	2.

2. III.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4	
1.	.	.	.	.	2.
2.	.	.	.	.	.
3.	— 0,7071	+ 1,0	.	.	2.
4.	.	.	— 0,5	+ 0,5	3.

3. III.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4	
1.	.	.	.	.	2.
2.	— 0,7071	0,0	.	.	2.
3.	.	.	.	.	.
4.	+ 0,7071	0,0	— 1,0	0,0	2.

4. III.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4	
1.	.	.	.	.	2.
2.	.	.	— 0,5	— 0,5	2.
3.	+ 0,7071	+ 1,0	— 1,0	— 1,0	2.
4.	.	.	.	.	.

1. IV.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4
$-u$	0,0	+ 0,3333	0,0	+ 0,3333
$-u'$	0,0	+ 0,5000	.	.
$-u''$	0,0	+ 0,5000	0,0	+ 0,5000

2. IV.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4
$-u$	— 0,2357	+ 0,3333	— 0,1667	+ 0,1667
$-u'$	.	.	— 0,2500	+ 0,2500
$-u''$	— 0,3536	+ 0,5000	— 0,2500	+ 0,2500

3. IV.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4
$-u$ und $-u'$	0,0	0,0	— 0,3333	0,0

4. IV.

	ϱ_3	ψ_3	ϱ_4	ψ_4
$-u$ und $-u'$	+ 0,2357	+ 0,3333	— 0,5000	— 0,5000

Die Normalgleichungen werden:

1. für ϱ_3.

$$\text{1. Theil}\left\{\begin{array}{llllll} 0,0 & +0,0\,\varrho_3 & +0,0\quad\psi_3 & +0,0\quad\varrho_4 & +0,0 & \psi_4 \\ -0,14142 & +1,0 & -1,4142 & +0,0 & +0,0 & \\ +0,77781 & +2,0 & 0,0 & -1,4142 & +0,0 & \\ -0,56568 & +1,0 & +1,4142 & -1,4142 & -1,4142 & \psi_4 \end{array}\right\};$$

davon ab als

$$\text{2. Theil}\left\{\quad 0. \quad \begin{array}{llll} +0,0\quad\varrho_3 & +0,0\quad\psi_3 & +0,0\quad\varrho_4 & +0,0\quad\psi_4 \\ +0\ 4167 & -0,5893 & +0,2946 & -0,2946 \\ +0,0 & +0,0 & +0,0 & +0,0 \\ +0,3333 & +0,4714 & -0,7071 & -0,7071 \end{array}\right\},$$

oder zusammengezogen

$$1)\qquad 0 = +0{,}0707 + 3{,}25\,\varrho_3 + 0{,}1179\,\psi_3 - 2{,}4159\,\varrho_4 - 0{,}4125\,\psi_4.$$

2. für ψ_3.

$$\text{1. Theil}\left\{\begin{array}{lllll} -0{,}5 & \cdot & +3\,\psi_3 & & \\ +0{,}2 & -1{,}4142\,\varrho_3 & +2 & & \\ 0{,}0 & \cdot & \cdot & \cdot & \\ -0{,}8 & +1{,}4142 & +2 & -2\,\varrho_4 & -2\,\psi_4 \end{array}\right\}.$$

$$\text{2. Theil}\left\{\begin{array}{llll} & +1{,}3333\,\psi_3 & & +0{,}8333\,\psi_4 \\ -0{,}5893\,\varrho_3 & +0{,}8333 & -0{,}4167\,\varrho_4 & +0{,}4167 \\ \cdot & \cdot & & \\ +0{,}4714 & +0{,}6667 & -1{,}0000 & -1{,}0000 \end{array}\right\}.$$

$$2)\qquad 0 = -1{,}1 + 0{,}1179\,\varrho_3 + 4{,}1667\,\psi_3 - 0{,}5833\,\varrho_4 - 2{,}2500\,\psi_4.$$

3. für ϱ_4.

$$\text{1. Theil}\left\{\begin{array}{lllll} 0{,}0 & +0{,}0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ +0{,}4 & \cdot & \cdot & +0{,}75\,\varrho_4 & -0{,}75\,\psi_4 \\ -0{,}3 & -1{,}4142\,\varrho_3 & \cdot & +2{,}00 & \cdot \\ +0{,}9 & -1{,}4142 & -2\,\psi_3 & +2{,}50 & +2{,}50 \end{array}\right\}.$$

$$\text{2. Theil}\left\{\begin{array}{llll} 0{,}0 & & & \cdot \\ +0{,}2947\,\varrho_3 & -0{,}4167\,\psi_3 & +0{,}3333\,\varrho_4 & -0{,}3333\,\psi_4 \\ \cdot & \cdot & +0{,}6667 & \cdot \\ -0{,}7071 & -1{,}0000 & +1{,}5000 & +1{,}5000 \end{array}\right\}.$$

$$3)\qquad 0 = 1{,}0 - 2{,}4160\,\varrho_3 - 0{,}5833\,\psi_3 + 2{,}75\,\varrho_4 + 0{,}5833\,\psi_4.$$

4. für ψ_4.

$$\text{1. Theil}\left\{\begin{array}{lllll} -0{,}4 & \cdot & \cdot & \cdot & +2{,}00\,\psi_4 \\ -0{,}4 & \cdot & \cdot & -0{,}75\,\varrho_4 & +0{,}75 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ +0{,}9 & -1{,}4142\,\varrho_3 & -2\,\psi_3 & +2{,}50 & +2{,}50 \end{array}\right\}.$$

$$\text{2. Theil}\left\{\begin{array}{llll} \cdot & +0{,}8333\,\psi_3 & \cdot & +0{,}8333\,\psi_4 \\ -0{,}2947\,\varrho_3 & +0{,}4167 & -0{,}3333\,\varrho_4 & +0{,}3333 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ -0{,}7071 & -1{,}0000 & +1{,}5000 & +1{,}5000 \end{array}\right\}.$$

$$4)\qquad 0 = +0{,}1 - 0{,}4124\,\varrho_3 - 2{,}25\,\psi_3 + 0{,}5833\,\varrho_4 + 2{,}5834\,\psi_4.$$

Die Uebereinstimmung der doppeltberechneten nichtquadratischen Glieder dient zur Controle der Berechnung.

Mit Weglassung der Berechnung der Gewichte mögen noch Werthe der ϱ und ψ angeführt werden, welche den vier Normalgleichungen bis auf 0,01 Rest genügen. Es sind diese

$$\varrho_3 = -0{,}76,\quad \psi_3 = +0{,}34,\quad \varrho_4 = -1{,}04,\quad \psi_4 = +0{,}37,$$

daher sind die Verbesserungen an r_3 gleich $-0{,}0000037$, an r_4 gleich $-0{,}0000050$.

Sofern nun aber (2.4) genau gemessen gleich $\sqrt{2}$ ist, hat man r_2, r_3, r_4 in demselben Verhältnisse so zu multipliciren, dass die Strecke (2.4) dem

gemessenen Werthe gleich wird. Man findet leicht, dass obigen Verbesserungen

$$(2.4) = \sqrt{2}\,\{1 - 0{,}0000017\}$$

entspricht; um daher (2.4) genau gleich $\sqrt{2}$ zu erhalten, sind die r um 0,0000017 ihres Werthes zu vergrössern.

Die ausgeglichenen Coordinaten sind nun hiernach

$$r_1 = 0,\quad r_2 = 1{,}0 + 0{,}0000017,\quad r_3 = \sqrt{2} - 0{,}0000013,\quad r_4 = 1{,}0 - 0{,}0000033.$$

$$\varphi_2 = 45^0 \qquad \varphi_3 = 90^0\,0' + 0,''34 \qquad \varphi_4 = 135^0\,0' + 0,''37.$$

Es findet sich weiter mit Hilfe der numerischen Werthe der ϱ und ψ für die

1. Station.	2. Station.	3. Station.	4. Station.
$-u = +0{,}237$,	$-u = +0{,}527$,		
$-u' = +0{,}170$,	$-u' = +0{,}352$,	$-u = -u' = +0{,}347$,	$-u = -u' = +0{,}270.$
$-u'' = +0{,}355$,	$-u'' = +0{,}790$,		

Ferner ergeben sich für die Summen der Horizontalreihen der Tabellen III (mit Ausschluss der letzten Verticalcolonne) nachstehende Werthe:

	1. III.	2. III.	3. III.	4. III.
1.	.	.	.	.
2.	.	.	+ 0,537	+ 0,335
3.	+ 0,340	+ 0,877	.	+ 0,473
4.	+ 0,370	+ 0,705	+ 0,503	.

Mit Hilfe der Tabellen II gelangt man jetzt zu den Beobachtungsfehlern (in diesem Beispiele nur auf 2 Decimalen richtig).

Station 1.

	2.	3.	4.	Summa.
1. Satz	+ 0,163	+ 0,203	− 0,367	0,0
2. „	+ 0,330	− 0,330	.	0,0
3. „	.	− 0,115	+ 0,115	0,0

Station 2.

	1.	3.	4.	
1. Satz	− 0,227	+ 0,050	+ 0,178	0,0
2. „	− 0,052	.	+ 0,053	0,0
3. „	.	+ 0,587	− 0,585	0,0

Station 3.

	1.	2.	4.	
1. Satz	+ 0,153	— 0,310	+ 0,156	0,0
2. „	— 0,347	— 0,110	+ 0,456	0,0

Station 4.

	1.	2.	3.	
1. Satz	+ 0,230	+ 0,365	— 0,597	0,0
2. „	+ 0,230	— 0,435	+ 0,203	0,0

Mit Hilfe dieser Werthe lassen sich nun sofort sämmtliche ausgeglichene Winkelwerthe aufstellen. Auch kann man zur Prüfung der Rechnung die Seiten- und Winkelbedingungsgleichungen aufstellen.

Man erhält:

Station 1.	Station 2.	Station 3.	Station 4.
2. 0. 0. 0.	1. 0. 0. 0.	1. 0. 0. 0.	1. 0. 0. 0.
3. 45. 0. 0,340.	3. 270. 0. 0,877.	2. 45. 0. 0,537.	2. 45. 0. 0,335.
4. 90. 0. 0.370.	4. 315. 0. 0,705.	4. 315. 0. 0,503.	3. 90. 0. 0,473.

Man erkennt hieraus, dass die 3 Winkelgleichungen des Quadrats erfüllt sind. Die Seitenbedingungsgleichung lässt sich für's Quadrat so darstellen, dass die ausgeglichenen Winkel die Gleichung erfüllen müssen:

$$\binom{4.1}{2}+\binom{1.2}{3}-\binom{1.2}{4}-\binom{4.1}{3}=0.$$

Man erkennt sofort, dass auch diese Gleichung erfüllt ist. — Die Ausgleichung der Beobachtungen nach der Hansen-Bessel'schen Methode giebt dieselben Werthe, wie sich Verfasser überzeugt hat.

12.

Die Auflösung der Normalgleichungen der ϱ und ψ erleidet Modificationen, wenn nicht die Coordinaten zweier Punkte bekannt sind, sondern wenn nur die Coordinaten eines Netzpunktes, eine Richtung und eine Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten zweier Punkte gegeben sind. Man wird nämlich sehr oft Ursache haben, den Coordinatenanfang nicht in den einen Endpunkt der Grundlinie, sondern in einen beliebigen andern Netzpunkt zu verlegen, dessen Coordinaten demnach nun bekannt sind. Die Richtung einer der von diesem ausgehenden Seiten betrachtet man als fixirt in gegebener Lage zur Axe des polaren Coordinatensystems.

Die Messung der Grundlinie giebt für die vier Coordinaten ihrer zwei Endpunkte i und k eine Gleichung der Form

$$0 = f + m\varrho_i + n\psi_i + p\varrho_k + q\psi_k, \tag{10}$$

worin

$$f = \mathfrak{B} - B,$$

dem Unterschiede der berechneten Basislänge $\mathfrak{B}$ und der gemessenen B.

Eliminirt man mittelst dieser Gleichung eine Coordinate aus den Fehlergleichungen, so ist die Bildung und Auflösung der aus diesen folgenden Normalgleichungen nicht verschieden von dem bisher darüber Gegebenen. Es ist jedoch aus mehreren Gründen unzweckmässig, so vorzugehen, namentlich deshalb, weil man aus den so gefundenen Normalgleichungen den Einfluss der Basismessung nicht herausbringen kann, recht wohl aber das Bedürfniss dazu entstehen kann, indem vielleicht eine andere Basismessung an Stelle der ersteren eingeführt werden soll u. s. f.

Sehr oft kennt man eine genaue Längendimension noch gar nicht und will doch das Netz schon ausgleichen, was recht wohl geht, wenn man die Gleichung 10) nicht in die Fehlergleichungen einführt.

Man bilde also die Normalgleichungen für die $2(n-1)-1$ oder $2n-3$ Coordinatenverbesserungen oder die Unbekannten ϱ und ψ wie früher. Da jedoch in diesem System eine Längendimension nicht eingeht, kann man die Werthe ϱ und ψ offenbar nicht finden, sondern nur ihre Verhältnisse — oder man kann sie durch einen derselben ausdrücken. Man kann dies immer vornehmen, auch wenn über Lage und Grösse der Basis nichts bekannt ist, und indem man vorläufig den Werth eines ϱ Null annimmt, lassen sich alle Winkel des Netzes scharf angeben. Findet sich später die Gleichung 10) hinzu, so lässt sich aus dieser durch Substitution der Werthe der ϱ leicht eine Gleichung für den genauen Werth des bisher als Null betrachteten ϱ ableiten und damit der sämmtlichen übrigen ϱ und der ψ; die Netzwinkel jedoch werden davon nicht weiter abgeändert. Man kann auf diesem Wege mithin zur Kenntniss der Unbekannten gelangen, auch die Gewichte der ψ und der Verhältnisse der ϱ finden, aber nicht die der ϱ selbst. Hierzu ist erforderlich, dass man wenigstens die Lage der Basis schon vor der Auflösung der Gleichungen kennt.

Ist dies der Fall, so ist in Gleichung 10) nur der Werth der f noch unbekannt; man kann daher schon die Gleichung 10) zu den Normalgleichungen hinzusetzen und wenn k die Correlate der Gleichung 10) ist, zu den rechten Seiten der Normalgleichungen für

$$\varrho_i \qquad \psi_i \qquad \varrho_k \qquad \psi_k$$

die Werthe resp.

$$+mk \quad +nk \quad +pk \quad +qk$$

hinzufügen. Das System erhält dann die Form

$$
11)\left\{\begin{array}{l|l}
0=(al)+(aa)\varrho_1+\ldots+(am)\varrho_i+(an)\psi_i & . \\
\quad+(ap)\varrho_k+(aq)\psi_k+\cdots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
0=(ml)+(am)\varrho_1+\ldots+(mm)\varrho_i+(nm)\psi_i & +mk \\
\quad+(mp)\varrho_k+(mq)\psi_k+\cdots & \\
0=(nl)+(an)\varrho_1+\ldots+(mn)\varrho_i+(nn)\psi_i & +nk \\
\quad+(np)\varrho_k+(nq)\psi_k+\cdots & \\
0=(pl)+(ap)\varrho_1+\ldots+(mp)\varrho_i+(np)\psi_i & +pk \\
\quad+(pp)\varrho_k+(pq)\psi_k+\cdots & \\
0=(ql)+(aq)\varrho_1+\ldots+(mq)\varrho_i+(nq)\psi_i & +qk \\
\quad+(pq)\varrho_k+(qq)\psi_k+\cdots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\hline
0=f\quad.\quad m\varrho_i+n\psi_i+p\varrho_k+q\psi_k & .
\end{array}\right.
$$

Löst man dieses System auf, so wird man in Uebereinstimmung mit oben angegebenen Gründen zunächst die ϱ nur durch eines derselben ausdrücken können, wenn man die Reihenfolge der Gleichungen nicht so abändert, dass die Bedingungsgleichung mindestens die Stelle vor der Normalgleichung für das letzte ϱ einnimmt. Ist nämlich die Elimination bis zu dem vorletzten ϱ vorgeschritten, so wird das Gleichungssystem — abgesehen von den ψ — lauten

$$a)\qquad 0=\mu_1+\alpha_1\,.\,\varrho_{n-1}+\beta_1\,.\,\varrho_n+\gamma_1\,.\,K,$$
$$b)\qquad 0=\mu_2+\beta_1\,.\,\varrho_{n-1}+\beta_2\,.\,\varrho_n+\gamma_2\,.\,K,$$
$$c)\qquad 0=\mu_3+\gamma_1\,.\,\varrho_{n-1}+\gamma_2\,.\,\varrho_n+\gamma_3\,.\,K,$$

worin aber $\alpha_1:\beta_1=\beta_1:\beta_2$ sein wird, da die Gleichungen a und b identisch sein müssen. Aus diesem Grunde ergiebt sich der Werth von K auch zu Null, da im Allgemeinen γ_1 und γ_2 nicht im Verhältnisse $\alpha_1:\beta_1$ stehen. Nach diesen Erörterungen erscheint es auch zweckmässig, die Normalgleichung für ψ_n nach derjenigen für ψ_{n-1} folgen zu lassen, dagegen die Gleichungen für ϱ_{n-1} und ϱ_n hinter denen für ψ_n und ψ_{n-1} anzusetzen — vielleicht überhaupt erst alle Gleichungen für ψ, dann alle diejenigen für ϱ zu nehmen.

Man sieht, dass die Elimination in üblicher Weise nicht fortzusetzen ist; ändert man aber die Reihenfolge a, b, c obiger Gleichungen in a, c, b um, so geht dieses recht wohl an. Es steht alsdann der üblichen Eliminationsweise und Gewichtsberechnung nichts entgegen. — War bei der Auflösung der Gleichungen die Gleichung 10) noch nicht vorhanden, wie oben angenommen, so kann man doch, nachdem Gleichung 10) bekannt wird, den grössten Theil der Auflösung benutzen, um Gleichung 10) in der zuletzt erörterten Weise einzuführen.

Obgleich nicht nothwendig, kann man doch auch die Vertauschung der letzten Gleichungen des Systems 11) vermeiden, indem man für K eine neue Unbekannte einführt, die man jedoch so wählen wird, dass die sym

metrische Anordnung der Coefficienten der Gleichung nicht gestört wird. Zu dem Zwecke ist zu setzen

$$K = K' + m\varrho_i + n\psi_i + p\,\varrho_k + q\,\psi_k$$

oder

$$K = K'' + f + m\varrho_i + n\psi_i + p\,\varrho_k + q\,\psi_k.$$

Durch diese Substitution treten zu den Normalgleichungen für ϱ_i, ψ_i, ϱ_k, ψ_k die Glieder

$$\begin{aligned}
&mm\,.\,\varrho_i + mn\,.\,\psi_i + mp\,.\,\varrho_k + mq\,.\,\psi_k,\\
&mn\,.\,\varrho_i + nn\,.\,\psi_i + np\,.\,\varrho_k + nq\,.\,\psi_k,\\
&mp\,.\,\varrho_i + np\,.\,\psi_i + pp\,.\,\varrho_k + pq\,.\,\psi_k,\\
&mq\,.\,\varrho_i + nq\,.\,\psi_i + pq\,.\,\varrho_k + qq\,.\,\psi_k,
\end{aligned}$$

wenn für K K' gesetzt wird; setzt man aber K'' für K, so hat man noch hinzuzusetzen den vier Gleichungen resp. mf, nf, pf, qf. Selbstverständlich ist die letztere Substitution nicht thunlich, falls f noch nicht bekannt ist.

Durch das Hinzufügen dieser Glieder ändert sich an den Werthen der ϱ und ψ nichts, auch giebt die nunmehr wie gewöhnlich ausführbare Elimination die strengen Gewichtsgrössen; denn indem für diese die Grösse f ausser Acht bleibt, die Summe

$$m\varrho_i + n\psi_i + p\,\varrho_k + q\,\psi_k$$

also den Werth Null erhält, wobei aber die vier hierin vorkommenden Unbekannten Gewichtsgrössen sind, so hat man factisch zu den betreffenden vier Normalgleichungen nur Null addirt.*)

Benutzt man die Substitution K'', so wird durch die Auflösung der Normalgleichungen allein unter Substitution von $K'' = 0$ schon das Werthsystem der ϱ und ψ gefunden, ohne dass man deswegen noch der Bedingungsgleichnug bedürfte, wenigstens so lange als die Gewichte nicht berechnet werden; die Substitution K' jedoch erlaubt die Berechnung der Unbekannten auch ohne Kenntniss von f, indem man vorläufig f unbestimmt lässt; zur definitiven Gewichtsberechnung ist die Kenntniss von f nicht erforderlich.

Die Substitution $K'' = 0$ giebt ferner Normalgleichungen, die denen gleichen, welche man erhalten würde bei Annahme der Gleichung 10) als Fehlergleichung mit dem Gewichte $g = 1$.

13.

Sind mehrere Basismessungen vorhanden und ihr mittlerer Fehler genau bekannt (was bis jetzt nie genügend der Fall war), so könnte man

*) Wählt man für K eine andere Substitution z. B. $K = K''' + p\,.\,\varrho_k$, so werden die Gleichungscoefficienten unsymmetrisch, man kann daher nicht nach den üblichen Formeln rechnen — aber die Auflösung würde doch richtige Werthe der Unbekannten und Gewichte geben.

die entsprechenden Gleichungen 10) mit resp. Gewichten zu den Fehlergleichungen hinzusetzen und bei der Bildung der Normalgleichungen mit berücksichtigen. Der mittlere Fehler der Basismessungen ist meist nicht so festgestellt, dass man die Gewichte der Basismessungen annähernd richtig einführen könnte. Man hat sich begnügt, die Basismessungen als absolut richtig anzusehen, und kann dies um so eher, als die Grundlinien nie so nahe an einander liegen, dass die Länge einer Basis, welche mit Hilfe der Winkel aus einer anderen berechnet werden kann, erhebliches Gewicht hat im Vergleiche zum directen Messungsresultate

Ist die Ausgleichung vollendet und hatte man hierbei eine Basismessung gebraucht, die man durch eine andere (vielleicht an einer anderen Basis geschehene) ersetzen möchte, so kann man von der früheren Ausgleichung fast Alles benutzen, wenn sie so erfolgte, wie im ersten Theile des Abschnittes 12 erläutert wurde; — es handelt sich nur darum, die Auflösung zu wiederholen, und zwar durch alle abgeleiteten Systeme hindurch für die Glieder mit K bei vier Normalgleichungen, sowie darum, auf die Bedingungsgleichung der neuen Messung nach Art der Normalgleichungen die Elimination auszudehnen. Die Stellung dieser Bedingungsgleichung ist wie die der durch sie ersetzten zwischen denen für das vorletzte und letzte ϱ.

Treten weitere Bedingungsgleichungen wegen Basismessungen nach erfolgter Ausgleichung zum Netze, so wird man die Aenderungen der ϱ und ψ sowie ihrer Gewichte nach Hansen*) berechnen, dessen Formeln gestatten, den Betrag der Aenderungen der Unbekannten und ihrer Gewichte kennen zu lernen, wenn zu den sie bestimmenden Normalgleichungen Bedingungsgleichungen treten. Die Bedingungsgleichung der schon berücksichtigten ersten Basis hat ihren Charakter als solche in der Darstellung unter Abschnitt 12 verloren und erscheint dort als Normalgleichung der Unbekannten $K = 0$, daher kann man auch ohne Weiteres die erwähnten Formeln benutzen, was nicht so leicht möglich ist, wenn zu verschiedenen Malen zu Normalgleichungen Bedingungsgleichungen treten.

14.

Nachdem im Vorhergehenden das directe Ausgleichungsverfahren trigonometrischer Netze auseinandergesetzt worden ist, lässt sich dasselbe seiner praktischen Brauchbarkeit nach auch einigermassen mit den bekannten Methoden vergleichen.

Unangenehm zeitraubend ist ohne Zweifel die Bildung der Coefficienten der Fehlergleichung und die darauf folgende Bildung der Normalgleichungen und Elimination der u und x.

*) Von der Methode der kleinsten Quadrate, Abschnitt 42—50. Leipzig 1865. (Es verdient bemerkt zu werden, dass die Hilfsgrösse u in diesem Werke Hansen's unter gleicher Bezeichnung wohl zum ersten Male auftritt.)

Dagegen erspart man die Ausgleichung der Stationen allein, wodurch zugleich die Rechnung einen einfacheren Charakter gewinnt; denn während zu den Normalgleichungen der Stationen die zahlreichen Netzbedingungsgleichungen treten und somit ein weiteres Zusetzen von Bedingungsgleichungen erschwert wird, giebt die directe Methode nur ein System Normalgleichungen, indem die Bedingungsgleichung der Basismessung als eine der ersteren angesehen werden kann. Treten später weitere Bedingungen hinzu, so lassen diese sich nun sehr bequem berücksichtigen nach denselben Formeln, die Hansen für die Netzausgleichung allein gegeben hat.

Hieraus geht hervor, dass verschiedene Dreiecksnetze, die zusammenstossen, nach der directen Methode ausgeglichen, leicht zusammengekuppelt werden können.

Nicht unerwünscht ist gewiss auch der Umstand, dass die directe Methode die Gewichte der Coordinaten angiebt und dass die Aenderungen derselben bei Zusammenkuppelungen nach den mehrerwähnten Hansenschen Formeln berechnet werden können.

An ein bestimmtes Coordinatensystem ist man bei der directen Ausgleichung nur während der Rechnung gebunden; sollte es nach Beendigung derselben rathsam erscheinen, das System zu verlegen u. s. f., so ist dies immer möglich, da mit Hilfe der Verbesserungen ja die ausgeglichenen Netzwinkel angegeben werden können und zwar mit derselben Genauigkeit wie bei den üblichen Methoden.

15.

Ein trigonometrisches Netz liegt factisch auf einer sphäroidischen Oberfläche und nicht, wie bisher angenommen, auf einer sphärischen Oberfläche. Man kann in der That die gemessenen Dreiecke und die Hilfsdreiecke zur Coordinatenberechnung (also die Winkel P, Q, O, Abschnitt 3) auf ebene Dreiecke reduciren durch Anbringen des sphäroidischen Excesses, so dass sich alsdann die ganze Rechnung auf dem Sphäroide bewegt.

Dem Verfasser erschien jedoch die Uebertragung auf die Kugel nach Gauss*) am einfachsten, da sich die Formeln der Uebertragung für die geringe Ausdehnung eines Einzelnetzes sehr vereinfachen.

Ist P die geographische Breite des Coordinatenanfanges auf dem Sphäroide, so ist der Radius der als Träger des übertragenen Netzes auftretenden Kugel

$$A = \frac{a \cos \varphi}{1 - \sin^2 \varphi \,.\, \sin^2 P},$$

a grosse Axe des Erdsphäroides, $\sin \varphi = e$, der numerischen Excentricität desselben.

---

*) Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie von C. Fr. Gauss. Göttingen 1844. Abschnitt 1—13.

Nimmt man nun an, dass nach allen Richtungen hin Radienvectoren über 60 geographische Meilen nicht vorkommen, so lassen sich für Anwendung achtstelliger Logarithmen folgende Formeln zur Uebertragung vom Sphäroide auf die Kugel geben:

Die Länge der bekannten Dreiecksseite überträgt man auf die Kugel durch Multiplication mit

$$\sqrt{m_1 \, . \, m_2},$$

worin m_1 und m_2 das bekannte Vergrösserungsverhältniss bedeuten (m ist der Quotient eines Linearelementes auf der Kugel durch das entsprechende auf dem Sphäroide; seinen numerischen Werth sehe man unten).

Die südwestlichen Azimute einer geodätischen Linie $Q_1 Q_2$ auf dem Sphäroide sowie der damit nahezu zusammenfallenden gemessenen Richtung $Q_1 Q_2$ seien resp. in Q_1 und Q_2

$$V_1 + \psi_1 \quad \text{und} \quad 180^0 + V_2 + \psi_2,$$

auf der Kugel aber gleich V_1 resp. $180^0 + V_2$, so sind in Secunden

$$\psi_1 = -\frac{206265}{6} \, . \, tan^2 \varphi \, . \, sin\, 2P \, . \, \frac{s}{A} \left(2 q_1^2 \, . \, sin\, V_1 - q_2^2 \, . \, sin\, V_2\right),$$

$$\psi_2 = +\frac{206265}{6} \, . \, tan^2 \varphi \, . \, sin\, 2P \, . \, \frac{s}{A} \left(q_1^2 \, . \, sin\, V_1 - 2 q_2^2 \, . \, sin\, V_2\right),$$

s die Länge $Q_1 Q_2$ (auf Kugel oder Sphäroid);

q_1 und q_2 die Breitenunterschiede von Q_1 resp. Q_2 mit dem Coordinatenanfange, in Bogen genommen (auf Kugel oder Sphäroid).*)

Da ψ_1 und ψ_2 nur an den äussersten Stellen des Netzes einige Hundertelsecunden betragen werden, so ist thatsächlich die Correction wegen Uebertragung der gemessenen Richtungen nicht so umständlich, als die Formeln für ψ es erscheinen lassen; ψ ist meistens gleich Null zu setzen.

Die Uebertragung auf die Kugel erfordert an den Beobachtungen so wenige und so kleine Reductionen, dass das auf der Kugel liegende Netz ziemlich unabhängig von der Grösse des Erdellipsoides erscheint und man kann, ohne einen Fehler zu begehen, bei der Uebertragung der sphärischen Coordinaten auf dasselbe recht wohl andere Dimensionen desselben zu Grunde legen, als beim Uebergange auf die Kugel.

Dem sphärischen Radiusvector r entsprichtder sphäroidische Vector

$$r' = \frac{r}{\sqrt{m}},$$

worin m das Vergrösserungsverhältniss für den Endpunkt des Vectors ist, und zwar ist

$$log\, m = -0{,}145 \ldots tan^2 \varphi \, . \, sin\, 2P \, . \, q^3$$

0,145 ... ein Drittheil des Modulus des gemeinen Logarithmensystems,

q Breitenunterschied des betreffenden Punktes, für den m gilt, gegen den Coordinatenanfang (auf der Kugel gemessen und in Bogen angegeben).

*) Ueber den etwa noch in Betracht kommenden Unterschied zwischen den Azimuten der geodätischen Linie $Q_1 Q_2$ und der Richtungen $Q_2 Q_1$ resp. $Q_2 Q_1$ vergl. man Hansen's geodäsische Untersuchungen, Abschnitt 2, Formel 78, 1.

Für den Radiusvector sind ferner

$$\psi_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{r}{A} \cdot k \cdot \sin V_1; \qquad k = \frac{206265}{2} \cdot \tan^2 \varphi \cdot \sin 2P \cdot q^2,$$

wenn das sphärische Azimut des Radiusvector im Coordinatenanfange gleich V_0, das sphäroidische aber gleich $V_0 + \psi_0$ gesetzt wird, und im Endpunkte des sphärischen Radiusvector das Azimut desselben $180^0 + V_1$ beträgt.

16.

Es sollen jetzt über den Zusammenschluss trigonometrischer Netze einige Bemerkungen, an Beispielen anknüpfend, gemacht werden.

Vier Einzelnetze mit je einer Basis seien für sich nach der directen Methode ausgeglichen, stossen aber so zusammen, dass sie ein Kranzsystem bilden. Es mögen die Netze 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4, 4 und 1 in einzelnen Punkten zusammentreffen; 1 und 2 in 2 Punkten, 2 und 3 in 3 solchen, 3 und 4 in 4 solchen, und 4 und 1 in nur einem solchen.

Die Einzelausgleichungen geben vier Normalgleichungssysteme und deren Coefficienten müssen nun mit benutzt werden, um weitere Verbesserungen der sphäroidischen Coordinaten der vier Netze zu berechnen. Allerdings gelten diese Coefficienten nur für die nichtübertragenen Coordinaten streng, da jedoch die weiteren Coordinatenverbesserungen kleine Grössen sind, so würde auf dieselben die Uebertragung (so lange das Vergrösserungsverhältniss m nahezu gleich 1 bleibt) wenig Einfluss äussern, so dass man die Coefficienten der Normalgleichungen ungeändert beibehalten kann.

Diese bedarf man bekanntlich, um die zweiten Aenderungen der Coordinaten zu ermitteln, die die Bedingungsgleichungen erheischen, welche aus dem Zusammenschluss der Netze hervorgehen. Nach den mehrerwähnten Formeln von Hansen lassen sich auch die Gewichte der so geänderten Coordinaten angeben, ebenso die von Functionen derselben, was deshalb wichtig ist, weil man den geschlossenen Netzcomplex doch auf ein Coordinatensystem beziehen, nicht aber die vier Systeme der Einzelnetze beibehalten wird.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen anlangend, so giebt der Schluss der Netze 1 und 2 eine solche, die man erhält, wenn man die Anschlussseite aus den sphäroidischen Coordinaten der Endpunkte in beiden Systemen berechnet und die Aenderungen in der Länge der Anschlussseite durch die noch unbekannten Aenderungen der Coordinaten ausdrückt; die um diese Aenderungen verbesserten Längen der Anschlussseite müssen gleich sein. Für Netz 1 sei nämlich die Anschlussseite die Verbindung von den Punkten

$$i \text{ und } k; \text{ die Länge } ik = l;$$

für Netz 2 sei die Anschlussseite die Verbindung von den Punkten

$$i' \text{ und } k'; \text{ die Länge } i'k' = l',$$

so erhält die Bedingungsgleichung die Form:

$$0 = l - l' + a\varrho_i + b\psi_i + c\varrho_k + d\psi_k - a'\varrho_{i'}' - b'\psi_{i'}' - c'.\varrho_{k'}' - d'.\psi_{k'}',$$

ϱ und ψ beziehen sich auf die zweiten Coordinatenverbesserungen im Netze 1, ϱ' und ψ' ebenso auf diejenigen im Netze 2.

Der Zusammenschluss der Netze 2 und 3 giebt noch drei Gleichungen, da ein Dreieck drei bestimmende Stücke hat, der Zusammenschluss von Netz 3 und 4 giebt ebenso für vier Anschlusspunkte fünf Gleichungen. Im Ganzen hat man also schon neun zu erfüllende Bedingungsgleichungen.

Zu diesen treten noch zwei Gleichungen, indem der aus den vier Netzen gebildete Kranz sich schliesst: Netz 4 und Netz 1 haben nach der Voraussetzung einen gemeinsamen Punkt. Die Aufstellung dieser zwei Gleichungen macht einige Schwierigkeit und erfordert etwa Folgendes.

Man denkt sich an sämmtliche Coordinaten die noch unbekannten zweiten Verbesserungen angebracht; da alsdann Netz 1 und 2, 2 und 3, 3 und 4 zusammengestossen werden können, indem ja ihre Anschlussfiguren mit einander identisch geworden sind, so bilden diese vier Netze eine Art Dreiecksnetz. In demselben wird der Anschlusspunkt für die Netze 1 und 4 doppelt erscheinen. Man kann nun offenbar die Coordinaten dieses Punktes im Netze 4 berechnen aus denen im Netze 1, indem man die übrigen Netze zu Hilfe nimmt. Es ist dies eine beschwerliche Arbeit, um so mehr, als man die Coordinaten, welche in die Rechnung eingehen, mit ihren noch unbekannten zweiten Verbesserungen zu versehen hat.*)

Schliesslich ergiebt sich für jede der beiden Coordinaten eine Gleichung der Form

$$R + \varrho = R' + f(\varrho_1, \psi_1, \varrho_2, \psi_2, \varrho_3, \psi_3, \varrho_4, \psi_4),$$

worin bedeuten R die Coordinate des Anschlusspunktes im Netze 4 nach der ersten Ausgleichung,

ϱ deren zweite Verbesserung,

R' die berechnete Grösse derselben Coordinate, soweit dieselbe von den aus den ersten Ausgleichungen bekannten Theilen der Coordinaten abhängt,

$f(\cdot/.)$ derjenige Theil dieses Werthes, welcher von den zweiten Verbesserungen abhängt.

Hat man einmal die 11 Bedingungsgleichungen, so ist die weitere Rechnung nicht schwierig und nach bekannten Formeln in kurzer Zeit ausführbar.

17.

Ein Dreiecksnetz, welches über 40 Punkte zählt, wird man gewöhnlich in Theile zerlegen von circa 25 bis 30 Punkten. Liegt in jedem solchen Theile eine Basis, so wird man jeden Theil mit Hilfe derselben ausgleichen — ihn also auf eine Kugel übertragen und Coordinaten für einen möglichst

*) Ueber den Zusammenschluss von Kreuzsystemen vergleiche man etwa die Abhandlung von B. v. Prondzynski in den „Astron. Nachr." Bd. 71, p. 144 u. f.

im Centrum gelegenen Ursprung berechnen, die verbesserten Coordinaten aber auf das Sphäroid zurücktragen — und die Theile ähnlich wie oben zusammenstossen*).

Enthält ein solcher Theil keine Basis, so verfahre man wie folgt**):

Man bilde die Normalgleichungen wie gewöhnlich, die man aber nicht vollständig auflösen kann. Es hängt jedoch der betreffende Netztheil mit anderen zusammen, von denen einer eine Basis enthalten möge und man kann nun die Bedingungsgleichungen des Anschlusses benutzen, um die Normalgleichungen in vollständig auflösbare zu verwandeln.

Seien nämlich

$$0 = (al) + (aa)\,x + (ab)\,y + (ac)\,z$$
$$0 = (bl) + (ab)\,x + (bb)\,y + (bc)\,z$$
$$0 = (cl) + (ac)\,x + (bc)\,y + (cc)\,z$$

die Normalgleichungen des betreffenden Theiles,

$$0 = (al)' + (aa)'x' + (ab)'y' + (ac)'z'$$
$$0 = (bl)' + (ab)'x' + (bb)'y' + (bc)'z'$$
$$0 = (cl)' + (ac)'x' + (bc)'y' + (cc)'z'$$

dieselben für den eine Basis enthaltenden Theil, endlich sei die Bedingungsgleichung für die Uebereinstimmung der Längen einer Anschlussseite

$$0 = f + mx + ny + m'x' + n'y',$$

so kann man zwar die ersten Coordinatenverbesserungen $x'y'z'$ berechnen, dagegen x, y und z nur, indem man x und y durch z ausdrückt.

Schreibt man jedoch zu den rechten Seiten der Gleichungen resp. die Glieder

$$+mk \quad +nk; \quad +m'k \quad n'k;$$

substituirt alsdann für k im zweiten Systeme den Werth

$$k = k' + m'x' + n'y',$$

für k im ersten Systeme den gleich grossen

$$k = k' - f - mx - ny,$$

so lassen sich aus den beiden Normalgleichungssystemen einzeln die Unbekannten finden. Die Glieder mit k' werden selbstverständlich dabei weggelassen und gehen erst später in die Rechnung ein, wenn die sämmtlichen Bedingungsgleichungen (und die oben benutzte auch mit) zugezogen werden. Der Fehler also, der durch das Wegbleiben der k-Glieder entsteht, wird später verbessert, und es bezieht sich dies auch auf die Gewichtsgrössen. So entsprechen die Unbekannten und deren Gewichte, welche aus dem zweiten Normalgleichungssysteme nach dessen Abänderung her-

*) Es versteht sich von selbst, dass die Ursprünge der Systeme, deren geographische Lage auf dem Ellipsoide bekannt sein muss, nach erfolgter zweiter Verbesserung der Coordinaten kleine Verschiebungen und die Axen der Systeme kleine Drehungen erhalten müssen, damit die Netze nicht allein zusammenpassen, sondern auch zusammentreffen.

**) Man vergleiche Hansen's Abschnitt 13 citirtes Werk Abschnitt 34.

vorgehen, nicht mehr genau den ersten Coordinatenverbesserungen und deren Gewichten in dem die Basis enthaltenden Netztheile und es wird der Fehler erst corrigirt bei Ermittelung der zweiten Verbesserungen*).

Die Ausgleichungsmethode von Schleiermacher und Untersuchung ihrer Anwendbarkeit auf Richtungsbeobachtungen.

Nach dem, was Verfasser im 3. Bande der höheren Geodäsie von Fischer (Darmstadt 1846) gefunden hat, besteht die genannte Ausgleichungsmethode für Winkelbeobachtungen im Folgenden:

Seien auf Station A gemessen die Winkel $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$

B	„	„	$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots$
C	„	„	$\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \ldots$
D	„	„	$\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \ldots$
. . .	. . .	. . .	. . .

so bestehen zwischen den Winkeln je einer Station allein Gleichungen der Form:

$$0 = \varepsilon_1 . \alpha_1 + \varepsilon_2 . \alpha_2 + \varepsilon_3 \alpha_3 + \ldots,$$

ε gleich ± 1 oder Null.

---

*) In meinen Studien über rationelle Vermessungen hat sich im 24. Abschnitte (pag. 96 des vor. Jahrganges dieser Zeitschrift) ein Formelfehler eingeschlichen. Es muss daselbst heissen anstatt: „Z. B. die Function des n^{ten} Grades von x und y etc." Die Function $z = f(x, y)$ der Constanten x und y und irgend zweier Veränderlichen (die auch von einer dritten abhängen können) giebt zu den Näherungswerthen x_0 und y_0 einen Werth z_0 und es ist für die Verbesserungen dieser Werthe

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} . \Delta y,$$

oder auch

$$0 = -\frac{\Delta z}{w} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{w} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{w}, \qquad w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Hierin werden die Δz mit Hilfe der Beobachtungen und $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit Hilfe der jeweiligen Werthe der Variabeln unter Substitution von x_0 und y_0 für x und y bekannt. Die lineare Gleichung in der letzteren Form kann man betrachten als die Gleichung einer substituirten Geraden, die im Abstande $\frac{\Delta z}{w}$ parallel zur Tangente der Curve $f(x, y)$ im Punkte x_0, y_0 läuft und diese Curve zu ersetzen hat. Jede Beobachtung giebt zufolge geänderter Werthe der Variabeln eine andere Curve und eine andere substituirte Gerade.

Nach erfolgter Ausgleichung gehört zu der substituirten Geraden eine Präcision H, die der Neigung γ der Geraden gegen die Axe der x entspricht, wo

$$\operatorname{tang} \gamma = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Der zu H gehörende mittlere Fehler ist der mittlere Fehler in dem ausgeglichenen Werthe von $\frac{\Delta z}{w}$, womit also auch nach wenig Rechnung der mittlere Fehler der $f(x, y)$ der ausgeglichenen Constanten x und y angegeben werden kann.

Behält man als Repräsentant dieser Gleichungsschaaren für jeden Punkt nur eine Gleichung bei, so hat man zunächst die Gleichungen

$$
\text{I.}\quad \begin{cases} 0=\varepsilon_1\ \alpha_1+\varepsilon_2\ \alpha_2+\varepsilon_3\ \alpha_3+\dots \\ 0=\varepsilon_1'\ \beta_1+\varepsilon_2'\ \beta_2+\varepsilon_3'\ \beta_3+\dots \\ 0=\varepsilon_1''\gamma_1+\varepsilon_2''\ \gamma_2+\varepsilon_3'\ \gamma_3+\dots \\ 0=\varepsilon_1'''\delta_1+\varepsilon_2'''\ \delta_2+\varepsilon_3'''\ \delta_3+\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}
$$

Die Winkel verschiedener Stationen treten im Netze auch als Dreieckswinkel auf, die Dreiecke setzen sich zu Polygonen zusammen und diese beiden Umstände veranlassen das Auftreten der Winkel- und Seitenbedingungsgleichungen. Erstere enthalten immer nur drei Winkel, die in einer anderen Winkelbedingungsgleichung nicht wieder auftreten — und hierin liegt der Kern der vorliegenden Methode.

Das System der Winkelgleichungen und Seitengleichungen möge durch folgende Gleichungen vertreten werden:

$$
\text{II.}\quad \begin{cases} 0=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 \\ 0=\alpha_2+\beta_2+\delta_1 \\ 0=\alpha_3+\gamma_2+\delta_2 \\ \dots\dots \end{cases}
$$

$$
\text{III.}\quad \begin{cases} 0=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\mu_3\alpha_3+\dots \\ \quad+\mu_1'\beta_1+\mu_2'\beta_2+\mu_3'\beta_3+\dots \\ \quad+\mu_1''\gamma_1+\mu_2''\gamma_2+\mu_3''\gamma_3+\dots \\ \quad+\mu_1'''\delta_1+\mu_2'''\delta_2+\mu_3'''\delta_3+\dots \end{cases}
$$

worin die μ irgend welche Zahlenwerthe annehmen werden, sowie vorausgesetzt ist, dass die Symbole α, β, γ, δ u. s. f. nur noch kleine Verbesserungen der Beobachtungsgrössen bedeuten. Die sogenannten Absolutglieder der Gleichungen I, II, III, welche durch Einführung der Beobachtungswerthe entstehen, sind der Einfachheit wegen weggelassen.

Um zu den wahrscheinlichsten, den Beobachtungen sich möglichst anschliessenden Werthen zu gelangen, macht man die Summe der Quadrate der Verbesserungen α, β, ... zu einem Minimum, wofür die Bedingungen in der Gleichung enthalten sind

$$
\left.\begin{matrix} \alpha_1\,d\alpha_1+\alpha_2\,d\alpha_2+\alpha_3\,d\alpha_3+\dots \\ +\beta_1\,d\beta_1+\beta_2\,d\beta_2+\beta_3\,d\beta_3+\dots \\ +\gamma_1\,d\gamma_1+\gamma_2\,d\gamma_2+\gamma_3\,d\gamma_3+\dots \\ +\delta_1\,d\delta_1+\delta_2\,d\delta_2+\delta_3\,d\delta_3+\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{matrix}\right\}
$$

$$
=\begin{cases} a_1(\varepsilon_1\,d\alpha_1+\varepsilon_2\,d\alpha_2+\varepsilon_3\,d\alpha_3+\dots)+a_2(\varepsilon_1'd\beta_1+\varepsilon_2'd\beta_2+\varepsilon_3'd\beta_3+\dots) \\ +a_3(\varepsilon_1''d\gamma_1+\varepsilon_2''d\gamma_2+\varepsilon_3''d\gamma_3+\dots)+a_4(\varepsilon_1'''d\delta_1+\varepsilon_2'''d\delta_2+\varepsilon_3'''d\delta_3+\dots)+\dots \\ +b_1(d\alpha_1+d\beta_1+d\gamma_1)+b_2(d\alpha_2+d\beta_2+d\delta_1)+b_3(d\alpha_3+d\gamma_2+d\delta_2)+\dots \\ +c\,(\mu_1\,d\alpha_1+\mu_2\,d\alpha_2+\mu_3\,d\alpha_3+\dots+\mu_1'd\beta_1+\mu_2'd\beta_2+\mu_3'd\beta_3+\dots \\ +\mu_1''d\gamma_1+\mu_2''d\gamma_2+\mu_3''d\gamma_3+\dots+\mu_1'''d\delta_1+\mu_2'''d\delta_2+\mu_3'''d\delta_3+\dots \end{cases}
$$

in welcher die a, b, c noch zu bestimmende Grössen sind.

Die letzte Gleichung giebt folgende Gleichungssysteme:

IV. $$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \varepsilon_1 a_1 + b_1 + \mu_1 c \\ \alpha_2 = \varepsilon_2 a_1 + b_2 + \mu_2 c \\ \alpha_3 = \varepsilon_3 a_1 + b_3 + \mu_3 c \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right.$$

V. $$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 = \varepsilon_1' a_2 + b_1 + \mu_1' c \\ \beta_2 = \varepsilon_2' a_2 + b_2 + \mu_2' c \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right.$$

VI. $$\left\{\begin{array}{l} \gamma_1 = \varepsilon_1'' a_3 + b_1 + \mu_1'' c \\ \gamma_2 = \varepsilon_2'' a_3 + b_3 + \mu_2'' c \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right.$$

VII. $$\left\{\begin{array}{l} \delta_1 = \varepsilon_1''' a_4 + b_2 + \mu_1''' c \\ \delta_2 = \varepsilon_2''' a_4 + b_3 + \mu_2''' c \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}\right.$$

. . . .

Diese Systeme in Verbindung mit I, II, III geben Alles, was nöthig ist zur Auflösung.

Nach Schleiermacher's Methode sind nun in die Gleichungen II die Gleichungen IV, V u. s. f. einzuführen und zufolge einer schon erwähnten Eigenthümlichkeit der Gleichungen II giebt nun jede derselben eine einfache Bestimmunggleichung für eines der b. Es werden diese durch die a, c u. s. f. ausgedrückt und es können daher die b sämmtlich aus den, durch Einsetzen der Werthe der α, β, ... aus IV, V, ... abgeänderten Gleichungen I und III entfernt werden. Diese Gleichungen enthalten dann nur noch die a und c und müssen wie gewöhnlich aufgelöst werden. Im obigen Beispiele gehen die Gleichungen II über in die Gleichungen

$$\begin{array}{l} 3b_1 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_1' a_2 + \varepsilon_1'' a_3 + c\,(\mu_1 + \mu_1' + \mu_1'') = 0 \\ 3b_2 + \varepsilon_2 a_1 + \varepsilon_2' a_2 + \varepsilon_1''' a_4 + c\,(\mu_2 + \mu_2' + \mu_1''') = 0 \\ 3b_3 + \varepsilon_3 a_1 + \varepsilon_2'' a_3 + \varepsilon_2''' a_4 + c\,(\mu_3 + \mu_2'' + \mu_2''') = 0. \end{array}$$

Werden die hieraus folgenden b-Werthe in die Gleichungen I und III eingesetzt, so hängt alsdann die endliche Auflösung von soviel Gleichungen ab, als in System I und III vorkommen. Die Methoden von Gauss, Bessel und Hansen erfordern aber die Auflösung eines Systemes Gleichungen, das an Anzahl denen der Systeme II und III gleichkommt (da sie die Ausgleichung der Stationen, entsprechend den Gleichungen I, im Voraus bewirken). Sobald also System II weniger Gleichungen enthält als System I, hat man nach Schleiermacher doch zuletzt mehr Gleichungen aufzulösen, als nach Gauss, Bessel oder Hansen. Erstere Methode kann also hinsichtlich der Anzahl aufzulösender Gleichungen im Vortheil nur dann sein, wenn erheblich mehr Winkelbedingungsgleichungen vorliegen, als Gleichungen zwischen den Winkeln je einer Station, und dies findet nur bei kleinen Landestriangulationen statt, wo mit dem Repetitionstheodolit

gearbeitet wird, überhaupt auf einer Station viele Einschnitte auf verschiedene Punkte, dagegen wenig auf denselben Punkt vorkommen. Für solche Fälle nur ist auch Schleiermacher's Methode entworfen.

Das Wesen derselben geht ganz verloren, wenn man sie auf Richtungsbeobachtungen anwenden will. Schon im einfachen Falle reiner Richtungsbeobachtungen (die immer alle Objecte in Gyris vereinigen) gelangt man zu unerquicklichen Formeln.

Bezeichnet man die Richtungen von A nach B, C u. s. f. mit $A_2\, A_3 \ldots$, von B nach A, C u. s. f. mit $B_1\, B_3$ u. s. f., so gehen die Gleichungen II über in die Gleichungen II* — die Gleichungen I fallen natürlich ganz aus —

$$\text{II*.}\quad \begin{cases} 0 = A_3 - A_2 + B_1 - B_3 + C_2 - C_1 \\ 0 = A_4 - A_2 + B_1 - B_4 + D_2 - D_1 \\ 0 = A_4 - A_3 + C_1 - C_4 + D_3 - D_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und weil jetzt in jeder solchen Gleichung auch Unbekannte sich finden, die schon in einer anderen desselben Systemes II* stehen, so geben diese Gleichungen auch keine einfachen Bestimmungen für die Hilfsgrössen b.

Die Systeme III, IV u. s. f. gehen über in

$$\text{III*.}\quad 0 = \mu_2 A_2 + \mu_3 A_3 + \ldots + \mu_1' B_1 + \mu_3' B_3 + \ldots + \mu_1'' C_1 + \mu_2'' C_2 + \ldots$$

$$\text{IV*.}\quad \begin{cases} A_2 = -b_1 - b_2 + \mu_2 c + \ldots \\ A_3 = b_1 - b_3 + \mu_3 c + \ldots \\ A_4 = b_2 + b_3 + \mu_4 c + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{V*.}\quad \begin{cases} B_1 = b_1 + b_2 + \mu_1' c + \ldots \\ B_3 = -b_1 + \mu_3' c + \ldots \\ B_4 = -b_2 + \mu_4' c + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{VI*.}\quad \begin{cases} C_1 = -b_1 + b_3 + \mu_1'' c + \ldots \\ C_2 = +b_1 + \mu_2'' c + \ldots \\ C_4 = -b_3 + \mu_4'' c + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$\text{VII*.}\quad \begin{cases} D_1 = -b_2 - b_3 + \mu_1''' c + \ldots \\ D_2 = +b_2 + \mu_2''' c + \ldots \\ D_3 = +b_3 + \mu_3''' c + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und damit System II* in folgendes über, worin die χ Aggregate der μ bezeichnen,

$$\begin{aligned} 0 &= 6b_1 + 2b_2 - 2b_3 + c\chi + \ldots \\ 0 &= 2b_1 + 6b_2 + 2b_3 + c\chi' + \ldots \\ 0 &= -2b_1 + 2b_2 + 6b_3 + c\chi'' + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche Gleichungen immer mehrere b enthalten, also nach diesen b so leicht nicht aufgelöst werden können, und gewiss um so mehr, wenn nicht reine Richtungsbeobachtungen vorliegen.

Hiernach erscheint doch wohl die Anwendung der Schleiermacher'schen Methode auf Richtungsbeobachtungen nicht räthlich.

Einige allgemeine Bemerkungen zu der Berechnung von Richtungsbeobachtungen.

Wird angenommen, dass immer ein Nullpunkt bei jedem Gyrus eingeschnitten wird, so lassen sich für einen Satz von je vier Einstellungen auf ein Object die Beobachtungsfehler der Einschnitte nach den Objecten O, A, B, C ... wie folgt darstellen:

für O $\delta_0 + v_0$
„ A $\delta_a + v_a$
„ B $\delta_b + v_b$
„ C $\delta_c + v_c$,

worin v die Beobachtungsfehler im engeren Sinne (strenger: die Mittel aus vier solchen), δ die periodischen und zufälligen Theilungsfehler bedeuten. Wiederholt man den Gyrus bei derselben Lage, so bleiben die δ dieselben, nur die v ändern sich; dreht man den Kreis nur ein paar Striche fort, so ändern sich in δ die zufälligen Glieder, die periodischen bleiben dieselben.

Der mittlere Werth von v (oder der doppelte Betrag des Beobachtungsfehlers im engeren Sinne) schwankt zwischen einer halben Secunde und zwei Secunden, ebenso δ zwischen ein paar Zehntelsecunden und mehreren Secunden, je nach der Güte des Instrumentes, und so viel scheint dem Verfasser erwiesen, dass in vielen Fällen bei besseren tragbaren Instrumenten δ zwar etwas kleiner als v, jedoch nicht beträchtlich kleiner sein wird. Doch hat sich jeder Beobachter hierüber näher zu unterrichten.

Ist v beträchtlich grösser als δ, so kann mit Vernachlässigung von δ die Ausgleichung der Beobachtungen wie üblich erfolgen.

Ist aber δ beträchtlich grösser als v, dann hat in einfachster Weise die Vereinigung der Messungen einer Station zu erfolgen, indem man, falls nur alle Sätze den Nullpunkt enthalten, zunächst alle Sätze derselben Kreislage zu einem Mittel vereinigt und diese Mittel mit gleichen Gewichten zu einem weiteren Mittel nach der üblichen Ausgleichungsmethode.

Sei beobachtet in						
1. Kreislage	O_1	A_1	B_1	C_1	D_1
1. „	O_1	A_1	B_1		
1. „	O_1		B_1	C_1	D_1
2. „	O_2	A_2	B_2	C_2	
2. „	O_2	A_2		C_2	D_2

und in 3. Kreislage O_3 A_3 D_3
3. „ O_3 A_3 B_3 C_3
3. „ O_3 B_3 C_3 D_3

und die Ablesung für O immer auf Null reducirt, so setze man — falls eine Näherungsrechnung genügt —

für die 1. Kreislage O_1 $\frac{1}{2}\Sigma A_1$ $\frac{1}{3}\Sigma B_1$ $\frac{1}{3}\Sigma C_1$ $\frac{1}{2}\Sigma D_1$
„ „ 2. „ O_2 $\frac{1}{2}\Sigma A_2$ B_2 $\frac{1}{2}\Sigma C_2$ D_2
„ „ 3. „ O_3 $\frac{1}{2}\Sigma A_3$ $\frac{1}{2}\Sigma B_3$ $\frac{1}{2}\Sigma C_3$ $\frac{1}{2}\Sigma D_3$

und die Werthe dieser drei Kreislagen und der sonst vorhandenen werden nun in üblicher Weise ausgeglichen, wobei die Richtungen alle mit gleichem Gewicht einzuführen sind.

Sollte einmal der Nullpunkt nicht eingeschnitten sein, z. B.
in der 4. Kreislage O_4 A_4 B_4
O_4 A_4 B_4 C_4
A_4 B_4 C_4,

so hat man jedenfalls das nunmehr zu erläuternde strengere Verfahren anzuwenden, welches richtiger auch schon bei den anderen Kreislagen anzuwenden ist.

Ist nämlich O_4 immer auf Null reducirt, so hat man die wahrscheinlichsten Ablesungen in der Form

$$\begin{array}{llll} O_4+o_4 & A_4+\delta_4'+a_4 & B_4+\delta_4''+b_4 & C_4+\delta_4'''+c_4 \\ O_4+o_4' & A_4+\delta_4'+a_4' & B_4+\delta_4''+b_4' & C_4+\delta_4'''+c_4' \\ O_4+o_4'' & A_4+\delta_4'+a_4'' & B_4+\delta_4''+b_4' & C_4+\delta_4'''+c_4''; \end{array}$$

die Ablesungen $C_4+\delta_4'''+c_4$ und O_4+o_4'' haben das Gewicht Null im vorliegenden Beispiele,

die o, a, b, c sind Beobachtungsfehler im engeren Sinne,

die δ sind die Theilungsfehler in Bezug auf den Theilstrich der Nullrichtung.

Welchen Betrag die δ auch haben, jedenfalls kann man für den Augenblick die δ zu den A, B, C resp. schlagen und setzen

$$A_4+\delta_4'=\mathfrak{A}_4 \quad B_4+\delta_4''=\mathfrak{B}_4 \quad C_4+\delta_4'''=\mathfrak{C}_4 \text{ u. s. f.}$$

und mithin hat man nun die Ablesungen in der Form

$$\begin{array}{llll} O_4+o_4 & \mathfrak{A}_4+a_4 & \mathfrak{B}_4+b_4 & (\mathfrak{C}_4+c_4) \\ O_4+o_4' & \mathfrak{A}_4+a_4' & \mathfrak{B}_4+b_4' & \mathfrak{C}_4+c_4' \\ (O_4+o_4'') & \mathfrak{A}_4+a_4'' & \mathfrak{B}_4+b_4'' & \mathfrak{C}_4+c_4'' \end{array}$$

J e t z t e r k e n n t m a n s o f o r t, d a s s d i e G y r i d e r s e l b e n K r e i s l a g e s o z u v e r e i n i g e n s i n d, w i e d i e s o g e n a n n t e S t a t i o n s a u s g l e i c h u n g n a c h **Bessel** u n d **Hansen** e r f o l g t. Hierbei kommt die relative Grösse der Theilungsfehler δ und Beobachtungsfehler v noch gar nicht in Frage.

Es mögen sich nun auf diese Art ergeben (unter Reduction der Ablesung für die Nullrichtung auf Null)

für die 1. Kreislage O_1 $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{B}_1$ $\mathfrak{C}_1$
2. „ O_2 $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{B}_2$ $\mathfrak{C}_2$
3. „ O_3 $\mathfrak{A}_3$ $\mathfrak{B}_3$ $\mathfrak{C}_3$
4. „ O_4 $\mathfrak{A}_4$ $\mathfrak{B}_4$ $\mathfrak{C}_4$.

Da die Theilungsfehler als vorwiegend angesehen werden, so unterscheiden sich diese Werthe nur wesentlich durch die Theilungsfehler und man hat daher auch jedem dieser Werthe das Gewicht 1 beizulegen, oder Null, falls die betreffende Richtung in allen Gyris der Kreislage nicht vorkam. Die Ausgleichung dieser Werthe erfolgt also wieder nach Bessel's und Hansen's Formeln.

Bei Anwendung der directen (Coordinaten-) Ausgleichung würde man diese Werthe O, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ als Beobachtungswerthe zur Aufstellung der Fehlergleichungen verwenden.

Sind die Theilungsfehler δ und die v nahezu gleich gross im Mittel, so würde eine strenge Ausgleichung erheblich schwierig sein (doch ausführbar, sobald die relative mittlere Grösse von δ und v bekannt wäre). Die einzige Aushilfe bietet die Beobachtungsmethode: möglichst wenig Gyri bei derselben Kreislage zu nehmen; also wo möglich nach jedem Gyrus den Kreis wenigstens ein paar Theilstriche zu drehen. Dann is est ziemlich gleichgiltig, wie man ausgleicht — man kann mit demselben Rechte die Theilungsfehler ganz vernachlässigen und wie üblich ausgleichen; oder aber erst für jede Kreislage ausgleichen und die Resultate als einfache Gyri betrachten und ausgleichen.

Auf einen Punkt möchte noch hingewiesen werden: Die Ausgleichung wird um so einfacher, je weniger verschiedenartig die Gruppirung der Punkte zu Gyris ist; jedoch alle Punkte immer in einen Gyrus zu vereinigen ist nicht räthlich und wird auch an Einstellungsarbeit nichts gespart, sobald ihre Anzahl grösser als 4 bis 5 ist. Hat man sich nun aus sämmtlichen Objecten eine Anzahl Gruppen zu je 3 bis 5 gebildet, die man in verschiedenen Kreislagen beobachtet, so ist es wünschenswerth, von diesen Gruppen auch nur vollzählige Gyri zu erhalten, die man alsdann für jede Gruppe zu einem Mittel zusammenzieht. Doch ereignet es sich wohl, dass ein Punkt in einem Gyrus einmal verloren geht. Sobald nun δ nahezu gleich v ist, kann man recht wohl diesen Gyrus ergänzen, indem man zwei der Objecte des Gyrus nachträglich mit dem fehlenden verbindet. Man habe z. B. erhalten

in der 2. Kreislage O_2 A_2 B_2 C_2 fehlt D_2,

so beobachte man etwa noch

in derselben Lage O_2' C_2' D_2'

und verschmelze beide Gyri zu einem vollen Gyrus

$$O_2'' \quad A_2'' \quad B_2'' \quad C_2'' \quad D_2''$$

wie folgt:

Sei die Ablesung für die Nullrichtung auf Null reducirt, so dass auch O_2'' Null ist, so wird streng ausgeglichen für

$$\begin{array}{ll} O_2'' = \text{Null} & A_2'' = A_2 + \varDelta \\ \text{und} & B_2'' = B_2 + \varDelta \\ \varDelta = \dfrac{C_2' - C_2}{4} & C_2'' = C_2 + 2\varDelta \\ & D_2'' = D_2' - \varDelta. \end{array}$$

Man hat nämlich die Fehlergleichungen

$$\begin{array}{ll} v_o = u & v_o' = u' \\ v_a = u - A_2' + A_2'' & \\ v_b = u - B_2 + B_2'' & \\ v_c = u - C_2 + C_2'' & v_c' = u' - C_2' + C_2'' \\ & v_d' = u' - D_2' + D_2'', \end{array}$$

worin u und u' die bekannten Hilfsgrössen sind.

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A_2'' &= A_2 - u \\ B_2'' &= B_2 - u \\ C_2'' &= \tfrac{1}{2}(C_2 + C_2') - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{2}u' \\ D_2'' &= D_2' - u' \end{aligned}$$

$$0 = 4u + A_2'' + B_2'' + C_2'' - A_2 - B_2 - C_2$$
$$0 = 3u' + C_2'' + D_2'' - C_2' - D_2'$$

und mithin wird

$$u' = -u = \varDelta$$

u. s. f.

Auf ähnliche Weise kann man mit Leichtigkeit ohne sonderlichen Fehler sehr oft Gyri ergänzen oder zusammenziehen und dadurch den vorliegenden Beobachtungen mehr Symmetrie geben. Sind überhaupt wenig Objecte zu nehmen, so wird nicht selten auf diese Weise alles Beobachtungsmaterial in vollzählige Reihen verschmolzen werden können.

Selbstverständlich darf man nur mit Vorsicht solche angedeutete Verschmelzungen vornehmen.

IX.

Ueber die Erzeugung solcher geometrischer Curven, welche durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt sind.

Von

Dr. A. Olivier,

Prof. der Mathematik am Gymnasium zu Schaffhausen.

Diese Abhandlung hat die Erzeugung solcher geometrischer Curven zum Gegenstande, welche nicht direct durch Punkte in der Ebene, sondern durch unbekannte Schnittpunkte gegebener Curven bestimmt sind. Die nächste Veranlassung zur Abfassung dieser Schrift wurde durch die von der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin ausgeschriebene mathematische Preisfrage gegeben, in welcher neben der Forderung — die nothwendigen und ausreichenden fundamentalen Hilfsmittel für die Lösung der Aufgaben des dritten Grades anzugeben — auch folgendes Problem zur Construction vorgelegt wurde:

> Wenn dreizehn Punkte in der Ebene gegeben sind, so sollen durch geometrische Construction diejenigen drei Punkte bestimmt werden, welche mit den gegebenen zusammen ein System von sechszehn Durchschnittspunkten zweier Curven der vierten Ordnung bilden.

Dieses ist aber nur ein specielles Beispiel von solchen geometrischen Problemen, in denen es sich um die Construction unbekannter Durchschnittspunkte gegebener Curven handelt. Wie man weiss, sind derartige Probleme dadurch zu lösen, dass man Curven von möglichst niederer Ordnung construirt, die sich in den unbekannten Schnittpunkten der gegebenen Curven treffen. Die zu lösende Hilfsaufgabe reducirt sich also darauf: Eine Curve zu erzeugen, die nicht direct durch Punkte in der Ebene, sondern ganz oder theilweise durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt ist. Daraus

ist der Zusammenhang obiger Preisfrage mit dem Thema unserer Abhandlung ersichtlich.

Aber auch abgesehen von der ausgedehnten Anwendung bei der Construction unbekannter Durchschnittspunkte geometrischer Curven, besitzt der Gegenstand dieser Abhandlung an sich eine Bedeutung für die Geometrie. Sind nämlich in einer Ebene eine genügende Zahl von reellen Punkten gegeben, wodurch eine gewisse Curve K der n^{ten} Ordnung bestimmt wird, so ist es nach bekannten Principien immer möglich, zwei projectivische Gebilde (Curvenbüschel) festzustellen, welche durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die Curve K erzeugen. Anders verhält sich aber die Sache, wenn unter den gegebenen, die Curve K bestimmenden Punkten auch imaginäre Punkte enthalten sein sollten, welche, wie man weiss, nur als Durchschnittspunkte gegebener Curven darstellbar sind. Alsdann versagen die bekannten Principien über Curvenerzeugung ihren Dienst. In dieser Abhandlung ist nun der Versuch gemacht, diese Lücke in der Geometrie theilweise auszufüllen, und zwar dadurch, dass gezeigt werden soll, wie Curven durch projectivische Gebilde auch dann erzeugt werden können, wenn sie nicht direct durch Punkte in der Ebene, sondern durch unbekannte Durchschnittspunkte gegebener Curven bestimmt sind; wobei es also gleichgiltig bleibt, ob diese Schnittpunkte reell oder imaginär sind.

§ 1.
Ueber Curvenerzeugung im Allgemeinen.

Ist K eine Curve der n^{ten} Ordnung, gegeben durch die $\frac{1}{2}n(n+3)$ reellen Punkte

$$a_1\ a_2 \ldots a_{\frac{1}{2}n(n+3)},$$

so können immer zwei projectivische Curvenbüschel der n'^{ten} und n''^{ten} $(n'+n''=n)$ Ordnung festgestellt werden, welche durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die Curve K erzeugen. Das hierher gehörige Theorem ist von den berühmten Mathematikern Chasles und Jonquières aufgestellt und von denselben wie folgt ausgesprochen worden:

Soll eine durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte gegebene Curve K der n^{ten} Ordnung durch zwei projectivische Curvenbüschel der n'^{ten} und n''^{ten} Ordnung $(n'+n''=n)$ erzeugt werden, so dürfen von den

$$\tfrac{1}{2}\{n'(n'+3)+n''(n''+3)\}-2$$

Punkten, welche die Basen der beiden Büschel völlig bestimmen, nur $n'n''-1$ nicht beliebig genommen werden. Von den $\frac{1}{2}n(n+3)$ gegebenen Punkten der Curve K können also

$$\tfrac{1}{2}\{n'(n'+3)+n''(n''+3)\}-2-(n'n''-1)$$

Punkte willkürlich zu Basispunkten ausgewählt werden, während alsdann $2n'n''+1$ Curvenpunkte übrig bleiben, die

nicht mit den Basispunkten der Curvenbüschel zusammenfallen. Um nun die noch übrigen $n'n''-1$ unbekannten Basispunkte der beiden Büschel zu bestimmen, müssen die Curven des ersten Büschels, welche durch die $2n'n''+1$ weiteren Curvenpunkte von K gelegt werden können, den Curven des zweiten Büschels, welche durch dieselben Punkte gelegt werden können, projectivisch entsprechen. Zu diesem Zweck dürfen je drei Curven aus den beiden Büscheln als entsprechende Elemente angenommen werden, während zu jedem vierten Elemente des einen das entsprechende vierte Element des anderen durch die Gleichheit der Doppelverhältnisse zu ermitteln ist. Dies giebt aber $2(n'n''-1)$ Bedingungen, welche hinreichen, um die $(n'n''-1)$ unbekannten Basispunkte zu bestimmen.

Besonderer Fall.

In der Folge wird für uns ein specieller Fall der Curvenerzeugung von ganz besonderer Wichtigkeit sein: wenn nämlich $n'=1$ und $n''=n-1$, also das eine Curvenbüschel von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und das andere ein Strahlenbüschel ist. Hierbei sind aber wieder zwei wesentlich verschiedene Unterfälle von einander zu unterscheiden: ob nämlich der Mittelpunkt des Strahlenbüschels als ein bekannter oder als ein unbekannter Basispunkt aufgefasst wird.

1. Wird der Mittelpunkt des Strahlenbüschels als ein bekannter Punkt der Curve angenommen, gehören also alle unbekannten Basispunkte dem Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung allein an, so besitzt das Problem nur eine einzige Auflösung, welche von Härtenberger in der folgenden Abhandlung: „Ueber die Erzeugung geometrischer Curven" (Crelle-Borchardt's Journal, Band 58, Seite 54) gegeben worden ist.

2. Wird der Mittelpunkt des Strahlenbüschels aber als ein unbekannter Basispunkt angesehen, so besitzt das Problem der Curvenerzeugung mehrere Auflösungen und kann wie folgt genauer festgestellt werden:

Es sei K eine Curve der n^{ten} Ordnung, gegeben durch die $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte

$$b_1 b_2 \dots b_p a_1 a_2 \dots a_{2n-1};$$

wobei p den Werth

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)+1$$

besitzt. Nach dem obigen Theorem von Chasles dürfen von den gegebenen Punkten der Curve K $p=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ willkürlich zu Basispunkten

---

*) *Chasles, Determination du nombre de points, qu'on peut prendre etc. (Comptes rendus, 21 Septembre 1857). Jonquières, Essai sur la génération des courbes etc. p.* 13—14.

des Curvenbüschels der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gewählt werden; wir nehmen die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

und wollen dieselben in der Zukunft: die **Grundpunkte des Curvenbüschels** nennen. Die übrigen unbekannten Basispunkte des Curvenbüschels dagegen sollen zusammengefasst den Namen **Basisrest** erhalten; es sind dies die Punkte

$$y_1 y_2 \ldots y_{n-3} \,\|\, y_{n-2} \ldots y_{s-1};$$

wobei die Zahl s den Werth

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

bezeichnet. Der Doppelstrich soll hierbei diejenigen Basispunkte, welche als eigentlich unbekannt anzusehen sind, von denen trennen, die mit jenen — nach einer bekannten Eigenschaft des Curvenbüschels — von selbst bestimmt sind.

Bezeichnen wir jetzt noch den unbekannten Mittelpunkt des Strahlenbüschels mit x, so können alle die unbekannten Basispunkte

$$x, \; y_1 y_2 \ldots y_{n-3} \,\|\, y_{n-2} \ldots y_{s-1}$$

durch die Bedingung gefunden werden, dass das anharmonische Verhält niss des Strahlenbüschels

$$x\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$

gleich zu machen ist dem anharmonischen Verhältnisse des Curvenbüschels

$$(b_1 b_2 \ldots b_p y_1 y_2 \ldots y_{n-3} \,\|\, y_{n-2} \ldots y_{s-1})\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}].$$

Angenommen, diese Aufgabe wäre gelöst, so werden Strahlenbüschel und Curvenbüschel zwei projectivische Gebilde, welche Eigenschaft in Zukunft mit dem bekannten Zeichen $\overline{\wedge}$ angedeutet werden soll, also:

$$x\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}] \,\overline{\wedge}\, (b_1 b_2 \ldots b_p y_1 y_2 \ldots y_{n-3} \,\|\, y_{n-2} \ldots y_{s-1})\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}];$$

alsdann erzeugen beide Gebilde durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die gegebene Curve K.

Für die folgenden Untersuchungen ist nun die Beantwortung der nachstehenden Frage von grosser Bedeutung:

> Wie viele Auflösungen besitzt im Allgemeinen die Aufgabe: Das anharmonische Verhältniss des Strahlenbüschels
>
> $$x\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$
>
> gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Curvenbüschels
>
> $$(b_1 b_2 \ldots b_p y_1 y_2 \ldots y_{n-3} \,\|\, y_{n-2} \ldots y_{s-1})\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]?$$

Ohne uns vorläufig auf einen Beweis einzulassen, geben wir auf diese Frage folgende Antwort:

> Die Aufgabe, das anharmonische Verhältniss des Strahlenbüschels
>
> $$x\,[a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$

gleich zu machen dem anharmonischen Verhältnisse des Curvenbüschels

$$(b_1 b_2 \dots b_p y_1 y_2 y_{n-3} \,||\, y_{n-2} \dots y_{s-1}) \, [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

besitzt im Allgemeinen

$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

verschiedene Lösungen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung wird sich im Laufe der weiteren Untersuchung von selbst ergeben.

Folgerungen.

I. Indem wir die soeben ausgesprochene Behauptung als richtig voraussetzen, giebt es auf der Curve K, welche durch die $\frac{1}{2}n\,(n+3)$ Punkte

$$b_1 b_2 \dots b_p \; a_1 a_2 \dots a_{2n-1}$$

bestimmt ist, zu den Grundpunkten

$$b_1 b_2 \dots b_p$$

ein System von $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkten

$$P^1 P^2 \dots P^s;$$

sie sind die Mittelpunkte von eben so vielen Strahlenbüscheln. Diese Punkte sollen in der Zukunft den Namen Projectionspunkte der Curve K erhalten. Zu jedem solchen Projectionspunkte von K gehört ein gewisser auf diese Curve fallender Basisrest

$$Q_1^1 Q_2^1 \dots Q^1_{n-3} \,||\, Q^1_{n-2} \dots Q^1_{s-1}$$
$$Q_1^2 Q_2^2 \dots Q^2_{n-3} \,||\, Q^2_{n-2} \dots Q^2_{s-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_1^s Q_2^s \dots Q^s_{n-3} \,||\, Q^s_{n-2} \dots Q^s_{s-1},$$

wobei die gleichen Stellenzeiger im Exponenten die Zusammengehörigkeit des jedesmaligen Projectionspunktes und Basisrestes ausdrücken. — Dem entsprechend kann die Curve K für die angenommenen Grundpunkte

$$b_1 b_2 \dots b_p$$

auf die $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Arten

$$P^1 [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \;\overline{\wedge}\; (b_1 b_2 \dots b_p Q_1^1 Q_2^1 \dots Q^1_{n-3} \,||\, Q^1_{n-2} \dots Q^1_{s-1}) \; [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

$$P^2 [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \;\overline{\wedge}\; (b_1 b_2 \dots b_p Q_1^2 Q_2^2 \dots Q^2_{n-3} \,||\, Q^2_{n-2} \dots Q^2_{s-1}) \; [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$P^s [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \;\overline{\wedge}\; (b_1 b_2 \dots b_p Q_1^s Q_2^s \dots Q^s_{n-3} \,||\, Q^s_{n-2} \dots Q^s_{s-1}) \; [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugt werden.

II. Aus der Eigenschaft, dass

$$s - 1 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1 = \tfrac{1}{2}(\overline{n-3})(\overline{n-3}+3)$$

Punkte in der Ebene zur Bestimmung einer Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung gerade hinreichen, ergeben sich folgende Sätze, von denen in der Zukunft noch häufig Gebrauch gemacht werden wird:

α) Jeder Basisrest eines Curvenbüschels der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt eine gewisse Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung.

β) Von den s Projectionspunkten einer Curve K der n^{ten} Ordnung liegen immer $(s-1)$ auf einer bestimmten Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung.

§ 2.

Projectionspunkte und zugehörige Basisreste auf Curven der dritten und vierten Ordnung.

Bevor wir in der allgemeinen Untersuchung weiter fortschreiten, wird es am Platze sein, der Projectionspunkte und Basisreste auf Curven der dritten und vierten Ordnung noch speciell zu gedenken und diejenigen wesentlichen Eigenschaften hervorzuheben, welche sich später für Curven jeder beliebigen Ordnung als giltig erweisen werden.

I. Es sei K eine Curve der dritten Ordnung, gegeben durch die neun Punkte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5;$$

dann folgt für $n=3$

$$p = \tfrac{1}{2} n(n-1) + 1 = 4$$
$$s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) = 1.$$

Also giebt es vier Grundpunkte; es seien dies die Punkte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4,$$

und einen Projectionspunkt P^1, dessen zugehöriger Basisrest $(s-1)$, d. h. null Punkte besitzt.

Der Projectionspunkt P^1 kann durch die Bedingung ermittelt werden, dass das anharmonische Verhältniss der fünf Strahlen

$$x\,[a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5]$$

gleich gemacht werden muss dem anharmonischen Verhältnisse der fünf gegebenen Kegelschnitte

$$(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)\,[a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5].$$

Man lege daher die vier Punkte

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$

einen Kegelschnitt, der durch das Doppelverhältniss

$$(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)\,[a_1\, a_2\, a_3\, a_4]$$

und durch die vier Punkte

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_5$$

einen zweiten Kegelschnitt, der das Doppelverhältniss

$$(b_1\, b_2\, b_3\, b_4)\,[a_1\, a_2\, a_3\, a_5]$$

fasst. Der vierte Schnittpunkt dieser beiden Kegelschnitte, welcher mittelst des Lineals allein construirt werden kann, ist der gesuchte Projectionspunkt P^1; alsdann ist

$$P^1\,[a_1 a_2 a_3 a_4 a_5] \;\overline{\wedge}\; (b_1 b_2 b_3 b_4)\,[a_1 a_2 a_3 a_4 a_5]$$

und die beiden projectivischen Gebilde: Kegelschnittbüschel und Strahlenbüschel erzeugen die Curve K.

Einige bekannte Eigenschaften des Projectionspunktes einer Curve der dritten Ordnung sind folgende:

Denkt man sich durch die Grundpunkte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4$$

eine zweite Curve $\mathfrak{K}$ der dritten Ordnung gelegt und bezeichnet den Projectionspunkt dieser Curve in Bezug auf dieselben Grundpunkte mit $\mathfrak{P}'$, so sind P' und $\mathfrak{P}'$ die Mittelpunkte zweier projectivischer Strahlenbüschel, welche denjenigen Kegelschnitt erzeugen, der durch die übrigen fünf Schnittpunkte von K und $\mathfrak{K}$ bestimmt wird. Daher gilt folgender Satz:

> Von neun gemeinschaftlichen Punkten zweier Curven der dritten Ordnung bestimmen irgend fünf einen Kegelschnitt, der durch die Projectionspunkte dieser Curve in Bezug auf die übrigen vier Schnittpunkte als Grundpunkte geht*).

Oder auch:

> Die Projectionspunkte sämmtlicher Curven eines Curvenbüschels der dritten Ordnung in Bezug auf irgend vier Punkte der Basis als Grundpunkte liegen auf demjenigen Kegelschnitt, der durch die fünf übrigen Punkte der Basis des Büschels bestimmt wird.

Sind ferner

$$b_1 b_2 b_3 b_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 k_1$$

die neun Durchschnittspunkte zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der dritten Ordnung und P' der Projectionspunkt von K in Bezug auf die Punkte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4,$$

sowie p' der Projectionspunkt derselben Curve in Bezug auf die Punkte

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4,$$

so geht nicht nur die Gerade $P'p'$, sondern auch die durch die fünf Punkte

$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, P'\, p$$

und

$$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, P'$$

*) Plücker, Theorie der algebraischen Curven, Seite 56.

bestimmten zwei Kegelschnitte durch den neunten Schnittpunkt $\mathfrak{r}_1$ der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ *).

II. Seien ebenso

$$b_1 b_2 \ldots b_7 a_1 a_2 \ldots a_7$$

vierzehn Punkte einer Curve K der vierten Ordnung, so ist für $n = 4$

$$p = \tfrac{1}{2} n (n-1) + 1 = 7$$
$$s = \tfrac{1}{2} (n-1)(n-2) = 3;$$

also besitzt die Curve K sieben Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7;$$

drei Projectionspunkte

$$P^1, P^2, P^3$$

und zugehörige Basisreste

$$Q_1^1 \parallel Q_2^1, \quad Q_1^2 \parallel Q_2^2, \quad Q_1^3 \parallel Q_2^3.$$

Die Curve K kann demnach für die angenommenen Grundpunkte auf die drei verschiedenen Arten erzeugt werden

$$P^1 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^1 \parallel Q_2^1) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^2 \parallel Q_2^2) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^3 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^3 \parallel Q_2^3) [a_1 a_2 \ldots a_7].$$

In Bezug auf die Construction der Projectionspunkte und Basisreste einer Curve der vierten Ordnung, welche durch die Bedingung gefunden werden können, dass das anharmonische Verhältniss der sieben Strahlen

$$x [a_1 a_2 \ldots a_7]$$

gleich gemacht werden muss dem anharmonischen Verhältnisse der sieben Curven

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 y_1 \parallel y_2) [a_1 a_2 \ldots a_7],$$

verweisen wir auf die folgende Abhandlung:

„*Jonquières, Essai sur la génération des courbes géometriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre.*

In dieser Abhandlung ist die vollständige Lösung der Aufgabe enthalten, weshalb es überflüssig wäre, dieselbe hier noch einmal zu wiederholen. Dagegen wollen wir noch eine merkwürdige Eigenschaft der drei Projectionspunkte

$$P^1 \; P^2 \; P^3$$

und zugehörigen Basisreste

$$Q_1^1 \parallel Q_2^1, \quad Q_1^2 \parallel Q_2^2, \quad Q_1^3 \parallel Q_2^3$$

erweisen.

Wir betrachten das Curvenbüschel

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^1 \parallel Q_2^1);$$

*) *Hart, Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree. (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 6, Cambridge* 1851, *p.* 181.)

in demselben giebt es eine gewisse Curve, die durch den Punkt Q_1^2 und dann von selbst auch durch den Punkt Q_2^2 gehen wird; diese Curve lässt sich bezeichnen durch

$$(b_1 b_2 \ldots b_p Q_1^1 \parallel Q_2^1)[Q_1^2 \parallel Q_2^2].$$

Der zu dieser Curve gehörige Projectionsstrahl des projectivischen Strahlenbüschels P^1 ist also die Gerade $Q_1^2 \parallel Q_2^2$; deshalb geht die Gerade, welche durch den Basisrest $Q_1^2 \parallel Q_2^2$ bestimmt wird, durch den Projectionspunkt P^1. Auf die gleiche Weise lässt sich aber auch beweisen, dass diese durch $Q_1^2 \parallel Q_2^2$ bestimmte Gerade durch den Projectionspunkt P^3 gehen muss; also wird überhaupt eine Gerade, die durch irgend einen von den drei Basisresten

$$Q_1^1 \parallel Q_2^1, \quad Q_1^2 \parallel Q_2^2, \quad Q_1^3 \parallel Q_2^3$$

bestimmt wird, durch die beiden nicht zu ihm gehörigen Projectionspunkte gehen; oder es gilt folgender Satz:

> Irgend zwei Projectionspunkte einer Curve der vierten Ordnung liegen mit demjenigen Basisrest, der zum dritten Projectionspunkt gehört, auf derselben Geraden.

Nach diesem Satze geht die Gerade $\overline{P^1 P^2}$ durch $Q_1^3 \parallel Q_2^3$; die Gerade $\overline{P^1 P^3}$ durch $Q_1^2 \parallel Q_2^2$ und die Gerade $\overline{P^2 P^3}$ durch $Q_1^1 \parallel Q_2^1$.

§ 3.

Eine Curve der n^{ten} und ein Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in derselben Ebene.

Wir kehren jetzt zu unseren früheren allgemeinen Betrachtungen zurück und nehmen in einer Ebene eine Curve K der n^{ten} Ordnung an, welche durch die $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p' a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}$$

gegeben sein soll. In Bezug auf die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

als Grundpunkte seien

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

deren Projectionspunkte und

$$\begin{array}{c} Q_1^1 Q_2^1 \ldots Q^1_{n-3} \parallel Q^1_{n-2} \ldots Q^1_{s-1} \\ Q_1^2 Q_2^2 \ldots Q^2_{n-3} \parallel Q^2_{n-2} \ldots Q^2_{s-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_1^s Q_2^s \ldots Q^s_{n-3} \parallel Q^s_{n-2} \ldots Q^s_{s-1} \end{array}$$

die zugehörigen Basisreste

In der Ebene der Curve K sei ferner ein Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gegeben, dessen einzelne Elemente mit

$$T_1 T_2 T_3 \ldots$$

und das Curvenbüschel selbst mit $(T_1 T_2)$ bezeichnet werden soll. Die $(n-1)^2$ Basispunkte dieses Curvenbüschels seien

$$b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1};$$

so dass, wie man sieht, die Grundpunkte des Büschels auf die Curve K zu liegen kommen, während die übrigen Basispunkte, welche zusammen den Basisrest des Büschels bilden, im Allgemeinen beliebig in der Ebene vertheilt liegen können.

α) Der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ bestimmt eine gewisse Curve S der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung (§ 1, Seite 174 flgg.), welche mit der Curve K zusammen einen zusammengesetzten Ort $(K+S)$ der $(2n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellt. Da nun die Basispunkte

$$b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ auf diesem zusammengesetzten Ort $(K+S)$ vertheilt liegen, so muss es nach einem bekannten von Chasles gegebenen Theoreme*) ein zu $(T_1 T_2)$ projectivisches Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung geben, dessen Basispunkte ebenfalls auf dem Ort $(K+S)$ vertheilt liegen, und welches mit jenem durch den Durchschnitt entsprechender Elemente

$$T_1 \text{ und } V_1; \quad T_2 \text{ und } V_2; \text{ etc.}$$

den zusammengesetzten Ort $(K+S)$ erzeugt.

β) Wie vertheilen sich nun die Basispunkte des zu $(T_1 T_2)$ projectivischen Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ auf die einzelnen Curven K und S? — Diese Frage lässt sich folgendermassen beantworten.

Die Curve T_1 schneidet K ausser in den Punkten

$$b_1 b_2 \dots b_p$$

in noch weiteren

$$n(n-1) - \{\tfrac{1}{2}n(n-1)+1\} = \tfrac{1}{2}n(n-1) - 1$$

Punkten und die Curve S ausser in den Punkten

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

in noch weiteren

$$(n-1)(n-3) - \{\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1\} = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkten. Alle diese Schnittpunkte von T_1 mit K und T_1 mit S gehören auch der Curve V_1 an; daher schneidet diese Curve V_1 die Curve K nur noch in

*) Dieses Theorem lautet wie folgt: „Fallen von einem Curvenbüschel der n^{ten} Ordnung die n^2 Basispunkte auf eine Curve $C_{n+n'}$ der $(n+n')^{\text{ten}}$ Ordnung, so giebt es immer ein zu diesem Curvenbüschel projectivisches Curvenbüschel der n'^{ten} Ordnung, dessen nn' Basispunkte ebenfalls auf die Curve $C_{n+n'}$ fallen, und welches mit jenem durch den Durchschnitt entsprechender Elemente die Curve $C_{n+n'}$ erzeugt.“ (*Chasles, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres.* (*Comptes rendus*, 28 *décembre* 1857.)

$$n(n-2)-\{\tfrac{1}{2}n(n-1)-1\}=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)=s$$

Punkten, und dies sind die Basispunkte des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$, welche auf die Curve K fallen.

Andererseits schneidet V_1 die Curve S nur noch in

$$(n-2)(n-3)-\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)=\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)=s_1$$

Punkten, und dies sind die Basispunkte des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$, welche auf S fallen.

Wir bezeichnen zukünftig die Basispunkte des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$, welche auf K fallen, mit

$$g_1 g_2 \ldots g_s$$

und diejenigen, welche auf S fallen, mit

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1};$$

so dass also die Basis des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die $(n-2)^2$ Punkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

gegeben ist.

γ) Bis jetzt ist die Annahme gemacht worden, der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

liege beliebig in der Ebene; untersuchen wir nun aber auch die besonderen Umstände, die eintreten, wenn dieser Basisrest auch noch auf die Curve K fällt. Es ist wohl einzusehen, dass dieser specielle Fall von ganz besonderer Wichtigkeit sein wird, weil wir dadurch von allgemeineren Betrachtungen wieder auf die Curvenerzeugung durch ein Strahlenbüschel und Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zurückkommen müssen.

Nach den schon früher erworbenen Kenntnissen kann es nun aber nur

$$s=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

mal eintreten, dass der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ auf die Curve K zu liegen kommt; er müsste nämlich mit einem der 3 Basisreste

$$\begin{array}{c} Q_1^1 Q_2^1 \ldots Q^1_{n-3} \,\|\, Q^1_{n-2} \ldots Q^1_{s-1} \\ Q_1^2 Q_2^2 \ldots Q^2_{n-3} \,\|\, Q^2_{n-2} \ldots Q^2_{s-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ Q_1^s Q_2^s \ldots Q^s_{n-3} \,\|\, Q^s_{n-2} \ldots Q^s_{s-1} \end{array}$$

zusammenfallen. Alsdann wird aber das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sich in ein Strahlenbüschel und eine feste Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung auflösen. Das Strahlenbüschel erzeugt für sich mit dem Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ die Curve K, wobei irgend einer der Punkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s$$

der Mittelpunkt des Strahlenbüschels, also ein Projectionspunkt von K sein muss. Die Punkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s$$

sind also zu Projectionspunkten

$$p^1\, p^2 \dots p^s$$

der Curve K geworden. Der Rest des Curvenbüschels $(V_1\, V_2)$ kann aber nur eine einzige feste Curve sein; denn wenn z. B. g_1 der Mittelpunkt des Strahlenbüschels ist, so bestimmen die übrigen Punkte

$$g_2\, g_3 \dots g_s$$

in der That nur eine einzige Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, und weil diese die durch den Basisrest

$$Q_1^1\, Q_2^1 \dots Q^1_{n-3} \,\|\, Q^1_{n-2} \dots Q^1_{s-1}$$

bestimmte Curve S erzeugen soll, so muss sie mit S zusammenfallen. Irgend $(s-1)$ Projectionspunkte einer Curve K der n^{ten} Ordnung bestimmen also eine Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, die auch durch denjenigen Basisrest auf der Curve gehen wird, der zum s^{ten} Projectionspunkt gehört. Daher gelten zusammengefasst folgende Sätze:

1. Hat man in einer Ebene eine Curve K der n^{ten} Ordnung und ein Curvenbüschel $(T_1\, T_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, dessen Grundpunkte auf die Curve K fallen, so bestimmt der Basisrest

$$\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

eine Curve S der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, und zu dem Curvenbüschel $(T_1\, T_2)$ giebt es alsdann ein projectivisches Curvenbüschel $(V_1\, V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches mit jenem den zusammengesetzten Ort $(K+S)$ erzeugt. Von den $(n-2)^2$ Basispunkten des Curvenbüschels $(V_1\, V_2)$ fallen die Punkte

$$g_1\, g_2 \dots g_s$$

auf K und die Punkte

$$h_1\, h_2 \dots h_s$$

auf S.

2. Fällt der Basisrest

$$\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1\, T_2)$ aber auch noch auf die Curve K, so löst sich das Curvenbüschel $(V_1\, V_2)$ in ein Strahlenbüschel und eine feste Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung auf. Jeder der Punkte

$$g_1\, g_2 \dots g_s$$

kann Mittelpunkt eines solchen Strahlenbüschels werden; also sind diese Punkte die Projectionspunkte

$$p^1\, p^2 \dots p^s$$

von K, während der Basisrest

$$\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

jedesmal mit einem der Basisreste

$$\begin{array}{l} Q_1^1 Q_2^1 \ldots Q^1_{n-3} \| Q^1_{n-2} \ldots Q^1_{s-1}, \\ Q_1^2 Q_2^2 \ldots Q^2_{n-3} \| Q^2_{n-2} \ldots Q^2_{s-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_1^s Q_2^s \ldots Q^s_{n-3} \| Q^s_{n-2} \ldots Q^s_{s-1} \end{array}$$

auf K zusammenfällt.

3. Von den s Projectionspunkten einer Curve K der n^{ten} Ordnung bestimmen irgend $(s-1)$ eine gewisse Curve der $(n-3)^{ten}$ Ordnung, welche auch durch denjenigen Basisrest geht, der zum s^{ten} Projectionspunkt gehört.

Der in § 2 S. 217 bewiesene Satz für Curven vierter Ordnung ist, wie man sieht, ein specieller Fall des letzteren Satzes in Nr. 3; für $n=4$ lautet derselbe nämlich:

Zwei Projectionspunkte einer Curve vierter Ordnung liegen mit dem Basisrest, der zum dritten Projectionspunkt gehört, auf derselben Geraden.

§ 4.

Zwei Curven der n^{ten} Ordnung und ein Curvenbüschel der $(n-1)^{ten}$ Ordnung in einer Ebene.

α) Es sei K eine Curve der n^{ten} Ordnung, gegeben durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}.$$

In Bezug auf die Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

seien

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

deren Projectionspunkte und

$$\begin{array}{l} Q_1^1 Q_2^1 \ldots Q^1_{n-3} \| Q^1_{n-2} \ldots Q^1_{s-1}, \\ Q_1^2 Q_2^2 \ldots Q^2_{n-3} \| Q^2_{n-2} \ldots Q^2_{s-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_1^s Q_2^s \ldots Q^s_{n-3} \| Q^s_{n-2} \ldots Q^s_{s-1} \end{array}$$

die zugehörigen Basisreste. Dadurch ist die Erzeugung der Curve K durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{ten}$ Ordnung festgestellt.

Jeder der Basisreste auf K bestimmt eine gewisse Curve der $(n-3)^{ten}$ Ordnung; wir bezeichnen dieselben bezüglich mit

$$S^1, S^2, S^3 \ldots S^s$$

und wissen nach dem Satz Nr. 3 des vorigen Paragraphen: dass jede dieser Curven auch durch die sämmtlichen Projectionspunkte von K gehen muss, nur nicht durch den einzigen, der zum jedesmaligen Basisrest gehört.

β) In der Ebene der Curve K sei $\mathfrak{K}$ eine zweite Curve der n^{ten} Ordnung, welche mit jener die Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

gemeinschaftlich besitzt und durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}$$

gegeben sein soll. Bezogen auf die Grundpunkte seien

$$\mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

deren Projectionspunkte und

$$\begin{array}{l} \mathfrak{Q}_1{}^1 \mathfrak{Q}_2{}^1 \ldots \mathfrak{Q}^1{}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}^1{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^1{}_{s-1}, \\ \mathfrak{Q}^2{}_1 \mathfrak{Q}^2{}_2 \ldots \mathfrak{Q}^2{}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}^2{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^2{}_{s-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{Q}^s{}_1 \mathfrak{Q}^s{}_2 \ldots \mathfrak{Q}^s{}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}^s{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^s{}_{s-1} \; . \end{array}$$

die zugehörigen Basisreste. Jeder dieser Basisreste bestimmt wieder eine Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, die wir mit

$$\mathfrak{S}^1, \mathfrak{S}^2, \mathfrak{S}^3 \ldots \mathfrak{S}^s$$

bezeichnen wollen und von denen wir wissen, dass sie ebenfalls durch die Projectionspunkte

$$\mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

(den einzigen ausgenommen, der zum jedesmaligen Basisrest gehört), gehen müssen.

γ) Die beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ schneiden sich ausser in den Grundpunkten

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

in noch

$$n^2 - p = n^2 - \{\tfrac{1}{2} n (n-1) + 1\} = \tfrac{1}{2} (\overline{n-1}) (\overline{n-1} + 3)$$

weiteren Punkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)},$$

welche, wie man sieht, gerade zur Bestimmung einer Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hinreichen.

δ) Endlich nehmen wir in der Ebene der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ auch noch ein Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung an, dessen Basis

$$b_1 b_2 \ldots b_p \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

sein mag, so dass also die Grundpunkte des Büschels mit Durchschnittspunkten von K und $\mathfrak{K}$ zusammenfallen.

Nach den in § 3 durchgeführten Untersuchungen finden nun folgende Umstände statt:

a) Der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ bestimmt eine gewisse Curve S der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung.

b) Zum Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung giebt es ein gewisses projectivisches Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches mit jenem durch den Durchschnitt entsprechender Elemente den zusammengesetzten Ort $(K + S)$ erzeugt. Von den $(n-2)^2$ Basispunkten dieses Büschels $(V_1 V_2)$ fallen die Punkte

$$g_1 g_2 \dots g_s \qquad s = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

auf die Curve K, und die Punkte

$$h_1 h_2 \dots h_s \qquad s_1 = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

auf die Curve S (§ 3 Seite 220).

c) Aus demselben Grunde giebt es zum Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ auch noch ein zweites projectivisches Curvenbüschel $(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches mit ihm den Ort $(\mathfrak{K} + S)$ erzeugt, und von dessen $(n-2)^2$ Basispunkten die Punkte

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \dots \mathfrak{g}_s$$

auf die Curve $\mathfrak{K}$ und der Rest, nämlich die Punkte

$$\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \dots \mathfrak{h}_{s_1}$$

wieder auf die Curve S fallen.

Wir theilen nun die fernere Untersuchung in zwei Theile. Im ersten Theile behandeln wir den besonderen Fall, wo der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ auf eine der beiden Curven K oder $\mathfrak{K}$ fällt; im zweiten Theil nehmen wir jenen Basisrest beliebig an.

§ 5.

Besonderer Fall.

Wenn der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ auf die Curve $\mathfrak{K}$ fällt, so muss er in einen der 3 verschiedenen Basisreste

$$\begin{array}{c} \mathfrak{O}_1^{\,1} \mathfrak{O}_2^{\,1} \dots \mathfrak{O}^1_{n-3} \,||\, \mathfrak{O}^1_{n-2} \dots \mathfrak{O}^1_{s-1}, \\ \mathfrak{O}_1^{\,2} \mathfrak{O}_2^{\,2} \dots \mathfrak{O}^2_{n-3} \,||\, \mathfrak{O}^2_{n-2} \dots \mathfrak{O}^2_{s-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{O}_1^{\,s} \mathfrak{O}_2^{\,s} \dots \mathfrak{O}^s_{n-3} \,||\, \mathfrak{O}^s_{n-2} \dots \mathfrak{O}^s_{s-1} \end{array}$$

dieser Curve $\mathfrak{K}$ zu liegen kommen; es sei dies z. B. der Basisrest

$$\mathfrak{O}_1^{\,1} \mathfrak{O}_2^{\,1} \dots \mathfrak{O}^1_{n-3} \,||\, \mathfrak{O}^1_{n-2} \dots \mathfrak{O}^1_{s-1}.$$

Alsdann erzeugt das Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ mit dem projectivischen Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ die Curve $\mathfrak{K}$; es ist nämlich:

$$\mathfrak{P}^1\,[a'_1 a'_2 \dots a'_{2n-1}] \;\overline{\wedge}\; (b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \dots \mathfrak{O}_{n-3} \,||\, \mathfrak{O}_{n-2} \dots \mathfrak{O}_{s-1}) \\ [a'_1 a'_2 \dots a'_{2n-1}];$$

ebenso erzeugt aber auch das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung mit dem projectivischen Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung den zusammengesetzten Ort $(K + \mathfrak{S}^1)$. Aus der Projectivität der beiden Büschel $(T_1 T_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ einerseits, $(T_1 T_2)$ und $(V_1 V_2)$ andererseits, folgt aber auch die Projectivität von $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$, welche daher durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente eine gewisse Curve der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugen werden. Diese durch die projectivischen Büschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung und $\mathfrak{P}^1$ der ersten Ordnung er-

zeugte Curve ist aber die gewisse Curve Σ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, die durch die weiteren Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)}$$

der Curven K und $\mathfrak{K}$ bestimmt wird, woraus wir weiter erfahren, dass diese Curve Σ durch den Projectionspunkt $\mathfrak{P}^1$ und aus demselben Grunde nicht nur durch alle Projectionspunkte

$$\mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

der Curve $\mathfrak{K}$, sondern (wegen der vollkommenen Symmetrie) auch durch die sämmtlichen Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

der Curve K gehen muss. Daher gilt folgender merkwürdige Satz:

> Eine Curve Σ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)$ unbekannte Schnittpunkte zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung bestimmt wird, geht durch die Projectionspunkte dieser beiden Curven in Bezug auf die p übrigen Schnittpunkte als Grundpunkte.

Daraus folgt als specieller Fall für $n=3$ der in § 2 angegebene Plücker'sche Satz:

> Von neun Durchschnittspunkten zweier Curven der dritten Ordnung bestimmen fünf einen Kegelschnitt, der durch die Projectionspunkte in Bezug auf die übrigen vier Schnittpunkte als Grundpunkte geht.

Noch bleibt uns zu untersuchen übrig, welche Schlüsse sich aus dem soeben ausgesprochenen Lehrsatze in Bezug auf die Lage der Basispunkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ ziehen lassen.

Das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ ist zugleich Zeugungsbüschel für die Curve Σ, als auch für den zusammengesetzten Ort $(K+\mathfrak{S}^1)$; daraus ergiebt sich nun, dass die Basis dieses Curvenbüschels einerseits aus Durchschnittspunkten von Σ mit K, andererseits aus Durchschnittspunkten von Σ mit $\mathfrak{S}^1$ bestehen muss. Nun sind aber, wie soeben bewiesen wurde, die weiteren Schnittpunkte von Σ mit K die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s;$$

aus diesem Grunde fallen also die Punkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s$$

mit den Projectionspunkten von K zusammen. Andererseits schneidet Σ die Curve $\mathfrak{S}^1$ schon in den $(s-1)$ Projectionspunkten

$$\mathfrak{P}^2 \mathfrak{P}^3 \ldots \mathfrak{P}^s$$

auf $\mathfrak{K}$; die $s_1 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ weiteren Schnittpunkte beider Curven müssen demnach die Basispunkte

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ sein.

§ 6.

Allgemeiner Fall.

Wenn der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,\|\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ nicht auf eine der beiden Curven K oder $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung fällt, so erzeugt das projectivische Curvenbüschel $(V_1 V_2)$, dessen Basis

$$g_1 g_2 \ldots g_s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

ist, mit $(T_1 T_2)$ den zusammengesetzten Ort $(K + S)$; aus demselben Grund erzeugt das zu $(T_1 T_2)$ projectivische Curvenbüschel $(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2)$, dessen Basis

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \ldots \mathfrak{g}_s \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \ldots \mathfrak{h}_{s_1}$$

ist, mit ihm den zusammengesetzten Ort $(\mathfrak{K} + S)$. Aus der gleichzeitigen Projectivität von $(T_1 T_2)$ mit $(V_1 V_2)$ einerseits und $(T_1 T_2)$ mit $(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2)$ andererseits folgt aber die Projectivität der beiden Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ und $(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2)$ der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, welche also durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente einen gewissen Ort der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung erzeugen müssen. Dieser erzeugte Ort der $(2n-4)^{ten}$ Ordnung lässt sich leicht feststellen. Die entsprechenden Elemente der beiden projectivischen Büschel $(V_1 V_2)$ und $(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2)$ schneiden sich nämlich einestheils auf der Curve Σ, anderentheils auf der Curve S; also ist $(\Sigma + S)$ das Erzeugniss jener beiden projectivischen Gebilde.

Daraus ergeben sich nun nachstehende Folgerungen:

a) Weil das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ zugleich Zeugungsbüschel für die Oerter $(K + S)$ und $(\Sigma + S)$ ist, so muss der Theil der Basispunkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

welcher auf K fällt, zugleich auch auf Σ fallen, d. h. es müssen die weiteren Schnittpunkte von Σ und K, oder mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen gefundene Eigenschaft, die Projectionspunkte der Curve K sein. Also fallen die Basispunkte

$$g_1 g_2 \ldots g_s$$

mit den Projectionspunkten

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

der Curve K, und aus demselben Grund die Basispunkte

$$\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 \ldots \mathfrak{g}_s$$

mit den Projectionspunkten

$$\mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

der Curve $\mathfrak{K}$ zusammen. Daher gilt folgender Satz:

> Hat man in der Ebene einer Curve K der n^{ten} Ordnung ein Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{ten}$ Ordnung, dessen Grundpunkte
>
> $$b_1 b_2 \ldots b_p$$
>
> auf die Curve K fallen, während der Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

beliebig in der Ebene liegt, so schneidet jede Curve dieses Curvenbüschels die Curve K in noch weiteren Punkten, welche gerade zur Bestimmung einzelner Curven

$$V_1 V_2 V_3 \dots$$

der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung hinreichen; diese Curven bilden selbst wieder ein Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches projectivisch ist zum Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ und mit ihm, ausser der Curve K, auch noch diejenige S erzeugt, die durch den Basisrest

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ bestimmt wird. Die Basispunkte des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$, welche auf die Curve K fallen, sind feste, von dem Basisreste

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

unabhängige Punkte, nämlich die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \dots P^s$$

der Curve K in Bezug auf die Grundpunkte

$$b_1 b_2 \dots b_p.$$

Die übrigen Basispunkte

$$h_1 h_2 \dots h_{s_1}$$

des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ fallen auf die Curve S.

Oder auch:

Von den $n(n-1)$ Durchschnittspunkten einer Curve K der n^{ten} Ordnung mit einer Curve T der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmen

$$\tfrac{1}{2}(\overline{n-2})(\overline{n-2}+3)$$

Punkte eine gewisse Curve der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch die Projectionspunkte von K in Bezug auf die übrigen

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)+1$$

Schnittpunkte als Grundpunkte geht.

β) Ist insbesondere K eine Curve der vierten und T eine solche der dritten Ordnung, und nennt man die unzählig vielen Curven der dritten Ordnung, die durch sieben Punkte gelegt werden können, ein Curvennetz der dritten Ordnung, und die unzählig vielen Kegelschnitte, die durch drei Punkte gelegt werden können, ein Kegelschnittnetz, so lassen sich die gefundenen Eigenschaften für diesen besonderen Fall wie folgt aussprechen:

Fallen die sieben Netzpunkte

$$b_1 b_2 \dots b_7$$

eines Curvennetzes der dritten Ordnung auf eine

Curve K der vierten Ordnung, so schneidet jede Curve dieses Netzes die Curve K in noch fünf Punkten. Die unzählig vielen dadurch bestimmten Kegelschnitte bilden alsdann ein Kegelschnittnetz, dessen drei Netzpunkte auf die Curve K zu liegen kommen, nämlich in die **Projectionspunkte** von K in Bezug auf die sieben Netzpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7$$

als Grundpunkte. Gehen die Curven des Curvennetzes der dritten Ordnung aber noch durch einen achten und dann von selbst auch noch durch einen neunten Punkt der Ebene — wird das Curvennetz also zu einem Curvenbüschel der dritten Ordnung —, so geht auch das Kegelschnittnetz in ein Kegelschnittbüschel über, und zwar fällt der vierte Basispunkt desselben auf diejenige Gerade, welche durch die ausserhalb der Curve K fallenden zwei Basispunkte des Curvenbüschels der dritten Ordnung bestimmt wird. Sollten aber endlich auch noch die beiden letzten Basispunkte des Curvenbüschels der dritten Ordnung auf die Curve K fallen — was im Allgemeinen nur auf drei verschiedene Arten möglich ist —, so löst sich das Kegelschnittbüschel jedesmal in eine feste Gerade und ein Strahlenbüschel auf und es geht daraus die Erzeugung der Curve K durch ein Curvenbüschel der dritten Ordnung und ein Strahlenbüschel hervor etc. etc.

γ) Aus diesen Eigenschaften entspringen die Hilfsmittel zur Lösung der folgenden Aufgabe:

Es ist eine Curve K der vierten Ordnung gegeben (d. h. sie liegt gezeichnet vor), so soll man zu irgend sieben Punkten

$$b_1 b_2 \ldots b_7$$

als Grundpunkte die zugehörigen Projectionspunkte

$$P^1 P^2 P^3$$

und Basisreste

$$Q_1^1 \parallel Q_2^1,\ Q_1^2 \parallel Q_2^2,\ Q_1^3 \parallel Q_2^3$$

construiren.

Wir legen durch die fünf Punkte

$$b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$$

einen Kegelschnitt R, und durch die zwei Punkte

$$b_6 b_7$$

eine Gerade L. $(R + L)$ kann alsdann als ein Ort der dritten Ordnung aufgefasst werden. Nun schneide R die Curve K noch in den drei Punkten

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$$

und die Gerade L die Curve K noch in den beiden Punkten

$$\alpha_4\,\alpha_5.$$

Der durch die fünf Punkte

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4\,\alpha_5$$

bestimmte Kegelschnitt trifft die Curve K in noch drei weiteren Punkten; dies sind die drei Projectionspunkte

$$P^1\,P^2\,P^3.$$

Um nun auch noch die drei zugehörigen Basisreste zu construiren, erinnere man sich an den Satz in § 2 S. 217 (oder auch an den allgemeinen Satz § 3 S. 221), nach welchem zwei Projectionspunkte mit dem Basisrest, der zum dritten Projectionspunkt gehört, auf derselben Geraden liegen. Also schneidet die Gerade $\overline{P^1P^2}$ die Curve K in $Q_1^3 \parallel Q_2^3$, die Gerade $\overline{P^1P^3}$ in $Q_1^2 \parallel Q_2^2$ und die Gerade $\overline{P^2P^3}$ in $Q_1^1 \parallel Q_2^1$. Damit ist die Aufgabe gelöst.

§ 7.

Eigenschaft der Projectionspunkte für verschiedene Grundpunkte.

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Eigenschaften der Projectionspunkte etc. führen zu nachstehenden weiteren Folgerungen:

I. Es seien K und $\mathfrak{K}$ wieder zwei Curven der n^{ten} Ordnung und

$$b_1\,b_2\,\ldots\,b_p\;\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p\;k_1\,k_2\,\ldots\,k_{n-2}$$

deren n^2 Durchschnittspunkte. Nimmt man einmal die Punkte

$$b_1\,b_2\,\ldots\,b_p$$

als Grundpunkte von K, so seien

$$P^1\,P^2\,\ldots\,P^s$$

deren Projectionspunkte und

$$\begin{array}{l} Q_1^1\,Q_2^1\,\ldots\,Q^1_{n-3} \parallel Q^1_{n-2}\,\ldots\,Q^1_{s-1} \\ Q_1^2\,Q_2^2\,\ldots\,Q^2_{n-3} \parallel Q^2_{n-2}\,\ldots\,Q^2_{s-1} \\ Q_1^s\,Q_2^s\,\ldots\,Q^s_{n-3} \parallel Q^s_{n-2}\,\ldots\,Q^s_{s-1} \end{array}$$

deren Basisreste; nimmt man dagegen die Punkte

$$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p$$

als Grundpunkte, so seien für dieselbe Curve K

$$p^1\,p^2\,\ldots\,p^s$$

die Projectionspunkte und

$$\begin{array}{l} q_1^1\,q_2^1\,\ldots\,q^1_{n-3} \parallel q^1_{n-2}\,\ldots\,q^1_{s-1} \\ q_1^2\,q_2^2\,\ldots\,q^2_{n-3} \parallel q^2_{n-2}\,\ldots\,q^2_{s-1} \\ q_1^s\,q_2^s\,\ldots\,q^s_{n-3} \parallel q^s_{n-2}\,\ldots\,q^s_{s-1} \end{array}$$

die Basisreste.

II. Die Punkte

$$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\ldots\,\varepsilon_p\;k_1\,k_2\,\ldots\,k_{n-2}$$

bestimmen eine gewisse Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Curve K auch noch in den Projectionspunkten

$$P^1 P^2 P^s$$

schneidet (§ 5 Seite 223). Umgekehrt lässt sich also auch durch die Punkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p P^1 P^2 \ldots P^s$$

eine gewisse Curve Σ_1 der $(n-1)^{ten}$ Ordnung legen, die die Curve K in den noch übrigen Schnittpunkten

$$k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

mit $\mathfrak{K}$ trifft. Ganz aus denselben Gründen muss sich durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p p^1 p^2 \ldots p^s$$

eine andere gewisse Curve Σ_2 ebenfalls von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung legen lassen, die die Curve K wieder in den Punkten

$$k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

schneidet.

III. Die Curve Σ_1 schneidet die Curve K ausser in den Punkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

noch in den Punkten

$$P^1 P^2 \ldots P^s k_1 k_2 \ldots k_{n-2},$$

und diese Punkte müssen nach den Sätzen des vorigen Paragraphen auf einer gewissen Curve S_1 der $(n-2)^{ten}$ Ordnung liegen, welche auch durch die Projectionspunkte

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

hindurchgeht. Aus denselben Gründen schneidet Σ_2 die Curve K ausser in den Punkten

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

noch in den Punkten

$$p^1 p^2 \ldots p^s k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

und diese Punkte bestimmen wieder eine gewisse Curve S_2 der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, die auch durch die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

gehen muss. Die Curven S_1 und S_2 müssen also in eine einzige Curve S zusammenfallen.

Aus I., II. und III. ergeben sich daher nachstehende Lehrsätze:

Sind

$$b_1 b_2 \ldots b_p \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

die n^2 Durchschnittspunkte zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung, und

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

die Projectionspunkte von K in Bezug auf die Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p;$$

ebenso

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

die Projectionspunkte von K in Bezug auf die Grundpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p,$$

so liegen

α) Die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s \; p^1 p^2 \ldots p^s$$

auf einer und derselben Curve S der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche auch durch die übrigen Schnittpunkte

$$k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

von K und $\mathfrak{K}$ geht.

β) Die Punktsysteme

$$b_1 b_2 \ldots b_p \; p^1 p^2 \ldots p^s$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p \; P^1 P^2 \ldots P^s$$

bezüglich auf zwei Curven Σ_1 und Σ_2 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die auch zugleich durch die weiteren Schnittpunkte

$$k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$$

von K und $\mathfrak{K}$ gehen.

Es seien z. B. K und $\mathfrak{K}$ zwei Curven der vierten Ordnung und

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \; \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7 \; k_1 k_2$$

deren 16 Durchschnittspunkte; ferner

$$P^1 P^2 P^3$$

die Projectionspunkte von K für die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7,$$

sowie

$$p^1 p^2 p^3$$

die Projectionspunkte von K für die Punkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$$

als Grundpunkte; alsdann liegen

γ) Die sechs Projectionspunkte

$$P^1 P^2 P^3 \; p^1 p^2 p^3$$

auf einem Kegelschnitte, der auch durch die zwei übrigen Schnittpunkte k_1 und k_2 von K und $\mathfrak{K}$ geht.

δ) Die zwei Punktsysteme

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \; p^1 p^2 p^3$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7 \; P^1 P^2 P^3$$

auf zwei Curven Σ_1 und Σ_2 der dritten Ordnung, welche sich noch in den beiden Durchschnittspunkten k_1 und k_2 von K und $\mathfrak{K}$ treffen.

Wären entsprechend K und $\mathfrak{K}$ zwei Curven der dritten Ordnung mit den neun Schnittpunkten

$$b_1 b_2 b_3 b_4 \; \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \; k_1$$

und P^1, p^1 bezüglich die zwei Projectionspunkte von K einmal für die Grundpunkte $b_1 b_2 b_3 b_4$, das anderemal für die Grundpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$, so liegen

ε) Die beiden Projectionspunkte P^1 und p^1 auf einer Geraden, die auch durch den neunten Schnittpunkt k_1 von K_1 und $\mathfrak{K}$ geht.

η) Die beiden Punktsysteme

$$b_1 b_2 b_3 b_4 p^1$$
$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 P^1$$

auf zwei Kegelschnitten, die sich ebenfalls in dem neunten Schnittpunkte k_1 von K und $\mathfrak{K}$ schneiden.

Diese beiden letzten Sätze bilden zusammen den bekannten Hart-schen Satz (§ 2 Seite 210) für Curven der dritten Ordnung.

§ 8.

Construction einer Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch unbekannte Schnittpunkte zweier Curven der n^{ten} Ordnung bestimmt ist.

Die Resultate der bisherigen Untersuchung geben uns das Mittel zur Lösung des folgenden Fundamentalproblems:

Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung bezüglich durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte gegeben sind, nämlich K_1 durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\, a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}$$

und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p\, a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1},$$

so soll diejenige Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugt werden, welche die übrigen unbekannten Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{\frac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)}$$

von K und $\mathfrak{K}$ bestimmt

Die gegebene Curve K der n^{ten} Ordnung lässt sich auf die $s = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ verschiedenen Arten

$$P^1 [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, Q_1{}^1 Q_2{}^1 \ldots Q^1{}_{n-3} \,\|\, Q^1{}_{n-2} \ldots Q^1{}_{s-1})\; [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, Q_1{}^2 Q_2{}^2 \ldots Q^2{}_{n-3} \,\|\, Q^2{}_{n-2} \ldots Q^2{}_{s-1})\; [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^s [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, Q_1{}^s Q_2{}^s \ldots Q^s{}_{n-3} \,\|\, Q^s{}_{n-2} \ldots Q^s{}_{s-1})\; [a_1 a_2 \ldots a_{2n-1}]$$

und ebenso die Curve $\mathfrak{K}$ auf die s verschiedenen Arten

$$\mathfrak{P}^1 [a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}] \wedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, \mathfrak{Q}_1{}^1 \mathfrak{Q}_2{}^1 \ldots \mathfrak{Q}^1{}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}^1{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^1{}_{s-1})$$
$$[a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}],$$
$$\mathfrak{P}^2 [a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, \mathfrak{Q}_1{}^2 \mathfrak{Q}_2{}^2 \ldots \mathfrak{Q}^2{}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}^2{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^2{}_{s-1})$$
$$[a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{P}^s [a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_p\, \mathfrak{Q}_1{}^s \mathfrak{Q}_2{}^s \ldots \mathfrak{Q}^s{}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}^s{}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}^s{}_{s-1})$$
$$[a'_1 a'_2 \ldots a'_{2n-1}]$$

durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugen.

Nach § 5 geht die gesuchte Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung durch die sämmtlichen Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s \mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$, und es bleibt daher nur noch die Aufgabe: ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Curvenbüschel der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung festzustellen, welche durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die Curve Σ erzeugen.

Zu diesem Zweck erinnern wir uns zunächst an folgende unter sich projectivische Curvenbüschel:

1. an das Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ mit der Basis
$$(b_1 b_2 \ldots b_p \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \ldots \mathfrak{O}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{O}_{n-2} \ldots \mathfrak{O}_{s-1}),$$
2. an das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ mit der Basis
$$(P^1 P^2 \ldots P^s h_1 h_2 \ldots h_{s_1})$$

und endlich

3. an das Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$, welches den Projectionspunkt $\mathfrak{P}^1$ der Curve $\mathfrak{K}$ zum Mittelpunkt hat.

Das Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ erzeugt mit dem Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ die Curve $\mathfrak{K}$; mit dem Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ aber den zusammengesetzten Ort $(K + \mathfrak{S}^1)$, wobei $\mathfrak{S}^1$ die durch den Basisrest

$$\mathfrak{O}_1{}^1 \mathfrak{O}_2{}^1 \ldots \mathfrak{O}^1{}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{O}^1{}_{n-2} \ldots \mathfrak{O}^1{}_{s-1}$$

bestimmte Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnet; endlich erzeugt das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ mit dem Strahlenbüschel P^1 die gesuchte Curve Σ. Unsere Aufgabe wird demnach als gelöst anzusehen sein, wenn es gelingt

a) die Basis des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ festzustellen und

b) in den beiden projectivischen Büscheln $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ drei entsprechende Elementenpaare anzugeben.

Was zunächst das Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ anbetrifft, so sind von den $(n-2)^2$ Basispunkten

$$P^1 P^2 \ldots P^s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

desselben, die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

der Curve K als bekannt anzusehen, während die übrigen noch unbekannten Basispunkte

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

auf der Curve $\mathfrak{S}^1$ liegen (§ 3 Seite 217).

Die Curve T_1 oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_p \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \ldots \mathfrak{O}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{O}_{n-2} \ldots \mathfrak{O}_{s-1}) \, [a_1]$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ schneidet die Curve $\mathfrak{S}^1$ ausser in den Punkten

$$\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \ldots \mathfrak{O}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{O}_{n-2} \ldots \mathfrak{O}_{s-1}$$

nur noch in

$$(n-1)(n-3) - \{\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1\} = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) = s_1$$

Punkten

$$u_1 u_2 \dots u_{s_1},$$

welche auch der Curve V_1 des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ angehören. Nimmt man diese Punkte

$$u_1 u_2 \dots u_{s_1}$$

als construirt an, so ist die Curve V_1 durch die Punkte

$$P^1 P^2 \dots P^s u_1 u_2 \dots u_{s_1} a_1$$

mehr als bestimmt. In gleicher Weise schneidet die Curve T_2 oder

$$(b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}_{n-2} \dots \mathfrak{Q}_{s-1}) [a_2]$$

die Curve $\mathfrak{S}^1$ noch in den Punkten

$$v_1 v_2 \dots v_{s_1},$$

welche auch der Curve V_2 angehören. Sind diese Punkte

$$v_1 v_2 \dots v_{s_1}$$

construirt, so ist auch die Curve V_2 durch die Punkte

$$P^1 P^2 \dots P^s v_1 v_2 \dots v_{s_1} a_2$$

bestimmt. Die weiteren Schnittpunkte zwischen V_1 und V_2 ergeben dann die gesuchten Punkte

$$h_1 h_2 \dots h_{s_1};$$

oder diese lassen sich auch noch einfacher als weitere Schnittpunkte zwischen $\mathfrak{S}^1$ und V_1 oder $\mathfrak{S}^1$ und V_2 construiren.

Endlich sind noch in den beiden projectivischen Büscheln $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ drei entsprechende Elementenpaare anzugeben. Zu diesem Zwecke nehmen wir im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ mit der Basis

$$(b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{Q}_1^1 \mathfrak{Q}_2^1 \dots \mathfrak{Q}^1_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}^1_{n-2} \dots \mathfrak{Q}^1_{s-1})$$

die drei Elemente $T_1 T_2 T_3$ oder

$$(b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{Q}_1^1 \mathfrak{Q}_2^1 \dots \mathfrak{Q}^1_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}^1_{n-2} \dots \mathfrak{Q}^1_{s-1}) [a_1]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}_{n-2} \dots \mathfrak{Q}_{s-1}) [a_2]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_p \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_{n-3} \,||\, \mathfrak{Q}_{n-2} \dots \mathfrak{Q}_{s-1}) [a_3]$$

und suchen im projectivischen Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ die drei entsprechenden Strahlen

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3,$$

während im Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ die drei entsprechenden Elemente V_1, V_2, V_3 oder

$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{s_1}) [a_1]$$
$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{s_1}) [a_2]$$
$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{s_1}) [a_3]$$

sein werden. Aus der gleichzeitigen Projectivität von $(T_1 T_2)$ mit $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ folgt aber, dass

$$V_1 \text{ und } \mathfrak{p}_1; \quad V_2 \text{ und } \mathfrak{p}_2; \quad V_3 \text{ und } \mathfrak{p}_3$$

auch drei entsprechende Elemente der beiden projectivischen, die Curve Σ erzeugenden Büschel $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ sein müssen. Die Aufgabe ist also gelöst.

Beispiel.

Um zu zeigen, dass das vorhergehende allgemeine Verfahren: diejenige Curve Σ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu erzeugen, welche durch eine genügende Zahl von unbekannten Schnittpunkten zweier Curven der n^{ten} Ordnung bestimmt wird, in der That das möglich einfachste ist, wollen wir die Construction für den speciellen Fall noch einmal wiederholen, wenn K und $\mathfrak{K}$ zwei Curven der vierten Ordnung darstellen. Dabei wird sich herausstellen, dass, abgesehen von der Erzeugung dieser Curven, alle Operationen mittelst des Lineals allein ausgeführt werden können. Das Problem lautet jetzt:

Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der vierten Ordnung bezüglich durch vierzehn Punkte gegeben sind, nämlich K durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7 a_1 a_2 \ldots a_7$$

und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7 a'_1 a'_2 \ldots a'_7;$$

so soll diejenige Curve Σ der dritten Ordnung erzeugt werden, welche durch die übrigen neun Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_9$$

von K und $\mathfrak{K}$ bestimmt wird.

Die Curve K kann auf die drei verschiedenen Arten

$$P^1 [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^1 \| Q_2^1) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^2 \| Q_2^2) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^3 [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^3 \| Q_2^3) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$

und die Curve $\mathfrak{K}$ auf die drei verschiedenen Arten

$$\mathfrak{P}^1 [a'_1 a'_2 \ldots a'_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1) [a'_1 a'_2 \ldots a'_7$$
$$\mathfrak{P}^2 [a'_1 a'_2 \ldots a'_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 \mathfrak{Q}_1^2 \| \mathfrak{Q}_2^2) [a'_1 a'_2 \ldots a'_7$$
$$\mathfrak{P}^3 [a'_1 a'_2 \ldots a'_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7 \mathfrak{Q}_1^3 \| \mathfrak{Q}_2^3) [a'_1 a'_2 \ldots a'_7$$

durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Curvenbüschel der dritten Ordnung erzeugt werden.

Nun geht die gesuchte Curve Σ durch die sämmtlichen Projectionspunkte

$$P^1 \, P^2 \, P^3 \, \mathfrak{P}^1 \, \mathfrak{P}^2 \, \mathfrak{P}^3$$

der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$, welche aber der Zahl nach zur Bestimmung dieser Curve nicht hinreichen. Nichts destoweniger lassen sich doch ein Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ mit der Basis

$$P^1 \, P^2 \, P^3 \, h_1$$

und ein projectivisches Strahlenbüschel mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{P}^1$ feststellen, welche durch den Durchschnitt ihrer entsprechenden Elemente die Curve Σ erzeugen. Zu diesem Zwecke denken wir an das Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der dritten Ordnung mit der Basis

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1;$$

dasselbe ist zugleich projectivisch mit dem Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ und mit dem Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$; mit $(V_1 V_2)$ erzeugt es den zusammengesetzten Ort $(K + \mathfrak{S}^1)$ und mit $\mathfrak{P}^1$ die Curve $\mathfrak{K}$. $\mathfrak{S}^1$ bezeichnet hierbei die Gerade $\mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1$, auf welcher auch der vierte Basispunkt h_1 des Kegelschnittbüschels $(V_1 V_2)$ liegt.

Unsere Aufgabe wird nun gelöst sein, wenn

a) Die unbekannten Basispunkte des Büschels $(V_1 V_2)$ gefunden sind und

b) die Projectivität von $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ durch drei entsprechende Elementenpaare festgestellt ist.

Was den ersten Theil, die Bestimmung der Basis des Kegelschnittbüschels $(V_1 V_2)$ betrifft, so besteht diese Basis aus den vier Punkten

$$P^1\, P^2\, P^3\, h_1,$$

von welchen die drei Projectionspunkte als bekannt anzusehen sind, so dass nur noch der Punkt h_1 zu construiren bleibt.

Zu diesem Zwecke suchen wir zwei Curven V_1 und V_2.

Die Curve V_1 sei bestimmt durch die vier Punkte

$$P^1\, P^2\, P^3\, a_1$$

und durch den dritten Schnittpunkt u_1 der Curve T_1 oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\,[a_1]$$

mit der Geraden $\mathfrak{S}^1$. Ebenso sei V_2 bestimmt durch die vier Punkte

$$P^1\, P^2\, P^3\, a_2$$

und den dritten Schnittpunkt v_1 von T_2 oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\,[a_2]$$

mit $\mathfrak{S}^1$. Die Punkte u_1 und v_1 lassen sich auf bekannte Weise mittelst des Lineals allein finden. Dies vorausgesetzt, ergiebt sich der gesuchte Punkt h_1 entweder als vierter Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte V_1 und V_2, oder besser als zweiter Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{S}^1$ mit V_1 oder V_2; in beiden Fällen kann derselbe nur mittelst des Lineals allein gefunden werden.

Zur Lösung des zweiten Theiles: Feststellung dreier entsprechender Elementenpaare in den beiden projectivischen Büscheln $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$, nehmen wir im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ die drei Curven T_1, T_2, T_3 oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\,[a_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\,[a_2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_4\, \mathfrak{Q}_1 \;\; \| \mathfrak{Q}_2)\;\;[a_3].$$

Ihnen entsprechen im Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ die drei Kegelschnitte V_1, V_2, V_3 oder

$$(P^1\, P^2\, P^3\, h_1)\,[a_1]$$
$$(P^1\, P^2\, P^3\, h_1)\,[a_2]$$
$$(P^1\, P^2\, P^3\, h_1)\,[a_3]$$

und im Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ drei gewisse, noch zu construirende Strahlen

$$\mathfrak{p}_1,\, \mathfrak{p}_2,\, \mathfrak{p}_3.$$

Sind dieselben gefunden, so folgt aus der gleichzeitigen Projectivität von $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ mit $(T_1 T_2)$, dass auch

$$(V_1 \text{ und } \mathfrak{p}_1);\quad (V_2 \text{ und } \mathfrak{p}_2);\quad (V_3 \text{ und } \mathfrak{p}_3)$$

drei entsprechende Elementenpaare in den projectivischen Büscheln $(V_1 V_2)$ und $\mathfrak{P}^1$ sein müssen; die Aufgabe ist also gelöst.

Weitere Vereinfachungen.

Die Auflösung der letzten Aufgabe (wenn nämlich K und $\mathfrak{K}$ zwei Curven der vierten Ordnung darstellen) lässt noch eine weitere bedeutende Vereinfachung zu, wenn man an diejenigen drei ausgezeichneten Kegelschnitte

$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

im Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ denkt, welche durch die drei gegenüberliegenden Seitenpaare des vollständigen Vierecks

$$P^1\, P^2\, P^3\, h_1$$

dargestellt werden. Die drei ihnen entsprechenden Curven

$$T_x,\ T_y,\ T_z$$

im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ sind die drei Curven

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1)\ [Q_1^1 \,\|\, Q_2^1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1)\ [Q_1^2 \,\|\, Q_2^2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1)\ [Q_1^3 \,\|\, Q_2^3],$$

zu welchen im projectivischen Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ die drei gewissen Strahlen

$$\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z$$

gehören.

Die drei Curven

$$T_x,\ T_y,\ T_z$$

lassen sich aber auch so darstellen:

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^1 \,\|\, Q_2^1)\ [\mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^2 \,\|\, Q_2^2)\ [\mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^3 \,\|\, Q_2^3)\ [\mathfrak{Q}_1^1 \,\|\, \mathfrak{Q}_2^1]$$

und in dieser Form erscheinen sie als Elemente in den drei Zeugungsbüscheln der Curve K. In den drei projectivischen Strahlenbüscheln mit den Mittelpunkten

$$P^1,\ P^2,\ P^3$$

entsprechen ihnen die drei sich in h_1 schneidenden Strahlen

$$P^1 h_1;\quad P^2 h_1;\quad P^3 h_1.$$

Demnach reducirt sich das Auflösungsverfahren auf folgende Operationen: Man suche in den drei, die Curve K erzeugenden projectivischen Gebilden

$$P^1\, [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^1 \,\|\, Q_2^1)\ [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^2\, [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^2 \,\|\, Q_2^2)\ [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^3\, [a_1 a_2 \ldots a_7] \barwedge (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^3 \,\|\, Q_2^3)\ [a_1 a_2 \ldots a_7]$$

zu den drei Elementen

$$(b_1 b_2 \dots b_7\, Q_1^1 \| Q_2^1)\, [\mathfrak{Q}_1 \| \mathfrak{Q}_2]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_7\, Q_1^2 \| Q_2^2)\, [\mathfrak{Q}_1 \| \mathfrak{Q}_2]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_7\, Q_1^3 \| Q_2^3)\, [\mathfrak{Q}_1 \| \mathfrak{Q}_2]$$

ihre entsprechenden Elemente, nämlich die drei Projectionsstrahlen

$$P^1 h_1;\quad P^2 h_1;\quad P^3 h_1.$$

Alsdann sind die drei besonderen Kegelschnitte

$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

bestimmt, nämlich durch die Geradenpaare

$$\overline{P^1 h_1} \text{ und } \overline{P^2 P^3}$$
$$\overline{P^2 h_1} \quad ,, \quad \overline{P^1 P^3}$$
$$\overline{P^3 h_1} \quad ,, \quad \overline{P^1 P^2}.$$

Nun suche man weiter in dem Zeugungsbüschel $(T_1 T_2)$ der Curve $\mathfrak{K}$ zu den drei Elementen

$$T_x,\ T_y,\ T_z$$

oder

$$(b_1 b_2 \dots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\, [Q_1^1 \| Q_2^1]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\, [Q_1^2 \| Q_2^2]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_7\, \mathfrak{Q}_1^1 \| \mathfrak{Q}_2^1)\, [Q_1^3 \| Q_2^3]$$

die drei entsprechenden Projectionsstrahlen

$$\mathfrak{p}_x,\ \mathfrak{p}_y,\ \mathfrak{p}_z$$

im Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$. Dadurch ist die projectivische Beziehung zwischen dem Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ und dem Strahlenbüschel $\mathfrak{P}^1$ hergestellt, denn man kennt jetzt die drei entsprechenden Elementenpaare

$$V_x \text{ und } \mathfrak{p}_x;\quad V_y \text{ und } \mathfrak{p}_y;\quad V_z \text{ und } \mathfrak{p}_z.$$

Die Aufgabe ist also gelöst.

§ 9.

Construction einer Curve V der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch $\frac{1}{2}(n-2)(n-2+3)$ unbekannte Schnittpunkte zweier Curven K und T bezüglich von der n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt wird.

Das zu lösende Problem ist folgendes:

Es sei K eine Curve der n^{ten} Ordnung, gegeben durch die Punkte

$$b_1 b_2 \dots b_p\, a_1 a_2 \dots a_{2n-1}$$

und T eine Curve der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, gegeben durch die Punkte

$$b_1 b_2 \dots b_p\, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3},\ \alpha;$$

man soll diejenige Curve V der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung construiren, welche durch die übrigen Schnittpunkte von K und T bestimmt wird.

Die Projectionspunkte der Curve K seien

$$P^1 P^2 \dots P^s$$

und die zugehörigen Basisreste

$$Q_1^1 Q_2^1 \dots Q^1_{n-3} \| Q^1_{n-2} \dots Q^1_{s-1}$$
$$Q_1^2 Q_2^2 \dots Q^2_{n-3} \| Q^2_{n-2} \dots Q^2_{s-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_1^s Q_2^s \dots Q^s_{n-3} \| Q^s_{n-2} \dots Q^s_{s-1},$$

so dass die Curve K auf die s verschiedenen Arten

$$P^1 [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \dots b_p\, Q_1 Q_2 \dots Q_{n-3} \| Q_{n-2} \dots Q_{s-1}) \atop [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \dots b_p\, Q_1 Q_2 \dots Q_{n-3} \| Q_{n-2} \dots Q_{s-1}) \atop [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P^s [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \dots b_p\, Q_1 Q_2 \dots Q_{n-3} \| Q_{n-2} \dots Q_{s-1}) \atop [a_1 a_2 \dots a_{2n-1}]$$

durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugt werden kann.

Nun nehmen wir die Punkte

$$b_1 b_2 \dots b_p\, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3}$$

als Basispunkte eines Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von welchem die gegebene Curve T offenbar ein Element sein wird, und zwar dasjenige, welches durch den Punkt α in der Ebene bestimmt ist. Zwei Elemente T_1 und T_2 des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ seien

$$(b_1 b_2 \dots b_p\, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3})\,[a_1]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_p\, \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3})\,[a_2];$$

dieselben schneiden sich aber in noch weiteren Punkten

$$\lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \dots \lambda_{s-1},$$

welche construirt werden müssen, und wodurch die Basis des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ vollständig wird

$$(b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \| \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}).$$

Die nicht auf K fallenden Basispunkte

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \| \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ bestimmen eine Curve S der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung; ferner schneiden T_1 und T_2 die gegebene Curve K ausser in den Punkten

$$b_1 b_2 \dots b_p$$

in noch weiteren Punkten, wodurch die zwei Curven V_1 und V_2 der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt werden, welche ein gewisses zu $(T_1 T_2)$ projectivisches Curvenbüschel $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung fixiren. Die entsprechenden Elemente dieser beiden projectivischen Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ und $(V_1 V_2)$ schneiden sich ausser auf der Curve K noch auf der Curve S und es wird dadurch der zusammengesetzte Ort $(K+S)$ erzeugt (§ 3). Endlich wissen wir auch noch, dass die Basis des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ aus den Punkten

$$P^1 P^2 \ldots P^s h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

besteht, von denen die Projectionspunkte auf die Curve K und die übrigen

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

auf die Curve S fallen. So wie nun die gegebene Curve T ein Element des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ darstellt, so ist die gesuchte Curve V ein gewisses Element des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$, und zwar dasjenige, welches der Curve T oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_p \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}) \; [\alpha]$$

im projectivischen Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ entspricht.

Die Auflösung unserer Aufgabe reducirt sich daher nur noch auf folgende drei Operationen:

a) Feststellung des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

b) Bestimmung dreier entsprechender Elementenpaare in den beiden projectivischen Büscheln $(V_1 V_2)$ und $(T_1 T_2)$.

c) Aufsuchung des der Curve T im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ entsprechenden Elementes V im Büschel $(V_1 V_2)$.

Wir beginnen mit der Feststellung des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$.

Von den beiden Curven V_1 und V_2 sind uns bereits die

$$P^1 P^2 \ldots P^s$$

als Projectionspunkte von K bekannt; wir wissen nämlich, dass nach den früheren Untersuchungen in § 6 diese beiden Curven durch jene Projectionspunkte gehen müssen, und dass ihre weiteren noch, unbekannten Schnittpunkte

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

auf die Curve S zu liegen kommen. Um die Construction dieses Punktsystems

$$h_1 h_2 \ldots h_{s_1}$$

handelt es sich zunächst.

Zu diesem Zweck müssen wir uns erinnern, dass die Curve T_1 die Curve S ausser in

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \ldots \lambda_{s-1}$$

in noch s_1 weiteren Punkten

$$u_1 u_2 \ldots u_{s_1}$$

schneidet, welche auch der Curve V_1 angehören. In gleicher Weise schneidet auch T_2 die Curve S in noch s_1 weiteren Punkten

$$v_1 v_2 \ldots v_{s_1},$$

welche auch der Curve V_2 angehören. Diese beiden Punktsysteme

$$u_1 u_2 \ldots u_{s_1}$$
$$v_1 v_2 \ldots v_{s_1}$$

müssen construirt werden. Alsdann kennt man von der Curve V_1 die Punkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s u_1 u_2 \ldots u_s a_1$$

und von der Curve V_2 die Punkte

$$P^1 P^2 \dots P^s v_1 v_2 \dots v_{s_1} a_2 ,$$

welche mehr als hinreichen, um diese beiden Curven V_1 und V_2 zu bestimmen.

Nachdem so die beiden Curven V_1 und V_2 durch eine genügende Zahl von Punkten bestimmt worden sind, kann man auch ihre weiteren Schnittpunkte

$$h_1 h_2 \dots h_{s_1}$$

finden, und zwar dadurch, dass man die weiteren Schnittpunkte entweder von V_1 und S oder von V_2 und S construirt; alsdann ist die Basis des Curvenbüschels $(V_1 V_2)$ vollständig durch die Punkte

$$P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{s_1}$$

gegeben.

Jetzt lassen sich auch in den beiden projectivischen Büscheln $(V_1 V_2$ und $(T_1 T_2)$ drei entsprechende Elementenpaare feststellen. Wir bezeichnen die drei Elemente

$$(b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}) \, [a_1]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}) \, [a_2]$$
$$(b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}) \, [a_3]$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ mit T_1, T_2, T_3, dann sind die drei entsprechenden Elemente V_1, V_2, V_3 im Curvenbüschel $(V_1 V_2)$:

$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{n-3} \,||\, h_{n-2} \dots h_{s_1}) \, [a_1]$$
$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{n-3} \,||\, h_{n-2} \dots h_{s_1}) \, [a_2]$$
$$(P^1 P^2 \dots P^s h_1 h_2 \dots h_{n-3} \,||\, h_{n-2} \dots h_{s_1}) \, [a_3].$$

Nun kann zu jedem vierten Elemente des einen Büschels das entsprechende im anderen gefunden werden; also auch zur Curve T oder

$$(b_1 b_2 \dots b_p \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-3} \,||\, \lambda_{n-2} \dots \lambda_{s-1}) \, [\alpha]$$

im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ das entsprechende Element V im Curvenbüschel $(V_1 V_2)$. Damit ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Besonderer Fall.

K und T seien bezüglich Curven der vierten und dritten Ordnung.

Das Problem lautet unter diesen Umständen wie folgt:

> Es sei K eine Curve der vierten Ordnung, gegeben durch die Punkte
>
> $$b_1 b_2 \dots b_7 a_1 a_2 \dots a_7$$
>
> und T eine Curve der dritten Ordnung, gegeben durch die Punkte
>
> $$b_1 b_2 \dots b_7 \lambda_1 \alpha ;$$
>
> man soll denjenigen Kegelschnitt V construiren, welcher durch die fünf übrigen Schnittpunkte von K und T bestimmt wird.

Die Projectionspunkte und Basisreste der Curve K seien

$$P^1, P^2, P^3$$

$$Q_1^1 \| Q_2^1; \quad Q_1^2 \| Q_2^2; \quad Q_1^3 \| Q_2^3;$$

daraus ergiebt sich die dreifache Erzeugung dieser Curve mittelst eines Strahlenbüschels und projectivischen Curvenbüschels der dritten Ordnung:

$$P^1 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^1 \| Q_2^1) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^2 \| Q_2^2) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^3 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^3 \| Q_2^3) [a_1 a_2 \ldots a_7].$$

Nun betrachten wir die acht Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7\, \lambda_1$$

als Basispunkte eines Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ der dritten Ordnung, von welchem die beiden Curven T_1 und T_2 oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1) [a_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1) [a_2]$$

zwei Elemente sein mögen. T_1 und T_2 schneiden sich aber in noch einem neunten Punkt λ_2, welcher construirt werden muss, und sehr leicht mittelst des Lineals allein construirt werden kann. Ist dies geschehen, so wird

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 \| \lambda_2$$

die volle Basis des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ darstellen, dessen beide ausserhalb der Curve K fallenden Basispunkte $\lambda_1 \| \lambda_2$ eine gewisse Gerade S bestimmen werden.

Die einzelnen Curven

$$T_1, \; T_2, \; T_3 \text{ etc.}$$

des Curvenbüschels $(T_1 T_2)$ schneiden nun die Curve K der vierten Ordnung in noch weiteren fünf Punkten, wodurch die Kegelschnitte

$$V_1, \; V_2, \; V_3 \text{ etc.}$$

hervorgehen; diese Kegelschnitte bilden ein zum Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der dritten Ordnung projectivisches Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$, von welchem drei Basispunkte auf die Curve K, nämlich in die Projectionspunkte

$$P^1 P^2 P^3$$

derselben, der vierte Basispunkt h_1 aber auf die Gerade S fallen wird. Der Punkt h_1 ist zu construiren.

Zu diesem Zwecke müssen zuerst die beiden Kegelschnitte V_1 und V_2 durch eine genügende Zahl von Punkten bestimmt werden; bis jetzt kennt man nämlich von V_1 nur die vier Punkte

$$P^1 P^2 P^3 a_1$$

und von V_2 die vier Punkte

$$P^1 P^2 P^3 a_2;$$

es fehlt also von jedem dieser beiden Kegelschnitte noch ein fünfter Punkt. V_1 schneidet aber T_1 in noch einem sechsten Punkte u_1, welcher zugleich auch der dritte Schnittpunkt der Geraden S mit derselben Curve T_1 ist; die beiden anderen Schnittpunkte sind nämlich $\lambda_1 \| \lambda_2$; folglich lässt sich der

Punkt u_1 sehr leicht mittelst des Lineals allein finden. Desgleichen schneidet der Kegelschnitt V_2 die Curve T_2 in einem sechsten Punkte v_1, welcher auch als dritter Schnittpunkt der Geraden S mit T_2 linear construirt werden kann. Sind nun die Punkte u_1, v_1 gefunden, so kennt man jetzt vom Kegelschnitte V_1 die Punkte

$$P^1\, P^2\, P^3\, a_1\, u_1$$

und vom Kegelschnitte V_2 die Punkte

$$P^1\, P^2\, P^3\, a_2\, v_1;$$

der vierte Schnittpunkt von V_1 und V_2, welcher mittelst des Lineals allein construirt werden kann, ist alsdann der gesuchte Punkt h_1. Da man aber weiss, dass h_1 auf die Gerade S fallen muss, so hätte man diesen Punkt auch einfacher als zweiten Schnittpunkt der Geraden S mit V_1 oder V_2 finden können.

Nachdem jetzt das zum Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ der dritten Ordnung projectivische Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$ festgestellt worden ist, nehmen wir in diesen beiden projectivischen Büscheln $(T_1 T_2)$ und $(V_1 V_2)$ drei entsprechende Elementenpaare an, z. B. aus $(T_1 T_2)$ die drei Curven

$$T_1,\ T_2,\ T_3$$

oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 \,\|\, \lambda_2)\,[a_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 \,\|\, \lambda_2)\,[a_2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 \,\|\, \lambda_2)\,[a_3]$$

und aus $(V_1 V_2)$ die drei entsprechenden Curven

$$V_1,\ V_2,\ V_3$$

oder

$$(P^1 P^2 P^3 h_1)\,[a_1]$$
$$(P^1 P^2 P^3 h_1)\,[a_2]$$
$$(P^1 P^2 P^3 h_1)\,[a_3]$$

und suchen zu der gegebenen Curve T oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 \,\|\, \lambda_2)\,[\alpha]$$

im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ den entsprechenden Kegelschnitt V im Kegelschnittbüschel $(V_1 V_2)$. Dieser Kegelschnitt V löst alsdann die gestellte Aufgabe.

Weitere Vereinfachung in der Auflösung.

Wie man sieht, sind in der vorhergehenden Auflösungsmethode alle Operationen (die Auffindung der Projectionspunkte, Basisreste abgerechnet) mittelst des Lineals allein ausgeführt worden. Nichts destoweniger lässt dieses Auflösungsverfahren aber noch eine bedeutende Abkürzung zu, wenn man an die drei besonderen Elemente

$$V_x,\ V_y,\ V_z$$

des Kegelschnittbüschels $(V_1 V_2)$ denkt, welche durch die gegenüberliegenden Seitenpaare des vollständigen Vierecks

$$P^1 P^2 P^3 h_1$$

dargestellt werden. Diese drei besonderen Elemente

$$V_x, V_y, V_z$$

des Kegelschnittbüschels $(V_1 V_2)$ sind demnach die Geradenpaare

$$\overline{P^1 P^2} \text{ und } \overline{P^3 h_1},$$
$$\overline{P^1 P^3} \text{ ,, } \overline{P^2 h_1},$$
$$\overline{P^2 P^3} \text{ ,, } \overline{P^1 h_1}.$$

welche mit Rücksicht auf die bekannte Eigenschaft — zwei Projectionspunkte liegen mit dem Basisrest des dritten auf derselben Geraden — auch so hätten dargestellt werden können:

$$\overline{Q_1^3 \| Q_2^3} \text{ und } \overline{P^3 h_1}$$
$$\overline{Q_1^2 \| Q_2^2} \text{ und } \overline{P^2 h_1}$$
$$\overline{Q_1^1 \| Q_2^1} \text{ und } \overline{P^1 h_1}$$

Die zu

$$V_x, V_y, V_z$$

entsprechenden Curven

$$T_x, T_y, T_z$$

im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ sind folglich die drei Curven

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 [Q_1^3 \| Q_2^3]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 [Q_1^2 \| Q_2^2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 \lambda_1 [Q_1^1 \| Q_2^1]$$

oder auch

$$(b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^3 \| Q_2^3) [\lambda_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^2 \| Q_2^2) [\lambda_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^1 \| Q_2^1) [\lambda_1]$$

und in dieser Form erscheinen

$$T_x, T_y, T_z$$

auch als Elemente der drei Curvenbüschel der dritten Ordnung, welche mit den projectivischen drei Strahlenbüscheln

$$P^1, P^2, P^3$$

die Curve K erzeugen.

Die Auflösung der Aufgabe besteht daher kurz in Folgendem:

Zuerst erzeugen wir die Curve K auf die drei Arten

$$P^1 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^1 \| Q_2^1) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^2 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^2 \| Q_2^2) [a_1 a_2 \ldots a_7]$$
$$P^3 [a_1 a_2 \ldots a_7] \overline{\wedge} (b_1 b_2 \ldots b_7 Q_1^3 \| Q_2^3) [a_1 a_2 \ldots a_7].$$

Alsdann suchen wir diejenigen drei Projectionsstrahlen in den Strahlenbüscheln

$$P^1, P^2, P^3,$$

welche den Elementen

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^1 \,\|\, Q_2^1)\,[\lambda_1]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^2 \,\|\, Q_2^2)\,[\lambda_2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, Q_1^3 \,\|\, Q_2^3)\,[\lambda_3]$$

entsprechen; dieselben schneiden sich in demselben Punkte h_1 und sind also die drei Geraden

$$\overline{P^1 h_1} \quad \overline{P^2 h_1} \quad \overline{P^3 h_1}.$$

Die drei speciellen Kegelschnitte

$$V_x, \; V_y, \; V_z$$

(Geradenpaare) sind jetzt bestimmt, nämlich:

$$Q_1^3 \,\|\, Q_2^3 \text{ und } P^3 h_1$$
$$Q_1^2 \,\|\, Q_2^2 \quad \text{„} \quad P^2 h_1$$
$$Q_1^1 \,\|\, Q_1^1 \quad \text{„} \quad P^1 h_1.$$

Ihnen entsprechen im Curvenbüschel $(T_1 T_2)$ die drei Curven

$$T_x, \; T_y, \; T_z$$

oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \lambda_1)\,[Q_1^3 \,\|\, Q_2^3]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \lambda_1)\,[Q_1^2 \,\|\, Q_2^2]$$
$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \lambda_1)\,[Q_1^1 \,\|\, Q_2^1];$$

dadurch ist die projectivische Beziehung zwischen $(T_1 T_2)$ und $(V_1 V_2)$ hergestellt, und die der Curve T oder

$$(b_1 b_2 \ldots b_7\, \lambda_1)\,[\alpha];$$

im Büschel $(T_1 T_2)$ entsprechende Curve V im Büschel $(V_1 V_2)$ löst die gestelle Aufgabe.

§ 10.

Construction von $p = \frac{1}{2} n\,(n-1) + 1$ unbekannten Schnittpunkten zweier Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung.

Die in § 8 durchgeführten Untersuchungen geben uns das Mittel zur Lösung des folgenden Fundamentalproblems über die Construction unbekannter Durchschnittspunkte zweier gegebener Curven.

> Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung durch eine hinreichende Zahl von Punkten gegeben sind, nämlich K durch die Punkte
>
> $$b_1 b_2 \ldots b_p\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\, a_1 a_2 \ldots a_{n+1},$$
>
> und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte
>
> $$b_1 b_2 \ldots b_p\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\, a_1' a_2' \ldots a'_{n+1}$$
>
> so sollen die noch übrigen unbekannten Durchschnittspunkte
>
> $$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$
>
> von K und $\mathfrak{K}$ construirt werden.

I. Zunächst suchen wir die Projectionspunkte und Basisreste der beiden gegebenen Curven K und $\mathfrak{K}$ in Bezug auf ihre gemeinschaftlichen Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p.$$



Dies giebt für K die Projectionspunkte

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

und die zugehörigen Basisreste

$$\begin{array}{l} Q_1^1 Q_2^1 \ldots Q^1_{n-3} \,\|\, Q^1_{n-2} \ldots Q^1_{s-1} \\ Q_1^2 Q_2^2 \ldots Q^2_{n-3} \,\|\, Q^2_{n-2} \ldots Q^2_{s-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_1^s Q_2^s \ldots Q^s_{n-3} \,\|\, Q^s_{n-2} \ldots Q^s_{n-1}; \end{array}$$

ebenso für $\mathfrak{K}$ die Projectionspunkte

$$\mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s$$

und die Basisreste

$$\begin{array}{l} \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}_{s-1} \\ \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}_{s-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_{n-3} \,\|\, \mathfrak{Q}_{n-2} \ldots \mathfrak{Q}_{s-1}. \end{array}$$

Die Durchschnittspunkte

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

der beiden gegebenen Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung bestimmen nun eine Curve Σ_1 der $(n-1)^{ten}$ Ordnung (§ 4), welche auch durch die sämmtlichen Projectionspunkte der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ in Bezug auf ihre gemeinschaftlichen Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_p$$

geht (§ 5). Die Curve Σ_1 ist daher durch folgende Punkte

$$p^1 p^2 \ldots p^s\, \mathfrak{P}^1 \mathfrak{P}^2 \ldots \mathfrak{P}^s\, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$$

im Allgemeinen vollkommen bestimmt, und kann nach § 8 durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-2)^{ten}$ Ordnung erzeugt werden.

II. Andererseits nehmen wir jetzt die Punkte

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}\, b_{n-1} \ldots b_p$$

als die gemeinschaftlichen Grundpunkte der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ an und suchen wieder die zugehörigen Projectionspunkte und Basisreste. Die Projectionspunkte für K seien

$$p^1 p^2 \ldots p^s$$

und die zugehörigen Basisreste

$$\begin{array}{l} q_1^1 q_2^1 \ldots q^1_{n-3} \,\|\, q^1_{n-2} \ldots q^1_{s-1} \\ q_1^2 q_2^2 \ldots q^2_{n-3} \,\|\, q^2_{n-2} \ldots q^2_{s-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1^s q_2^s \ldots q^s_{n-3} \,\|\, q^s_{n-2} \ldots q^s_{s-1}; \end{array}$$

ebenso seien

$$\mathfrak{p}^1 \mathfrak{p}^2 \ldots \mathfrak{p}^s$$

die Projectionspunkte und

$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_{n-3} \parallel \mathfrak{q}_{n-2} \ldots \mathfrak{q}_{s-1}$$
$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_{n-3} \parallel \mathfrak{q}_{n-2} \ldots \mathfrak{q}_{s-1}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_{n-3} \parallel \mathfrak{q}_{n-2} \ldots \mathfrak{q}_{s-1}$$

die Basisreste der Curve $\mathfrak{K}$.

Die Durchschnittspunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_{n-2}\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

von K und $\mathfrak{K}$ bestimmen jetzt wieder eine gewisse Curve Σ_2 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche auch durch die sämmtlichen Projectionspunkte

$$p^1 p^2 \ldots p^s\, \mathfrak{p}^1 \mathfrak{p}^2 \ldots \mathfrak{p}^s$$

hindurchgeht. Demnach sind auch von der Curve Σ_2 eine hinreichende Zahl von Punkten

$$p^1 p^2 \ldots p^s\, \mathfrak{p}^1 \mathfrak{p}^2 \ldots \mathfrak{p}^s\, b_1 b_2 \ldots b_{n-2}$$

bekannt und es kann dieselbe nach § 8 durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Curvenbüschel der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung erzeugt werden.

III. Die unbekannten Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

der beiden gegebenen Curven K und $\mathfrak{K}$ der n^{ten} Ordnung sind jetzt insofern als construirt anzusehen, als es gelungen ist, zwei Curven Σ_1 und Σ_2 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung zu erzeugen, welche sich in jenen unbekannten Schnittpunkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

von K und $\mathfrak{K}$ treffen. Allein die beiden Curven Σ_1 und Σ_2 schneiden sich ausser in diesen Punkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

in noch $(s-1)$ weiteren Punkten, die wir mit

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1}$$

bezeichnen wollen, und die also ausserhalb der beiden Curven K und $\mathfrak{K}$ zu liegen kommen. Zur vollständigen Lösung unseres Problems wäre daher noch erforderlich, dass die weiteren Schnittpunkte

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1}$$

von Σ_1 und Σ_2, welche keine Schnittpunkte von K und $\mathfrak{K}$ sind, für sich getrennt construirt werden können.

Hierzu führt uns die folgende Betrachtung.

Die beiden Curven Σ_1 und Σ_2 bestimmen ein Curvenbüschel $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, von welchem die Punkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

als Grundpunkte und die Punkte

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1}$$

als zugehöriger Basisrest aufgefasst werden können. Nach § 3 bestimmt der Basisrest

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1}$$

eine gewisse Curve χ der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung; auch giebt es ein zum Curvenbüschel $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung projectivisches Curvenbüschel $(\varphi_1 \varphi_2)$ der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welches mit ihm durch den Durchschnitt entsprechender Elemente den zusammengesetzten Ort $(K+\chi)$ oder $(\mathfrak{K}+\chi)$ erzeugt. Die Curve φ_1 ist bestimmt durch die bekannten Punkte

$$P^1 P^2 \ldots P^s \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2},$$

in welchen Σ_1 die Curve K schneidet; ebenso ist die Curve φ_2 durch die bekannten Punkte

$$p^1 p^2 \ldots p^s b_1 b_2 \ldots b_{n-2}$$

bestimmt, in welchen Σ_2 dieselbe Curve K trifft.

Nun schneiden sich φ_1 und Σ_1 aber noch in $s_1 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ weiteren Punkten

$$u_1 u_2 \ldots u_{s_1},$$

welche auch der Curve χ angehören, desgleichen schneiden sich auch φ_2 und Σ_2 in noch s_1 weiteren Punkten

$$v_1 v_2 \ldots v_{s_1},$$

welche ebenfalls der Curve χ angehören. Diese beiden Punktsysteme

$$u_1 u_2 \ldots u_{s_1}$$
$$v_1 v_2 \ldots v_{s_1}$$

müssen construirt werden. Ist dies geschehen, so ist auch die Curve χ durch die Punkte

$$u_1 u_2 \ldots u_{s_1} v_1 v_2 \ldots v_{s_1}$$

mehr als bestimmt und ihre weiteren Schnittpunkte mit Σ_1 oder Σ_2, welche ebenfalls zu construiren sind, geben die gesuchten Punkte

$$\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{s-1}$$

in welchen sich Σ_1 und Σ_2 ausser

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$$

noch weiter schneiden. Unsere Aufgabe ist damit vollständig gelöst.

Schliesslich noch die Bemerkung. Wenn die Zahl der unbekannten Durchschnittspunkte von K und $\mathfrak{K}$ geringer als $p = \frac{1}{2} n(n-1) + 1$ ist, so dass z. B. zwei Curven Σ_3 und Σ_4 der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung durch dieselben gelegt werden können, so lassen sich diese beiden Curven Σ_3 und Σ_4 in gleicher Weise aus Σ_1 und Σ_2 ableiten, wie vorhin Σ_1 und Σ_2 aus K und $\mathfrak{K}$. Unter Umständen kann dann die Reduction noch weiter fortgesetzt werden etc.

Besonderer Fall.

K und $\mathfrak{K}$ seien zwei Curven der vierten Ordnung.

Das soeben gelöste Problem lautet für den besonderen Fall, wenn K und $\mathfrak{K}$ zwei Curven der vierten Ordnung darstellen, wie folgt:

Wenn in einer Ebene zwei Curven K und $\mathfrak{K}$ der vierten Ordnung gegeben sind, nämlich K durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \; \alpha_1 \alpha_2 \; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$$

und $\mathfrak{K}$ durch die Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7 \; \alpha_1 \alpha_2 \; a_1' a_2' a_3' a_4' a_5',$$

so sollen die noch übrigen sieben unbekannten Durchschnittspunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_7$$

dieser beiden Curven construirt werden.

Wir betrachten diese Aufgabe als gelöst, wenn es gelingt, zwei Curven Σ_1 und Σ_2 der dritten Ordnung anzugeben, die sich in den sieben unbekannten Durchschnittspunkten

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$$

von K und $\mathfrak{K}$ schneiden und deren zwei weitere Schnittpunkte ϱ_1 und ϱ_2 getrennt construirt werden können.

Was den ersten Theil, nämlich die Construction zweier Curven Σ_1 und Σ_2 anbetrifft, die durch die sieben Schnittpunkte

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$$

von K und $\mathfrak{K}$ gehen, so ergiebt sich die Lösung wie vorhin. Seien nämlich für die Grundpunkte

$$b_1 b_2 \ldots b_7$$

$$P^1, \; P^2, \; P^3; \quad Q_1^1 \,||\, Q_2^1; \quad Q_1^2 \,||\, Q_2^2; \quad Q_1^3 \,||\, Q_2^3$$

die Projectionspunkte und Basisreste der Curve K und

$$\mathfrak{P}^1, \; \mathfrak{P}^2, \; \mathfrak{P}^3; \quad \mathfrak{Q}_1^1 \,||\, \mathfrak{Q}_2^1; \quad \mathfrak{Q}_1^2 \,||\, \mathfrak{Q}_2^2; \quad \mathfrak{Q}_1^3 \,||\, \mathfrak{Q}_2^3$$

die Projectionspunkte und Basisreste der Curve $\mathfrak{K}$, so geht Σ_1 durch die sämmtlichen Projectionspunkte

$$P^1, \; P^2, \; P^3, \; \mathfrak{P}^1, \; \mathfrak{P}^2, \; \mathfrak{P}^3$$

der beiden Curven und kann nach dem vorigen Paragraphen durch ein Strahlenbüschel und projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt werden.

Ebenso seien für die Grundpunkte

$$\alpha_1 \alpha_2 b_3 b_4 \ldots b_7$$

$$p^1, \; p^2, \; p^3; \quad q_1^1 \,||\, q_2^1; \quad q_1^2 \,||\, q_2^2; \quad q_1^3 \,||\, q_2^3$$

die Projectionspunkte und Basisreste der Curve K und

$$\mathfrak{p}^1, \; \mathfrak{p}^2, \; \mathfrak{p}^3; \quad \mathfrak{q}_1^1 \,||\, \mathfrak{q}_2^1; \quad \mathfrak{q}_1^2 \,||\, \mathfrak{q}_2^2; \quad \mathfrak{q}_1^3 \,||\, \mathfrak{q}_2^3$$

die Projectionspunkte und Basisreste der Curve $\mathfrak{K}$, so geht die Curve Σ_2 durch die Projectionspunkte

$$p^1, \; p^2, \; p^3, \; \mathfrak{p}^1, \; \mathfrak{p}^2, \; \mathfrak{p}^3$$

und kann ebenfalls durch ein Kegelschnittbüschel und projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden.

Es bleibt demnach nur noch der zweite Theil der Aufgabe zu lösen, nämlich: die Construction der beiden Punkte ϱ_1 und ϱ_2, in welchen sich die beiden Curven Σ_1 und Σ_2 ausser in

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$$

noch weiter schneiden.

Die beiden Punkte ϱ_1 und ϱ_2 liegen auf einer Geraden χ; ferner bestimmen die beiden Curven Σ_1 und Σ_2 ein Curvenbüschel der dritten Ordnung, dessen sieben Basispunkte (Grundpunkte)

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_7$$

auf die Curven K und $\mathfrak{K}$ fallen, weshalb die in § 6 Seite 225 gefundenen Eigenschaften hier zu beachten sind. Nach diesen schneidet der Kegelschnitt, der durch die fünf Punkte

$$p^1\, p^2\, p^3\, \alpha_1\, \alpha_2$$

bestimmt wird, die Curve Σ_1 noch in einem sechsten Punkte u_1, der auf die Gerade χ fällt und mittelst des Lineals allein construirt werden kann. Aus demselben Grunde schneidet der Kegelschnitt

$$p^1\, p^2\, p^3\, b_1\, b_2$$

die Curve Σ_2 in noch einem sechsten Punkte v_1, der ebenfalls auf die Gerade χ fällt und mittelst des Lineals allein construirt werden kann. Sind die Punkte u_1 und v_1 gefunden, so ist die Gerade χ bestimmt, und ihre zwei weiteren Schnittpunkte mit Σ_1 oder Σ_2 geben alsdann die gesuchten Punkte ϱ_1 und ϱ_2. Die Aufgabe ist somit gelöst.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ueber die harmonische Reihe. Bekanntlich hat Lejeune Dirichlet in den Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1837 nachgewiesen, dass es bei unendlichen Reihen nicht immer erlaubt ist, die einmal vorhandene Anordnung der Glieder willkürlich abzuändern, und dass z. B. die beiden Reihen

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots,$$

obschon sie dieselben Glieder enthalten, verschiedene Summen besitzen, nämlich $l2$ und $\frac{3}{2}l2$*). Dieses Resultat gestattet eine doppelte Verallgemeinerung, indem man einerseits von der allgemeineren harmonischen Reihe

$$S=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\ldots$$

ausgeht, und andererseits, statt zweier positiven und eines negativen Termes, p positive und q negative Terme aufeinander folgen lässt, so dass die neue Reihe folgende ist

---

*) Wenn es nur auf den Beweis ankommt, dass die zweite Reihe eine grössere Summe als die erste liefert, so genügt die Zusammenziehung je zwei positiver Terme. In der so entstehenden Reihe

$$\frac{4}{1.3}-\frac{1}{2}+\frac{12}{5.7}-\frac{1}{4}+\frac{20}{9.11}-\frac{1}{6}+\ldots$$

ist nämlich jeder Term grösser als der nachfolgende, mithin die Summe

$$<\frac{4}{3} \text{ aber } >\frac{4}{3}-\frac{1}{2}>0{,}8,$$

während $l2$ noch unter 0,7 liegt.

$$T=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+4}+\dots+\frac{1}{a+2p-2}$$
$$-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+3}-\dots-\frac{1}{a+2q-1}$$
$$+\frac{1}{a+2p}+\frac{1}{a+2p+2}+\dots+\frac{1}{a+4p-2}$$
$$-\frac{1}{a+2q+1}-\frac{1}{a+2q+3}-\dots-\frac{1}{a+4q-1}$$
$$+\frac{1}{a+4p}+\frac{1}{a+4p+2}+\dots+\frac{1}{a+6p-2}$$
$$-\frac{1}{a+4q+1}-\frac{1}{a+4q+3}-\dots-\frac{1}{a+6q-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mit Hilfe der Formel

$$1)\qquad \frac{1}{k}=\int_0^1 x^{k-1}\,dx,\qquad k>0$$

findet man zunächst, wie längst bekannt ist,

$$2)\qquad S=\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx.$$

Bezeichnet T_n die Summe von np positiven und nq negativen Gliedern der zweiten Reihe, also die Summe der endlichen Reihe, welche mit folgenden zwei Gruppen aufhört

$$+\frac{1}{a+(2n-2)p}+\frac{1}{a+(2n-2)p+2}+\dots+\frac{1}{a+2np-2}$$
$$-\frac{1}{a+(2n-2)q+1}-\frac{1}{a+(2n-2)q+3}-\dots-\frac{1}{a+2nq-1},$$

so erhält man gleichfalls nach No. 1)

$$T_n=\int_0^1\left\{\frac{1-x^{2np}}{1-x^2}-\frac{x(1-x^{2nq})}{1-x^2}\right\}x^{a-1}\,dx$$
$$=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx+\int_0^1\frac{x^{2nq+1}-x^{2np}}{1-x^2}\,x^{a-1}\,dx$$

oder wenn im zweiten Integrale $x^{2n}=y$ gesetzt wird,

$$T_n=\int_0^1\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{y^{q+\frac{1}{2n}}-y^p}{n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)}\,y^{\frac{a}{2n}-1}\,dy.$$

Durch Uebergang zur Grenze für unendlich wachsende n folgt

$$T = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{y^q - y^p}{l\left(\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{dy}{y};$$

das zweite Integral geht für $y = e^{-z}$ über in

$$\int_0^\infty \frac{e^{-qz} - e^{-pz}}{z}\,dz = l\left(\frac{p}{q}\right),$$

mithin ist

$$3)\qquad T = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx + \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Um das Resultat etwas bequemer zu formuliren, lassen wir $\frac{a}{b}$ an die Stelle von a, sowie x^b an die Stelle von b treten; es ergiebt sich dann folgender Satz:

Wenn man in der Reihe

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{1}{a+3b} + \ldots,$$

deren Summe durch das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx$$

ausgedrückt wird, die Terme so ordnet, dass immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx + \frac{1}{2b}\,l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Nur im Falle $p = q$ verschwindet die Differenz beider Summen; ausserdem ist sie zwar von b, nicht aber von a abhängig.

Hiernach findet man z. B. für

$$a = 1,\quad b = 1,\quad p = 2,\quad q = 1$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3}{2}\,l2,$$

für $p = 3,\ q = 1$,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \ldots = l2 + \frac{1}{2}\,l3,$$

für $p = 3,\ q = 2$,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{2}\,l6;$$

für $a = 1,\ b = 2,\ p = 2,\ q = 1$,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} - \frac{1}{7} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21} - \frac{1}{11} + \ldots = \frac{1}{4}\,(\pi + l2)$$

u. s. w.

Von der bekannten Formel

$$\frac{1}{k^\mu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 x^{k-1}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{\mu-1}dx$$

ausgehend, kann man ebenso leicht die allgemeinere Reihe

$$\frac{1}{a^\mu}-\frac{1}{(a+1)^\mu}+\frac{1}{(a+2)^\mu}-\frac{1}{(a+3)^\mu}+\ldots,\quad \mu>0$$

mit derjenigen Reihe vergleichen, welche hieraus entsteht, wenn man immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen lässt. Der Unterschied beider Reihensummen ist dann die Grenze, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{1}{2\Gamma(\mu)}\cdot\frac{1}{(2n)^{\mu-1}}\int_0^1\frac{y^{q+\frac{1}{2n}}-y^p}{n\left(1-y^{\frac{1}{n}}\right)}y^{\frac{a}{2n}-1}\left[l\left(\frac{1}{y}\right)\right]^{\mu-1}dy$$

bei unendlich wachsenden n nähert. Im Falle $\mu>1$ ist dieser Grenzwerth $=0$; die ursprüngliche Reihe convergirt dann unbedingt, wie auch aus dem Scheibner'schen Satze*) hervorgeht. Für $\mu=1$ kommt man auf die vorige Untersuchung zurück; ist aber μ ein positiver echter Bruch, so wird der obige Grenzwerth unendlich gross, und dann divergirt die neue Reihe. Für den speciellen Werth $\mu=\frac{1}{2}$ habe ich dies auf elementarem Wege gezeigt im VII. Jahrgang dieser Zeitschrift Seite 283.

SCHLÖMILCH.

X. Die constanten Relationen bei den Dreiecken und tetraedrischen Coordinaten. Von JULIUS TOEPLITZ, Gymnasiallehrer zu Lissa.

Unter den homogenen Coordinatensystemen sind besonders diejenigen von den Geometern mit Vorliebe behandelt worden, in denen Verhältnisse von Perpendikeln als Coordinaten auftreten. So wird in der Ebene ein Punkt durch die Verhältnisse der drei Perpendikel, welche von demselben auf die Seiten eines gegebenen sogenannten Fundamentaldreiecks gefällt werden, bestimmt, und ebenso eine Gerade durch die Verhältnisse der Perpendikel, welche von den Ecken des Fundamentaldreiecks auf diese Gerade gezogen werden. Ebenso werden im Raume Punkte und Ebenen durch die Verhältnisse der Perpendikel bestimmt, welche entweder von dem Punkte auf die Seitenebenen eines gegebenen Fundamentaltetraeders, oder von den Ecken des letzteren auf die Ebene gezogen werden. Diese Verhältnisse sind zur Bestimmung der Lage der Punkte, Geraden und Ebenen ausreichend, weil zwischen den Perpendikeln ausserdem immer constante Relationen stattfinden. Diese constanten Relationen wollen wir im Folgenden feststellen.

*) Vergl. mein Compendium der höheren Analysis, § 39.

§ 1.

Constante Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes in der Ebene.

Das Fundamentaldreieck heisse ABC. Die Perpendikel, welche von einem beliebigen Punkte O auf die Seiten

$$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c$$

desselben gefällt werden, mögen durch p, q, r bezeichnet werden, und der Inhalt des Fundamentaldreiecks mit $\triangle$. Alsdann ist

$$\triangle OBC + \triangle OAC + \triangle OAB = \triangle ABC,$$

oder

$$1) \qquad ap + bq + cr = 2\triangle$$

(cf. Salmon, Kegelschnitte § 63)

die gesuchte Relation. Für die Zeichen, mit denen p, q, r zu versehen sind, gelten die bekannten Regeln.

§ 2.

Constante Relation zwischen den Coordinaten einer Geraden in der Ebene.

Es sei wieder ABC das Fundamentaldreieck. Die Perpendikel, welche von den Ecken A, B, C desselben auf eine beliebige Gerade gefällt werden, mögen p, q, r heissen. Die Gleichung dieser Geraden in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten sei

$$y = ax + b,$$

und die Coordinaten der Ecken A, B, C resp.

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3.$$

Alsdann ist bekanntlich:

$$\frac{y_1 - ax_1 - b}{\sqrt{1+a^2}} = p, \quad \frac{y_2 - ax_2 - b}{\sqrt{1+a^2}} = q, \quad \frac{y_3 - ax_3 - b}{\sqrt{1+a^2}} = r.$$

Aus diesen Gleichungen müssen wir a und b eliminiren, um die gesuchte Relation zu erhalten. Durch Subtraction erhalten wir zunächst:

$$y_1 - y_2 - a(x_1 - x_2) = (p-q)\sqrt{1+a^2}, \quad y_2 - y_3 - a(x_2 - x_3) = (q-r)\sqrt{1+a^2}$$

oder

$$2) \qquad \alpha_1 - a\beta_1 = \gamma_1\sqrt{1+a^2}, \quad \alpha_2 - a\beta_2 = \gamma_2\sqrt{1+a^2},$$

wenn wir nämlich

$$y_1 - y_2 = \alpha_1, \quad y_2 - y_3 = \alpha_2, \quad x_1 - x_2 = \beta_1, \quad x_2 - x_3 = \beta_2, \quad p - q = \gamma_1, \quad q - r = \gamma_2$$

setzen. Durch Division kommt:

$$\frac{\alpha_1 - a\beta_1}{\alpha_2 - a\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad \text{oder } a = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_1 - a\beta_1 = \frac{-\gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}{\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1}.$$

Setzen wir diese Werthe in die erste der Gleichungen 2) und quadriren die Gleichung, so erhalten wir:

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2=(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2+(\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1)^2.$$

Wir werden diese Gleichung nicht entwickeln, sondern blos ihre Form betrachten. Dividiren wir beide Seiten der Gleichung mit dem constanten Gliede $(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$, so erhält die gesuchte Relation die Form:

$$a_1\gamma_1^2+a_2\gamma_2^2+b_1\gamma_1\gamma_2=1,$$

oder:

$$3)\qquad a_1(p-q)^2+a_2(q-r)^2+b_1(p-q)(q-r)=1.$$

Die constanten Coefficienten a_1, a_2, b_1 bestimmen wir auf folgende Weise. Die Lage der betrachteten geraden Linie ist eine beliebige. Wir lassen sie daher mit der Seite BC des Fundamentaldreiecks zusammenfallen, dessen drei von A, B, C aus gezogene Höhen wir durch h_1, h_2, h_3 bezeichnen. Alsdann ist

$$p=h_1,\quad q=r=0.$$

Also ergiebt die Gleichung 3):

$$a_1h_1^2=1.$$

Lassen wir die Gerade mit der Seite AC zusammenfallen, so ist:

$$q=h_2,\quad p=r=0,$$

und die Gleichung 3) ergiebt:

$$(a_1+a_2-b_1)\,h_2^2=1.$$

Lassen wir endlich die Gerade mit der Seite AB zusammenfallen, so ist:

$$p=q=0\ \text{ und }\ r=h_3;$$

und die Gleichung 3) giebt:

$$a_2h_3^2=1.$$

Also ist:

$$a_1=\frac{1}{h_1^2},\quad a_2=\frac{1}{h_3^2}\ \text{ und }\ b_1=\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}.$$

Entwickeln wir die Gleichung 3), so erhalten wir:

$$a_1p^2+(a_1+a_2-b_1)q^2+a_2r^2+(b_1-2a_1)pq-b_1pr+(b_1-2a_2)qr=1.$$

Setzen wir die gefundenen Werthe für a_1, a_2, b_1 ein, so erhalten wir die gesuchte Relation in folgender Form:

$$4)\quad \frac{1}{h_1^2}p^2+\frac{1}{h_2^2}q^2+\frac{1}{h_3^2}r^2+\left(\frac{1}{h_3^2}-\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)pq+\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_3^2}\right)pr$$
$$+\left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}+\frac{1}{h_3^2}\right)qr=1.$$

Wir können dieser Relation eine andere Form geben, wenn wir sie mit

$$4\triangle^2=a^2h_1^2=b^2h_2^2=c^2h_3^2$$

multipliciren, wo a, b, c die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks sind. Alsdann erhalten wir:

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &a^2p^2+b^2q^2+c^2r^2+(c^2-a^2-b^2)pq+(b^2-a^2-c^2)pr\\ &\qquad+(a^2-b^2-c^2)qr=4\triangle^2.\end{aligned}\right.$$

(cf. Salmon, Kegelschnitte § 316).

§ 3.
Constante Relation zwischen den Coordinaten eines Punktes im Raume.

Das Fundamentaltetraeder heisse $ABCD$. Die Perpendikel, welche von einem beliebigen Punkte o auf die Seitenflächen

$$BCD=a,\quad ACD=b,\quad ABD=c,\quad ABC=d$$

gefällt werden, mögen mit p, q, r, s bezeichnet werden, und der Inhalt des Tetraeders $ABCD$ mit T. Alsdann ist die Summe der vier Tetraeder

$$OBCD,\quad OACD,\quad OABD,\quad OABC$$

gleich dem Fundamentaltetraeder T. Also erhalten wir für die gesuchte Relation

$$6)\qquad ap+bq+cr+ds=3T.$$

§ 4.
Constante Relation zwischen den Coordinaten einer Ebene im Raume.

Es sei wieder $ABCD$ das Fundamentaltetraeder. Die Perpendikel, welche von den Ecken A, B, C, D desselben auf eine beliebige Ebene gefällt werden, mögen durch p, q, r, s bezeichnet werden. Die Gleichung dieser Ebene in gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten sei:

$$z=ax+by+c,$$

und die Coordinaten der Ecken A, B, C, D resp.

$$x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\quad x_4,\ y_4,\ z_4.$$

Alsdann ist bekanntlich:

$$\frac{z_1-ax_1-by_1-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=p,\quad \frac{z_2-ax_2-by_2-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=q,$$
$$\frac{z_3-ax_3-by_3-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=r,\quad \frac{z_4+ax_4-by_4-c}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=s.$$

Wir erhalten die gewünschte Relation, wenn wir zwischen diesen Gleichungen a, b und c eliminiren. Durch Subtraction erhalten wir zunächst:

$$z_1-z_2-a(x_1-x_2)-b(y_1-y_2)=(p-q)\sqrt{1+a^2+b^2},$$
$$z_2-z_3-a(x_2-x_3)-b(y_2-y_3)=(q-r)\sqrt{1+a^2+b^2},$$
$$z_3-z_4-a(x_3-x_4)-b(y_3-y_4)=(r-s)\sqrt{1+a^2+b^2},$$

oder

$$7)\quad \begin{cases}\gamma_1-\alpha_1 a-\beta_1 b=\delta_1\sqrt{1+a^2+b^2},\quad \gamma_2-\alpha_2 a-\beta_2 b=\delta_2\sqrt{1+a^2+b^2},\\ \gamma_3-\alpha_3 a-\beta_3 b=\delta_3\sqrt{1+a^2+b^2},\end{cases}$$

wenn wir nämlich:

$$x_1-x_2=\alpha_1,\quad x_2-x_3=\alpha_2,\quad x_3-x_4=\alpha_3,$$
$$y_1-y_2=\beta_1,\quad y_2-y_3=\beta_2,\quad y_3-y_4=\beta_3,$$
$$z_1-z_2=\gamma_1,\quad z_2-z_3=\gamma_2,\quad z_3-z_4=\gamma_3.$$
$$p-q=\delta_1,\quad q-r=\delta_2,\quad r-s=\delta_3$$

setzen.

Durch Division erhalten wir:

$$\frac{\gamma_1-\alpha_1 a-\beta_1 b}{\gamma_2-\alpha_2 a-\beta_2 b}=\frac{\delta_1}{\delta_2},\quad \frac{\gamma_2-\alpha_2 a-\beta_2 b}{\gamma_3-\alpha_3 a-\beta_3 b}=\frac{\delta_2}{\delta_3}.$$

Wir schreiben für die Determinante $\gamma_1\delta_2-\gamma_2\delta_1$ der Abkürzung wegen $(\gamma_1\delta_2)$. Alsdann lauten die obigen beiden Gleichungen:

$$(\gamma_1\delta_2)-a(\alpha_1\delta_2)-b(\beta_1\delta_2)=0,\quad (\gamma_2\delta_3)-a(\alpha_2\delta_3)-b(\beta_2\delta_3)=0.$$

Daraus finden wir:

$$a=\frac{(\gamma_1\delta_2)(\beta_2\delta_3)-(\gamma_2\delta_3)(\beta_1\delta_2)}{(\alpha_1\delta_2)(\beta_2\delta_3)-(\alpha_2\delta_3)(\beta_1\delta_2)},\quad b=\frac{(\gamma_2\delta_3)(\alpha_1\delta_2)-(\gamma_1\delta_2)(\alpha_2\delta_3)}{(\alpha_1\delta_2)(\beta_2\delta_3)-(\alpha_2\delta_3)\beta_1\delta_2)}.$$

Nun ist leicht auszurechnen, dass:

$$(\alpha_1\delta_2)(\beta_2\delta_3)-(\alpha_2\delta_3)(\beta_1\delta_2)=\delta_2\{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)\},$$
$$(\gamma_1\delta_2)(\beta_2\delta_3)-(\gamma_2\delta_3)(\beta_1\delta_2)=\delta_2\{\delta_1(\gamma_2\beta_3)+\delta_2(\gamma_3\beta_1)+\delta_3(\gamma_1\beta_2)\},$$
$$(\gamma_2\delta_3)(\alpha_1\delta_2)-(\gamma_1\delta_2)(\alpha_2\delta_3)=\delta_2\{\delta_1(\alpha_2\gamma_3)+\delta_2(\alpha_3\gamma_1)+\delta_3(\alpha_1\gamma_2)\}.$$

Also ist:

$$a=\frac{\delta_1(\gamma_2\beta_3)+\delta_2(\gamma_3\beta_1)+\delta_3(\gamma_1\beta_2)}{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)},$$
$$b=\frac{\delta_1(\alpha_2\gamma_3)+\delta_2(\alpha_3\gamma_1)+\delta_3(\alpha_1\gamma_2)}{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)}.$$

Setzen wir diese Werthe in die erste der Gleichungen 7) ein, quadriren diese, und multipliciren sie mit

$$\{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)\}^2,$$

so erhalten wir

$$M^2=\delta_1^2 N,$$

wo

$$M=\gamma_1\{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)\}-\alpha_1\{\delta_1(\gamma_2\beta_3)+\delta_2(\gamma_3\beta_1)+\delta_3(\gamma_1\beta_2)\}$$
$$-\beta_1\{\delta_1(\alpha_2\gamma_3)+\delta_2(\alpha_3\gamma_1)+\delta_3(\alpha_1\gamma_2)\}$$

und

$$N=\{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)\}^2+\{\delta_1(\gamma_2\beta_3)+\delta_2(\gamma_3\beta_1)+\delta_3(\gamma_1\beta_2)\}^2$$
$$+\{\delta_1(\alpha_2\gamma_3)+\delta_2(\alpha_3\gamma_1)+\delta_3(\alpha_1\gamma_2)\}^2.$$

Man sieht aber leicht, dass

$$M=\delta_1\{\alpha_1(\beta_2\gamma_3)+\beta_1(\gamma_2\alpha_3)+\gamma_1(\alpha_2\beta_3)\};$$

denn die Glieder mit δ_2 und δ_3 heben sich, da

$$\gamma_1(\alpha_3\beta_1)-\alpha_1(\gamma_3\beta_1)-\beta_1(\alpha_3\gamma_1)=\alpha_3\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_3$$
$$+\alpha_1\beta_3\gamma_1-\alpha_3\beta_1\gamma_1+\alpha_1\beta_1\gamma_3=0$$

und

$$\gamma_1(\alpha_1\beta_2)-\alpha_1(\gamma_1\beta_2)-\beta_1(\alpha_1\gamma_2)=\alpha_1\beta_2\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_2\gamma_1$$
$$+\alpha_1\beta_1\gamma_2-\alpha_1\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_1\gamma_1=0.$$

Also ist die gesuchte Relation folgende:

$$\{\alpha_1(\beta_2\gamma_3)+\beta_1(\gamma_2\alpha_3)+\gamma_1(\alpha_2\beta_3)\}^2=\{\delta_1(\alpha_2\beta_3)+\delta_2(\alpha_3\beta_1)+\delta_3(\alpha_1\beta_2)\}^2$$
$$+\{\delta_1(\gamma_2\beta_3)+\delta_2(\gamma_3\beta_1)+\delta_3(\gamma_1\beta_2)\}^2+\{\delta_1(\alpha_2\gamma_3)+\delta_2(\alpha_3\gamma_1)+\delta_3(\alpha_1\gamma_2)\}^2.$$

Dividiren wir diese Gleichung mit dem constanten Gliede der linken Seite, so sehen wir, dass die gesuchte Relation folgende Form hat:

$$a_1\delta_1^2+a_2\delta_2^2+a_3\delta_3^2+b_1\delta_2\delta_3+b_2\delta_1\delta_3+b_3\delta_1\delta_2=1,$$

oder endlich

$$8)\quad \begin{cases} a_1(p-q)^2+a_2(q-r)^2+a_3(r-s)^2+b_1(q-r)(r-s)+b_2(p-q)(r-s) \\ \qquad\qquad\qquad +b_3(p-q)(q-r)=1. \end{cases}$$

Die Constanten

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3$$

bestimmen wir nach der in § 2 angewendeten Methode. Wir nennen die vier Höhen des Fundamentaltetraeders, welche resp. von den Ecken A, B, C, D ausgehen:

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4;$$

ferner e_1, die kürzeste Entfernung der gegenüberliegenden Kanten AB und CD, e_2 die der Kanten AC und BD, e_3 die der Kanten AD und BC. Lassen wir nun unsere Ebene mit der Fläche BCD zusammenfallen, so ist:

$$p=h_1,\quad q=r=s=0;$$

wir erhalten also aus der Gleichung 8):

$$1')\qquad a_1\,.\,h_1^2=1.$$

Lassen wir unsere Ebene mit der Fläche ACD zusammenfallen, so ist

$$p=r=s=0,\quad q=h_2;$$

dann folgt aus der Gleichung 8).

$$2')\qquad (a_1+a_2-b_3)h_2^2=1.$$

Lassen wir unsere Ebene mit der Fläche ABD zusammenfallen, so ist

$$p=q=s=0,\quad r=h_3;$$

dann giebt die Gleichung 8):

$$3')\qquad (a_2+a_3-b_1)\,h_3^2=1.$$

Lassen wir endlich unsere Ebene mit der Fläche ABC zusammenfallen, so ist:

$$p=q=r=0,\quad s=h_4,$$

und die Gleichung 8) giebt:

$$4')\qquad a_3\,.\,h_4^2=1.$$

Legen wir ferner unsere Ebene durch die Kante AB parallel zur Kante CD, so ist:

$$p=q=0,\quad r=s=e_1;$$

alsdann giebt die Gleichung 8):

$$5')\qquad a_2\,.\,e_1^2=1.$$

Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn wir die Ebene durch die Kante CD parallel zur Kante AB legten.

Legen wir unsere Ebene durch die Kante AC parallel zur Kante BD, so ist:

$$p=r=0,\quad q=s=e_2;$$

die Gleichung 8) giebt dann:

$$6')\qquad (a_1+a_2+a_3-b_1+b_2-b_3)\,e_2^2=1.$$

Legen wir endlich unsere Ebene durch die Kante AD parallel zur Kante BC, so ist:

$$p=s=0,\quad q=r=e_3,$$

und die Gleichung 8) giebt:

$$7') \qquad (a_1 + a_3 - b_2)\, e_3^2 = 1.$$

Wir haben hier zur Bestimmung der 6 Coefficienten

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3.$$

7 Gleichungen. Diese werden uns also nicht blos die Werthe der 6 Coefficienten

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3,$$

sondern ausserdem eine bemerkenswerthe Relation zwischen

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ e_1,\ e_2,\ e_3$$

ergeben.

Aus 1') erhalten wir:

$$a_1 = \frac{1}{h_1^2};$$

aus 5'):

$$a_2 = \frac{1}{e_1^2};$$

aus 4'):

$$a_3 = \frac{1}{h_4^2};$$

aus 3'):

$$b_1 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{h_4^2} - \frac{1}{h_3^2};$$

aus 7'):

$$b_2 = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_4^2} - \frac{1}{e_3^2};$$

aus 2'):

$$b_3 = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{h_2^2}.$$

Setzen wir diese Werthe in 6') ein, so erhalten wir die bemerkenswerthe Relation:

$$9) \qquad \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2} = \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + \frac{1}{e_3^2};$$

d. h.

> „Die Summe der Quadrate der reciproken Höhen eines Tetraeders ist gleich der Summe der Quadrate der reciproken kürzesten Entfernungen der gegenüberliegenden Kanten.“

Die Gleichung 8) entwickeln wir nach p, q, r, s, und wir erhalten:

$$a_1 p^2 + (a_1 + a_2 - b_3) q^2 + (a_2 + a_3 - b_1) r^2 + a_3 s^2 + (b_3 - 2a_1) pq$$
$$+ (b_2 - b_3) pr - b_2 ps + (b_1 - b_2 + b_3 - 2a_2) qr + (b_2 - b_1) qs$$
$$+ (b_1 - 2a_3) rs = 1;$$

oder mit Hilfe der Gleichungen 1') bis 7'):

$$\frac{1}{h_1^2} p^2 + \frac{1}{h_2^2} q^2 + \frac{1}{h_3^2} r^2 + \frac{1}{h_4^2} s^2 + \left(\frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right) pq$$
$$+ \left(\frac{1}{h_4^2} + \frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{e_3^2}\right) pr + \left(\frac{1}{e_3^2} - \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) ps$$
$$+ \left(\frac{1}{e_3^2} - \frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_3^2}\right) qr + \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_3^2} - \frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{e_3^2}\right) qs$$
$$+ \left(\frac{1}{e_1^2} - \frac{1}{h_3^2} - \frac{1}{h_4^2}\right) rs = 1.$$

Bedenken wir noch, dass nach 9):

$$\frac{1}{k_4^2}+\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{e_3^2}-\frac{1}{e_1^2}=\frac{1}{e_2^2}-\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_3^2}$$

und

$$\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_3^2}-\frac{1}{e_1^2}-\frac{1}{e_3^2}=\frac{1}{e_2^2}-\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_4^2},$$

so erhalten wir für die gesuchte Relation:

$$11) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{k_1^2}p^2+\frac{1}{k_2^2}q^2+\frac{1}{k_3^2}r^2+\frac{1}{k_4^2}s^2+\left(\frac{1}{e_1^2}-\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_2^2}\right)pq \\ &\quad+\left(\frac{1}{e_2^2}-\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_3^2}\right)pr+\left(\frac{1}{e_3^2}-\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_4^2}\right)ps \\ &\quad+\left(\frac{1}{e_3^2}-\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_3^2}\right)qr+\left(\frac{1}{e_2^2}-\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_4^2}\right)qs \\ &\quad+\left(\frac{1}{e_1^2}-\frac{1}{k_3^2}-\frac{1}{k_4^2}\right)rs=1. \end{aligned} \right.$$

X.

Zur Geschichte des Mac Laurin'schen Satzes, betreffend die Anziehung confocaler Ellipsoide.

Von

Dr. F. Grube in Hamburg.

(Hierzu Tafel V, Fig. 1).

Nach dem bekannten Mac Laurin'schen Satze über die Anziehung confocaler Ellipsoide sind die Kräfte, mit denen confocale Ellipsoide einen und denselben äusseren Punkt anziehen, ihren Massen proportional. Für den speciellen Fall, dass der angezogene Punkt auf einer der Axen der confocalen Ellipsoide liegt, hat schon Mac Laurin selbst diesen Satz aufgestellt in seinem „*Treatise of fluxions*“ 1743, *art.* 653. Der Zweck dieser Zeilen ist, nachzuweisen, dass Mac Laurin für den erwähnten speciellen Fall den Satz nicht blos ausgesprochen, sondern auch bewiesen hat.

So viel mir bekannt, sprechen nämlich alle Schriftsteller, die diesen Gegenstand berühren (d'Alembert, Lagrange, Legendre, Ramus), Mac Laurin den Beweis dieses Satzes geradezu ab, indem sie behaupten, er habe den Satz nur ausgesprochen, nicht bewiesen.

D'Alembert, der anfangs sogar die Richtigkeit des Mac Laurin'schen Satzes bezweifelte, sagt (*Opuscules math. T. VI, art.* 54): *Je soupçonne donc que M. Mac Laurin s'est trompé dans l'art.* 653 *de son „Traité des fluxions“, quand il a dit que sa méthode pour trouver l'attraction d'un sphéroide de révolution dans le plan de l'équateur, ou dans l'axe, pouvait s'appliquer à un solide qui ne serait pas de révolution. Au reste ce n'est ici qu'un doute que je propose, n'ayant pas suffisament examiné la proposition de M. Mac Laurin, qu'il se contente d'énoncer sans la démontrer.*

Lagrange sagt am Schluss seines Beweises des in Rede stehenden Satzes (*Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin* 1775): *C'est le théoreme que M. Mac Laurin a énoncé sans demonstration dans l'Art.* 653 *de son Traité des fluxions.*

Legendre (*Mém. de math. et de phys. présentés à l'Académie par divers savans, Paris* 1785) äussert sich in folgender Weise: *Cela se trouve compris*

dans un théorême remarquable dont M. Mac Laurin donne l'énoncé art. **653** *de son Traité de fluxions, théorême dont MM. d'Alembert et de Lagrange ont donné depuis la démonstration.*

Ramus sagt in seiner Abhandlung „*om Ellipsoiders Tilträkning etc.*" 1846: „*Dette Theorem fremsat af Mac Laurin uden Beviis.*"

Ich muss aber dennoch, den genannten Schriftstellern gegenüber, auch den Beweis dieses Satzes für Mac Laurin in Anspruch nehmen. Um meine Behauptung zu rechtfertigen, theile ich zunächst die Artikel 649 und 651 aus Mac Laurin's *Treatise of fluxions* ihrem Inhalte nach, und den Artikel 653 wörtlich mit.

Art. 649.

In diesem Artikel beweist Mac Laurin folgenden Satz:

> Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide denselben auf ihrer verlängerten Rotationsaxe liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen.

Art. 651.

> Die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide denselben in der verlängerten Ebene ihres Aequators liegenden Punkt anziehen, verhalten sich wie ihre Massen.

Beweis.

Durch Rotation der confocalen Ellipsen adb, ADB (Fig. 1) um eine ihrer Axen ab seien zwei Ellipsoide erzeugt. Es stehe CP senkrecht auf der Meridianebene adb in dem gemeinsamen Mittelpunkt C der beiden erzeugenden Ellipsen, und treffe den Umfang des Aequators des äusseren Ellipsoides in P, und den des innern in p. Durch CP seien zwei Ebenen OCZ, pCV, die die Meridianebene in CZ, CV schneiden mögen, so gelegt, dass die von Z und V auf die Axe Cd gefällten Lothe Zr und VR in dem Verhältniss von Ca zu CA zu einander stehen. Dann werden die elliptischen Schnitte PCZ, pCV confocal sein, oder es wird

$$Cp^2 - CV^2 = CP^2 - CZ^2$$

sein.

Um dies zu zeigen, beschreibe man um C als Mittelpunkt mit den Radien Cd und CD zwei Kreise dgh und DGH, die von den Lothen Zr und VR in g und G geschnitten werden mögen. Dann ist

$$1)\quad \begin{cases} gr^2 - Zr^2 = Cd^2 - CZ^2 \\ Ch^2 - Ca^2 = Cd^2 - Ca^2. \end{cases}$$

Ferner ist

$$gr : Zr = Ch : Ca,$$

folglich auch

$$gr - Zr : Zr = Ch - Ca : Ca$$
$$gr + Zr : Zr = Ch + Ca : Ca,$$

woraus

$$gr^2 - Zr^2 : Ch^2 - Ca^2 = Zr^2 : Ca^2,$$

oder vermöge 1)

$$Cd^2 - CZ^2 : Cd^2 - Ca^2 = Zr^2 : Ca^2$$

folgt. Auf dieselbe Weise zeigt man, dass

$$CD^2 - CV^2 : CD^2 - CA^2 = VR^2 : CA^2.$$

Es ist aber, weil die erzeugenden Ellipsen aZd und AVD confocal sein sollen,

$$CD^2 - CA^2 = Cd^2 - Ca^2,$$

und, nach der Annahme,

$$Zr^2 : Ca^2 = VR^2 : CA^2;$$

folglich ist auch

$$CD^2 - CV^2 = Cd^2 - CZ^2,$$

woraus, da $Cp = CD$ und $CP = Cd$, auch die Gleichheit von $Cp^2 - CV^2$ und $CP^2 - CZ^2$ folgt.

Man lege nun durch CP noch zwei Ebenen, PCz, pCv, die mit den beiden ersten unendlich kleine Winkel bilden, aber wieder so, dass die von z und v auf Cd gefällten Lothe sich verhalten wie Ca zu CA. Weil die Ellipsen pCV, PCZ, wie eben bewiesen, confocal sind, so verhält sich, nach Art. 649, die Anziehung, die der zwischen den Ebenen PCZ, PCz eingeschlossene Theil des äusseren Ellipsoides auf P ausübt, zu der Anziehung, die der zwischen den Ebenen pCV, pCv eingeschlossene Theil des inneren Ellipsoides auf P ausübt, wie

$$CZ^2 . CP . \widehat{ZCz} \text{ zu } CV^2 . Cp . \widehat{VCv},$$

oder, weil die Flächen der Sectoren ZCz und VCv sich verhalten wie die Producte aus den Quadraten ihrer Radien in ihre Winkel $\widehat{ZCz}$, $\widehat{VCv}$, wie

$$CP . ZCz \text{ zu } Cp . VCv.$$

Da aber, nach der Annahme,

$$Zr : VR = Ca : CA,$$

und deshalb

$$Cr : CR = Cd : CD,$$

so verhält sich die Fläche $CaZr$ zur Fläche $CAVR$ wie

$$Ca . Cd \text{ zu } CA . CD;$$

in demselben Verhältniss stehen folglich auch die Sectoren aCZ und ACV, und deren Differentiale ZCz, VCv. Folglich steht die Anziehung, die P erleidet von dem zwischen den Ebenen PCZ, PCz eingeschlossenen Theil des äusseren Ellipsoides, zur Anziehung, die P erleidet von dem zwischen

den Ebenen pCV, pCv eingeschlossenen Theil des inneren Ellipsoides, in dem constanten Verhältniss von

$$CP.Ca.Cd \text{ zu } Cp.CA.CD,$$

oder, da $CP = Cd$, und $Cp = CD$, von

$$Ca.Cd^2 \text{ zu } CA.CD^2,$$

d. h. der Massen der Sphäroide.

Da nun, während CZ den Ellipsenquadranten aCd durchläuft, gleichzeitig CV den Ellipsenquadranten ACD durchläuft, so verhalten sich auch die Kräfte, mit denen P von den ganzen Ellipsoiden angezogen wird, wie die Massen derselben.

Art. 653.

The rest remaining as in art. 651 *suppose the solid not to be a spheroid or* Cp *to be greater or lass than* CD, *but so that the difference of the squares of* Cp *and* CD *to be equal to the difference of the squares of* CP *and* Cd, *that the sections* DpC, dpC *may be still ellipses that have the same center and focus: and if we suppose the sections* PCZ, pCV *to be always ellipses that have* PC *and* CZ, pC *and* CV *for their respective axes, the distances of their foci from the center* C *will be always equal as before: and it will appear in the same manner, that the gravity at* P *towards the external solid will be to the gravity towards the internal solid as* Ca.Cd.CP *to* CA.CD.Cp.

Mac Laurin betrachtet also jetzt zwei confocale dreiaxige Ellipsoide, deren Halbaxen

$$CP, Ca, Cd \text{ und } Cp, CA, CD$$

sind (Fig. 1).

Es ist also, wie vorhin,

$$Cd^2 - Ca^2 = CD^2 - CA^2;$$

aber an die Stelle der Gleichungen:

$$CD = Cp, \quad Cd = CP$$

tritt jetzt die Gleichung

$$2) \qquad Cp^2 - CD^2 = CP^2 - Cd^2.$$

Mac Laurin legt durch CP dieselben beiden Ebenen, PCZ, pCV, wie vorhin, von denen er sagt, „es werden die Entfernungen ihrer Brennpunkte von C immer gleich sein, wie vorhin". Er beweist dies allerdings nicht noch einmal, denn dann hätte er den im Art. 651 gegebenen Beweis wörtlich zu wiederholen gehabt, bis zu der Stelle, „folglich ist auch

$$CD^2 - CV^2 = Cd^2 - CZ^2\text{"};$$

denn alle bis hierher gemachten Schlüsse behalten ihre Giltigkeit, da die Voraussetzungen über den Theil der Figur, der in der Meridianebene adb liegt, ganz dieselben sind wie in Art. 651. Jetzt hätte er allerdings, um aus der Gleichung

3) $$CD^2 - CV^2 = Cd^2 - CZ^2$$

die Gleichung

4) $$Cp^2 - CV^2 = CP^2 - CZ^2$$

herzuleiten, zu 3) die Gleichung 2) addiren müssen, anstatt, wie in Art. 651, zu sagen, 4) folge aus 3), weil

$$Cp = CD \quad \text{und} \quad CP = Cd.$$

Aber aus dem Grunde, dass er diese höchst einfache, sich von selbst ergebende Modification des in Art. 651 gegebenen Beweises dem Leser überlassen, wird man ihm doch den Beweis des Satzes nicht absprechen können und behaupten, er habe den Satz gar nicht bewiesen.

Mac Laurin sagt weiter im Art. 653, nachdem er also hervorgehoben, worauf es ankam, dass nämlich die Ellipsen PCZ, pCV wieder confocal seien, und dass dies ebenso wie vorhin gezeigt werde, „man zeigt auf dieselbe Weise, wie vorhin, dass die Anziehung in P gegen den äusseren Körper sich verhält zur Anziehung in P gegen den inneren Körper, wie

$$Ca \,.\, Cd \,.\, CP \text{ zu } CA \,.\, CD \,.\, Cp.\text{“}$$

Dieser zweite Theil des Beweises ist wörtlich, ohne irgend eine Modification, derselbe, wie in Art. 651.

Es ist hiernach unbegreiflich, wie d'Alembert behaupten konnte, Mac Laurin habe den Satz für das ungleichaxige Ellipsoid im Art. 653 nur ausgesprochen, nicht bewiesen, und die Richtigkeit des Satzes sogar bezweifeln konnte. Durch d'Alembert haben sich offenbar Lagrange, Legendre und Ramus zu derselben Aussage verleiten lassen, ohne die Artikel 651 und 653 genau verfolgt zu haben.

Nach Mac Laurin, dessen Beweis rein synthetisch ist, hat zuerst d'Alembert denselben Satz, und zwar rein analytisch bewiesen (siehe *Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin*, 1774; ausführlicher findet sich derselbe Beweis in seinen *Opusc. math. T. VII*, 1780, wo d'Alembert noch drei andere Beweise desselben Satzes gegeben hat). Nach ihm haben auch Lagrange (*Nouv. mém. de l'Acad. de Berlin*, 1775), und Legendre (*Mém. de math. et de phys. présentés par divers savans*, *Paris* 1785) einen gleichfalls rein analytischen Beweis gegeben.

Der Legendre'sche Beweis hat vor den übrigen den Vorzug, dass er zugleich den absoluten Werth der Anziehung, die ein auf einer der verlängerten Axen eines ungleichaxigen Ellipsoides befindlicher Punkt von demselben erleidet, ausgedrückt durch elliptische Integrale, liefert.

Die allgemeine Giltigkeit seines Satzes ahnte Mac Laurin noch nicht, wie aus Art. 654 deutlich hervorgeht. Daselbst bemerkt er nämlich, dass die Kräfte, mit denen confocale Rotationsellipsoide einen irgendwo ausserhalb ihrer Masse befindlichen Punkt anzögen, sich nahezu wie ihre Massen verhalten würden, wenn die Sphäroide nahezu kugelförmig wären, wie sich aus Art. 653 schliessen liesse.

Für das Rotationsellipsoid hat Legendre zuerst a. a. O. die allgemeine Giltigkeit des Mac Laurin'schen Satzes nachgewiesen, wo er auch schon die Vermuthung ausspricht, dass derselbe auch für das ungleichaxige Ellipsoid für jede Lage des angezogenen Punktes giltig sei. Für letzteres hat Laplace den ersten Beweis der allgemeinen Giltigkeit des Mac Laurin'schen Satzes geliefert (siehe *Histoire de l'Académie des sciences de Paris*, 1782; *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planetes*; *Mécaique céleste T. II.*)

XI.

Ueber die Anziehung der von einer Fläche zweiten Grades und von zwei zu deren Axe senkrechten Ebenen begrenzten Körperstumpfe.

Von

Dr. F. Grube in Schleswig.

Für zwei Massenformen sind die Attractionscomponenten in Bezug auf einen materiellen Punkt bis jetzt durch elliptische Integrale dargestellt, nämlich für die eines vollständigen Ellipsoides und die eines endlichen elliptischen Cylinders. Es schien mir von besonderem Interesse, zu untersuchen, ob die Zurückführung der Componenten auf elliptische Integrale noch für andere Formen der anziehenden Masse von elliptischem oder kreisförmigem Querschnitt möglich sei. Das bemerkenswertheste Resultat, zu dem ich gelangte, ist folgendes:

> Das Problem der Anziehung einer Kugelscheibe, d. h. eines von einer Kugeloberfläche und von zwei parallelen Ebenen begrenzten Körpers, lässt sich vollständig durch die elliptischen Transcendenten lösen.

Das genannte Problem wird den hauptsächlichsten Gegenstand dieses Aufsatzes bilden.

Ausserdem ergab sich, dass die Zurückführung auf elliptische Integrale möglich ist

1) für zwei der Componenten einer paraboloidischen Scheibe, nämlich für die beiden, welche den Hauptaxen ihres elliptischen Querschnittes parallel sind;

2) für die Componenten einer unendlich dünnen Schale, die von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades und von zwei zur Axe derselben senkrechten Ebenen begrenzt ist;

3) für die senkrecht zum Querschnitt gerichtete Componente eines von zwei parallelen Ebenen und von einer centrischen Oberfläche zweiten Grades begrenzten Körpers in dem speciellen Fall, dass der angezogene Punkt in der durch den Mittelpunkt der Fläche senkrecht zu ihrer Axe gelegten Ebene liegt.

Diese Resultate gründen sich auf einen besonderen Ausdruck für das Potential einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe. Man erhält denselben auf ganz demselben Wege, auf welchem Dirichlet zu dem Potential eines Ellipsoides gelangte. Dieser Ausdruck erschien für meinen Zweck ganz besonders geeignet, weil man aus ihm leicht erkennt, wie die einen Körper von elliptischem Querschnitt begrenzende krumme Oberfläche beschaffen sein muss, damit die gewünschte Reduction der Componenten auf elliptische Integrale möglich sei.

Um anzudeuten, dass eine Grösse a gleich sei dem reellen Bestandtheil einer complexen Grösse b, werde ich mich folgender Bezeichnung bedienen:

$$a \parallel b.$$

1.

Das Potential einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe.

Die Halbaxen einer unendlich dünnen elliptischen Scheibe von der Dicke dx seien $\sqrt{pk}$ und $\sqrt{p'k}$, und die Scheibe liege zu drei auf einander senkrechten Coordinatenaxen so, dass ihre Halbaxen $\sqrt{pk}$ und $\sqrt{p'k}$ parallel sind resp. mit der Y- und Z-Axe, und dass die X-Axe durch ihren Mittelpunkt geht. Der Abstand des Anfangspunktes von der Scheibe sei x. Die Coordinaten des angezogenen Punktes in Bezug auf die X-, Y-, Z-Axe seien resp. a, b, c. Die Dichtigkeit der Scheibe sei 1, dann ist die Masse des Volumenelementes der Scheibe $dx\,dy\,dz$, und das Potential der Scheibe

$$V = dx \iint \frac{dy\,dz}{r}, \quad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Die Integrationen erstrecken sich auf alle Werthe y, z, welche der Ungleichung

$$\frac{y^2}{pk} + \frac{z^2}{p'k} < 1$$

genügen.

Wendet man auf das vorstehende Doppelintegral die Dirichlet'sche Methode des discontinuirlichen Factors an und verfolgt genau den von Dirichlet zur Bestimmung des Potentials eines Ellipsoides eingeschlagenen Weg, so erhält man

$$V = 2k\sqrt{pp'}\,dx \int_\sigma^\infty \frac{\sqrt{s-(x-a)^2 - \frac{b^2 s}{s+pk} - \frac{c^2 s}{s+p'k}}}{\sqrt{(s+pk)(s+p'k)}} \frac{ds}{s},$$

wo σ die positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$1 - \frac{(x-a)^2}{s} - \frac{b^2}{pk+s} - \frac{c^2}{p'k+s} = 0$$

bedeutet.

Um nun hieraus das Potential einer endlichen Scheibe von elliptischem Querschnitt zu erhalten, die zwischen $x = h'$ und $x = h''$ enthalten ist, müsste man den vorstehenden Ausdruck für V zwischen diesen Grenzen nach x integriren. Noch ist derselbe aber sehr wenig geeignet für eine Integration nach x, wenn man bedenkt, dass k im Allgemeinen eine Function von x, und dass gleichfalls die untere Grenze σ eine Function von x ist. Um die untere Grenze von x unabhängig zu machen, sagen wir, V sei gleich dem reellen Bestandtheil des von 0 bis ∞ genommenen Integrales; darauf führen wir für s noch eine neue Variable ks ein, und erhalten dadurch folgendes Resultat

$$V \parallel 2\sqrt{pp'}\,dx \int_0^\infty \frac{\sqrt{ks-(x-a)^2-\frac{b^2 s}{p+s}-\frac{c^2 s}{p'+s}}}{\sqrt{(p+s)(p'+s)}}\frac{ds}{s}.$$

Ist nun die den Körper begrenzende krumme Fläche eine Fläche zweiten Grades, so erhält man mit Hilfe dieses Ausdrucks für V Potential und Componenten in Form einfacher Integrale. Denn dann ist k eine rationale Function höchstens zweiten Grades von x, und die Integration nach x lässt sich dann immer ausführen, entweder durch eine rein algebraische Function von x, oder mit Hilfe eines Logarithmus oder eines *arcus sinus*. Im ersten Fall, der beim Cylinder eintritt, wird das noch bleibende Integral, welches sich auf s bezieht, ohne Weiteres ein elliptisches; im zweiten Fall kann dasselbe dann als elliptisches dargestellt werden, durch theilweise Integration, wenn der vor dem Logarithmus oder *arcus sinus* unter dem auf s bezüglichen Integralzeichen stehende Factor sich rein algebraisch integriren lässt, was sich in den vier vorhin aufgezählten Fällen ereignet.

2.

Componenten des elliptischen Cylinders.

Für den elliptischen Cylinder, dessen Querschnitt die Halbaxen $\alpha\sqrt{\lambda}$, $\beta\sqrt{\lambda}$ haben möge, ist

$$k = \lambda, \quad p = \alpha^2, \quad p' = \beta^2,$$

mithin das Potential einer Elementarscheibe desselben

$$V \parallel 2\alpha\beta\,dx \int_0^\infty \frac{\sqrt{\lambda s-(x-a)^2-\frac{b^2 s}{\alpha^2+s}-\frac{c^2 s}{\beta^2+s}}}{\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}\frac{ds}{s},$$

und folglich die Componenten der Elementarscheibe in der Richtung der X-, Y-, Z-Axe, welche resp. mit X', Y', Z' bezeichnet werden mögen,

$$X' \parallel -2\alpha\beta\,dx \int_0^\infty \frac{(x-a)\,ds}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}\sqrt{\lambda s-(x-a)^2-\frac{b^2 s}{\alpha^2+s}-\frac{c^2 s}{\beta^2+s}}}$$

$$Y' = -2\alpha\beta b\, dx \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}\sqrt{\lambda s - (x-a)^2 - \frac{b^2 s}{\alpha^2+s} - \frac{c^2 s}{\beta^2+s}}}.$$

Der Ausdruck für Z' ist dem für Y' analog.

Die Abstände der Grundflächen des Cylinders vom Anfangspunkt seien h' und h'' $(h'' > h')$; zwischen diesen Grenzen sind X', Y', Z' nach x zu integriren, um die Componenten der Anziehung des Cylinders, die ich durch X, Y, Z bezeichnen will, zu erhalten. Es wird

$$1)\quad \begin{cases} X = -2\alpha\beta \displaystyle\int_\sigma^\infty \frac{ds}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}} \cdot T \\ Y = -2\alpha\beta b \displaystyle\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}} \cdot T', \end{cases}$$

wo

$$2)\quad \begin{cases} T = \displaystyle\int_{h'-a}^{h''-a} \frac{x\,dx}{\sqrt{S-x^2}} \\ T' = \displaystyle\int_{h'-a}^{h''-a} \frac{dx}{\sqrt{S-x^2}} \end{cases} \quad S = \lambda s - \frac{b^2 s}{\alpha^2+s} - \frac{c^2 s}{\beta^2+s}.$$

Damit die Bestandtheile unter den Integralzeichen in 2) reell sind, ist es vor allen Dingen erforderlich, dass S positiv, d. h.

$$\lambda > \frac{b^2}{\alpha^2+s} + \frac{c^2}{\beta^2+s}$$

sei. Liegt der angezogene Punkt innerhalb des Mantels oder des verlängerten Mantels, so ist diese Bedingung für jedes positive s erfüllt; liegt er ausserhalb, so muss $s > \sigma$ sein, wenn σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda = \frac{b^2}{\alpha^2+s} + \frac{c^2}{\beta^2+s}$$

bedeutet. Die untere Grenze σ der Integrale 1) ist deshalb 0 für innere Punkte, hingegen die Wurzel der vorstehenden Gleichung für äussere Punkte.

Ferner ist als obere Grenze der Integrale 2) nur für diejenigen Werthe von s die Grösse $h''-a$ zu nehmen, für welche $S > (h''-a)^2$, oder für welche $s > \varrho''$, wenn man mit ϱ'' die positive Wurzel der cubischen Gleichung

$$\lambda = \frac{(h''-a)^2}{s} + \frac{b^2}{\alpha^2+s} + \frac{c^2}{\beta^2+s}$$

bezeichnet. Für die Werthe von s, die zwischen 0 und ϱ'' liegen, ist als obere Grenze $\pm\sqrt{S}$ zu nehmen, je nachdem $h''-a$ positiv oder negativ ist. Ebenso ist, wenn man die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda = \frac{(h'-a)^2}{s} + \frac{b^2}{\alpha^2+s} + \frac{c^2}{\beta^2+s}$$

ϱ' nennt, als untere Grenze nur für $s > \varrho'$ die Grösse $h'-a$ zu nehmen; für $s < \varrho'$ wird sie $\pm\sqrt{S}$, je nachdem $h'-a$ positiv oder negativ ist.

Wenn also $h''-a$ positiv, und $h'-a$ positiv ist, so ist

für die Werthe von s zwischen	die obere Grenze	die untere Grenze
σ und ϱ'	$\sqrt{S}$	$\sqrt{S}$
ϱ' „ ϱ''	$\sqrt{S}$	$h'-a$
ϱ'' „ ∞	$h''-a$	$h'-a$.

Ist aber $h''-a$ positiv, $h'-a$ negativ, so ist

von σ bis ϱ'	die obere Grenze $\sqrt{S}$,	die untere Grenze	$-\sqrt{S}$
„ ϱ' „ ϱ''	„ $\sqrt{S}$	„	$h'-a$
„ ϱ'' „ ∞	„ $h''-a$	„	$h'-a$.

Im ersten Fall wird für die Werthe von s, die zwischen σ und ϱ' liegen,

$$T = 0, \quad T' = 0,$$

im zweiten Fall

$$T = 0, \quad T' = \pi.$$

In beiden Fällen wird für die Werthe von s, die zwischen ϱ' und ϱ'' liegen,

$$T = \sqrt{S-(h'-a)^2}, \quad T' = \frac{\pi}{2} - arc\sin\frac{h'-a}{\sqrt{S}};$$

und für die Werthe von s, die zwischen ϱ'' und ∞ liegen,

$$T = \sqrt{S-(h'-a)^2} - \sqrt{S-(h''-a)^2},$$

$$T' = arc\sin\frac{h''-a}{\sqrt{S}} - arc\sin\frac{h'-a}{\sqrt{S}}.$$

Demnach wird immer

$$X = -2\alpha\beta\int_{\varrho'}^{\infty}\frac{\sqrt{S-(h'-a)^2}\,ds}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}} + 2\alpha\beta\int_{\varrho''}^{\infty}\frac{\sqrt{S-(h''-a)^2}\,ds}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}};$$

hingegen wird, wenn $h''-a$, $h'-a$ beide positiv sind,

$$Y = -\alpha\beta b\pi\int_{\varrho'}^{\varrho''}\frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}$$

$$+ 2\alpha\beta b\int_{\varrho'}^{\infty}\frac{arc\sin\frac{h'-a}{\sqrt{S}}}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}ds$$

$$- 2\alpha\beta b\int_{\varrho''}^{\infty}\frac{arc\sin\frac{h''-a}{\sqrt{S}}}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}ds,$$

wenn aber $h''-a$ positiv, $h'-a$ negativ ist, so kommt zu dem vorstehenden Ausdruck noch hinzu

$$-2\alpha\beta b\pi\int_{\sigma}^{\varrho'}\frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}.$$

Der unter dem Integralzeichen vor dem *arcus sinus* stehende Factor

$$\frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}}$$

hat das rein algebraische Integral

$$\frac{2}{\alpha^2-\beta^2}\sqrt{\frac{\beta^2+s}{\alpha^2+s}}.$$

Es lässt sich mithin Y durch theilweise Integration von dem transcendenten Factor *arcus sinus* befreien, ohne dass ein neuer transcendenter Bestandtheil unter das Integralzeichen tritt, und somit lässt sich Y auf elliptische Integrale zurückführen. Die Componente X ist schon durch elliptische Integrale ausgedrückt.

Ich bemerke noch, dass diese Methode, die Attractionscomponenten eines Cylinders zu ermitteln, vor den bisher angewandten (Crelle's Journal B. 61, S. 180, und diese Zeitschrift 8. Jahrgang 5. Heft) den Vorzug der grösseren Einfachheit haben dürfte. Auch lassen sich die aus ihr hervorgehenden Integrale am leichtesten auf die Normalform bringen.

3.

Componenten einer paraboloidischen Scheibe mit elliptischem Querschnitt.

Fallen Scheitel und Axe eines elliptischen Paraboloides mit dem Anfangspunkt und der X-Axe zusammen, und liegen die Hauptschnitte desselben in der XY- und XZ-Ebene, so ist die Gleichung desselben

$$\frac{y^2}{\alpha x}+\frac{z^2}{\beta x}=\lambda.$$

Mithin ist für das Paraboloid

$$k=\lambda x,\quad p=\alpha,\quad p'=\beta,$$

folglich das Potential einer Elementarscheibe gleich dem reellen Theile von

$$2\sqrt{\alpha\beta}\,dx\int_0^\infty\frac{\sqrt{\lambda x s-(x-a)^2-\frac{b^2 s}{\alpha+s}-\frac{c^2 s}{\beta+s}}}{\sqrt{(\alpha+s)(\beta+s)}}\frac{ds}{s}.$$

Wenn man diesen Ausdruck nach b differenzirt, so erhält man

$$Y'_{\prime} \parallel -2\sqrt{\alpha\beta}\,b\,dx$$

$$\int_0^\infty\frac{ds}{(\alpha+s)\sqrt{(\alpha+s)(\beta+s)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda s x-(x-a)^2-\frac{b^2 s}{\alpha+s}-\frac{c^2 s}{\beta+s}}}.$$

Folglich ist die Componente der Anziehung einer paraboloidischen Scheibe, die zwischen zwei in den Entfernungen $x = h''$ und $x = h'$ vom Scheitel senkrecht zur Axe gelegten Ebenen enthalten ist, in der Richtung der Y-Axe

$$Y = -2\sqrt{\alpha\beta}\, b \int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{(\alpha+s)\sqrt{(\alpha+s)(\beta+s)}} \cdot T',$$

$$T' = \int_{h'-a-\frac{\lambda}{2}s}^{h''-a-\frac{\lambda}{2}s} \frac{dx}{\sqrt{S-x^2}}, \quad S = \frac{s^2\lambda^2}{4} + as\lambda - \frac{b^2 s}{\alpha+s} - \frac{c^2 s}{\beta+s}.$$

Die untere Grenze ist gleich 0 oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$a\lambda + \frac{s\lambda^2}{4} = \frac{b^2}{\alpha+s} + \frac{c^2}{\beta+s},$$

je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb der unbegrenzten Paraboloidfläche liegt.

Ich betrachte hier, der Kürze wegen, nur den Fall $a > h''$. Dann sind die beiden Grenzen

$$h'' - a - \frac{\lambda}{2}s, \quad h' - a - \frac{\lambda}{2}s$$

für jedes s negativ. Als obere Grenze ist nur für diejenigen Werthe von s die Grösse

$$h'' - a - \frac{\lambda}{2}s$$

zu nehmen, für welche

$$S > \left(h'' - a - \frac{\lambda}{2}s\right)^2,$$

oder $s > \varrho''$ ist, wenn durch ϱ'' die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda h'' = \frac{(h''-a)^2}{s} + \frac{b^2}{\alpha+s} + \frac{c^2}{\beta+s}$$

bezeichnet wird. Für $s < \varrho''$ ist als obere Grenze $-\sqrt{S}$ zu nehmen.

Ebenso hat man als untere Grenze zu nehmen

$$\left.\begin{array}{c} -\sqrt{S} \\ h' - a - \frac{\lambda}{2}s \end{array}\right\} \text{ je nachdem } \left\{ s \lesseqgtr \varrho', \right.$$

wo ϱ' die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda h' = \frac{(h'-a)^2}{s} + \frac{b^2}{\alpha+s} + \frac{c^2}{\beta+s}$$

bedeutet

Es ist $\sigma < \varrho'' < \varrho'$, mithin ist

$T' = 0$ für die Werthe von s zwischen σ und ϱ'',

$$T' = \arcsin \frac{h'' - a - \frac{\lambda}{2} s}{\sqrt{S}} + \frac{\pi}{2}$$

für die Werthe von s zwischen ϱ'' und ϱ',

$$T' = \arcsin \frac{h'' - a - \frac{\lambda}{2} s}{\sqrt{S}} - \arcsin \frac{h' - a - \frac{\lambda}{2} s}{\sqrt{S}}$$

für die Werthe von s zwischen ϱ' und ∞.

Folglich ist

$$Y = -2\sqrt{\alpha\beta}\, b \int_{\varrho''}^{\infty} \frac{ds}{(\alpha + s)\sqrt{(\alpha + s)(\beta + s)}} \arcsin \frac{h'' - a - \frac{\lambda}{2} s}{\sqrt{S}}$$

$$+ 2\sqrt{\alpha\beta}\, b \int_{\varrho'}^{\infty} \frac{ds}{(\alpha + s)\sqrt{(\alpha + s)(\beta + s)}} \arcsin \frac{h' - a - \frac{\lambda}{2} s}{\sqrt{S}}$$

$$-\sqrt{\alpha\beta}\, b\pi \int_{\varrho''}^{\varrho'} \frac{ds}{(\alpha + s)\sqrt{(\alpha + s)(\beta + s)}}.$$

Der unter den Integralzeichen vor dem *arcus sinus* stehende Factor ist derselbe wie bei der Y-Componente des Cylinders; man kann also wieder durch theilweise Integration zu elliptischen Integralen gelangen. Dasselbe gilt von der Componente Z.

Ich bemerke noch, dass, wenn der angezogene Punkt auf dem Rande eines vom Scheitel anhebenden Paraboloides liegt, sich die Componenten Y und Z durch logarithmische und cyklometrische Functionen ausdrücken lassen.

Die Componente in der Richtung der Axe des Paraboloides enthält ausser elliptischen Integralen noch ein solches, in welchem unter dem Integralzeichen vor dem *arcus sinus* der Factor

$$\frac{ds}{\sqrt{(\alpha + s)(\beta + s)}}$$

steht, welcher sich nicht algebraisch integriren lässt. Deshalb scheint es, dass diese Componente sich nicht vollständig durch elliptische Integrale ausdrücken lässt.

4.

Componenten einer ellipsoidischen Scheibe.

Die Hauptaxen $\alpha\sqrt{\lambda}$, $\beta\sqrt{\lambda}$, $\gamma\sqrt{\lambda}$ des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} < \lambda$$

mögen resp. mit der X-, Y-, Z-Axe zusammenfallen. Dann ist

$$k = \lambda - \frac{x^2}{\alpha^2}, \quad p = \beta^2, \quad p' = \gamma^2,$$

und folglich das Potential der Elementarscheibe

$$V = 2\beta\gamma\, dx \int_0^\infty \frac{\sqrt{s\left(\lambda - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) - (x-a)^2 - \frac{b^2 s}{\beta^2 + s} - \frac{c^2 s}{\gamma^2 + s}}}{\sqrt{(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}} \cdot \frac{ds}{s}.$$

Setzt man der Kürze wegen:

$$S = s\lambda - \frac{a^2 s}{\alpha^2 + s} - \frac{b^2 s}{\beta^2 + s} - \frac{c^2 s}{\gamma^2 + s}$$

$$g = \frac{h}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 + s} - \frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + s}}$$

$$g_0 = -\frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + s}},$$

so werden die Componenten der Attraction einer endlichen ellipsoidischen Scheibe, die zwischen der YZ-Ebene und einer damit in der Entfernung h (h positiv) parallel gelegten Ebene enthalten ist,

$$X = 2\alpha^2\beta\gamma \int_0^\infty \frac{ds}{s(\alpha^2 + s)\sqrt{(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}} \int_{g_0}^{g} \frac{x\,dx}{\sqrt{S - x^2}}$$

$$-2\alpha\beta\gamma a \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s)\sqrt{(\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}} \int_{g_0}^{g} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}}$$

$$Y = -2\alpha\beta\gamma b \int_0^\infty \frac{ds}{(\beta^2 + s)\sqrt{(\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}} \int_{g_0}^{g} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}},$$

oder, wenn man

$$f(s) = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{s(\alpha^2 + s)\sqrt{(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}}$$

$$F(s) = -\frac{2\alpha\beta\gamma}{(k + s)\sqrt{(\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s)}}, \quad \begin{matrix} k = \alpha^2 \text{ für } X, \\ k = \beta^2 \quad \text{,,} \quad Y, \end{matrix}$$

ferner

$$T = \int_{g_0}^{g} \frac{x\,dx}{\sqrt{S - x^2}}, \qquad T' = \int_{g_0}^{g} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}},$$

und

$$P = \int_\sigma^\infty f(s)\,ds \,.\, T, \quad Q = \int_\sigma^\infty F(s)\,ds \,.\, T'$$

setzt,

3) $$X = P + aQ, \quad Y = bQ.$$

Die untere Grenze σ der Integrale P und Q ist gleich 0 oder gleich der positiven Wurzel der Gleichung

$$\lambda = \frac{a^2}{\alpha^2 + s} + \frac{b^2}{\beta^2 + s} + \frac{c^2}{\gamma^2 + s}$$

zu setzen, je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb des vollständigen Ellipsoides liegt.

Um T und T', d. h. die reellen Theile der Integrale

4) $$\int_{g_0}^{g} \frac{x\,dx}{\sqrt{S - x^2}}, \quad \int_{g_0}^{g} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}}$$

zu erhalten, unterscheide man die drei Fälle:

1) a negativ,

2) a positiv, $h > a$,

3) a positiv, $h < a$.

Erster Fall: a negativ.

In diesem Fall sind g und g_0 für jedes s positiv, und zwar ist $g > g_0$. So lange $S < g_0^2$ wird $\sqrt{S - x^2}$ stets rein imaginär, also $T = T' = 0$. Es ist aber $S < g_0^2$ für alle Werthe von s, welche kleiner sind als ϱ_0, wenn ϱ_0 die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda = \frac{a^2}{\varrho_0} + \frac{b^2}{\beta^2 + \varrho_0} + \frac{c^2}{\gamma^2 + \varrho_0}$$

bedeutet. Es ist also, von $s = \sigma$ bis $s = \varrho_0$

$$T = T' = 0.$$

Damit für die übrigen Werthe von s, die also zwischen ϱ_0 und ∞ liegen, alle Elemente der Integrale 4) reell werden, darf man nur dann für die obere Grenze derselben den Werth g nehmen, wenn $s > \varrho$, wo ϱ die positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda - \frac{h^2}{\alpha^2} = \frac{(h - a)^2}{\varrho} + \frac{b^2}{\beta^2 + \varrho} + \frac{c^2}{\gamma^2 + \varrho}$$

bedeutet. Ist $s < \varrho$, so hat man als obere Grenze $\sqrt{S}$ zu nehmen.

Also von $s = \varrho_0$ bis $s = \varrho$ ist

$$T = \int_{g_0}^{\sqrt{S}} \frac{x\,dx}{\sqrt{S - x^2}} = \sqrt{S - g_0^2}$$

$$T' = \int_{g}^{\sqrt{S}} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}} = \frac{\pi}{2} - arc\,sin\,\frac{g_0}{\sqrt{S}};$$

hingegen von $s = \varrho$ bis $s = \infty$ ist

$$T=\int_{g_0}^{g}\frac{x\,dx}{\sqrt{S-x^2}}=\sqrt{S-g_0^2}-\sqrt{S-g^2}$$

$$T'=\int_{g_0}^{g}\frac{dx}{\sqrt{S-x^2}}=arc\sin\frac{g}{\sqrt{S}}-arc\sin\frac{g_0}{\sqrt{S}}.$$

Demnach wird

$$P=\int_{\varrho_0}^{\infty}ds\,f(s)\sqrt{S-g_0^2}-\int_{\varrho}^{\infty}ds\,f(s)\sqrt{S-g^2}$$

$$Q=\frac{\pi}{2}\int_{\varrho_0}^{\varrho}ds\,F(s)-\int_{\varrho_0}^{\infty}ds\,F(s)\,arc\sin\frac{g_0}{\sqrt{S}}+\int_{\varrho}^{\infty}ds\,F(s)\,arc\sin\frac{g}{\sqrt{S}}.$$

Zweiter Fall: a positiv, $h>a$.

Jetzt ist g positiv, g_0 negativ für jedes s. Demnach hat man für die obere Grenze der Integrale 4) zu nehmen

$$\left.\begin{matrix}g\\ \sqrt{S}\end{matrix}\right\}\text{ je nachdem }\left\{s\gtrless\varrho,\right.$$

und für die untere Grenze

$$\left.\begin{matrix}g_0\\ -\sqrt{S}\end{matrix}\right\}\text{ je nachdem }\left\{s\gtrless\varrho_0.\right.$$

P bleibt wie vorhin; zu dem vorigen Ausdruck für Q tritt aber noch das Glied

$$\pi\int_{\sigma}^{\varrho_0}ds\,F(s)$$

hinzu.

Dritter Fall: a positiv, $a>h$.

Jetzt ist g_0 negativ für jedes s; g ist negativ von $s=0$ bis

$$s=\frac{\alpha^2(a-h)}{h}.$$

Ist also

$$\sigma>\frac{\alpha^2(\alpha-h)}{h},$$

so bleiben die Formeln für P und Q dieselben wie im zweiten Fall; ist aber

$$\sigma<\frac{\alpha^2(a-h)}{h},$$

so ist g zuerst negativ, und zwar von $s=\sigma$ bis

$$s=\frac{\alpha^2(a-h)}{h}.$$

So lange also $g^2>S$, d. h. so lange $s<\varrho$, ist die obere Grenze $-\sqrt{S}$.

Man sieht leicht ein, dass $\varrho < \varrho_0$; denn so lange $g^2 > S$, ist gewiss $g_0^2 > S$, da der absolute Werth von g_0 grösser ist als der absolute Werth von g.

Demnach ist von $S = \sigma$ bis $s = \varrho$ sowohl die obere als untere Grenze gleich $-\sqrt{S}$ zu nehmen; mithin ist von $s = \sigma$ bis $s = \varrho$

$$T = 0, \quad T' = 0.$$

Ferner ist

von $s = \varrho$ bis $s = \infty$ die obere Grenze g
„ $s = \varrho$ „ $s = \varrho_0$ „ untere „ $-\sqrt{S}$
„ $s = \varrho_0$ „ $s = \infty$ „ „ „ g_0.

P bleibt wieder wie vorhin, und zu dem Ausdruck für Q im ersten Fall tritt noch das Glied

$$\pi \int_{\varrho}^{\varrho_0} ds\, F(s)$$

hinzu.

Fassen wir die drei Fälle zusammen, so ist immer

$$P = \int_{\varrho_0}^{\infty} ds\, f(s) \sqrt{S - g_0^2} - \int_{\varrho}^{\infty} ds\, f(s) \sqrt{S - g^2}.$$

Ferner ist, wenn a negativ,

$$Q = \frac{\pi}{2} \int_{\varrho_0}^{\varrho} ds\, F(s) - \int_{\varrho_0}^{\infty} ds\, F(s) \arcsin \frac{g_0}{\sqrt{S}} + \int_{\varrho}^{\infty} ds\, F(s) \arcsin \frac{g}{\sqrt{S}};$$

ist a positiv, so tritt zu diesem Ausdruck für Q noch das Glied

$$\pi \int_{\mu}^{\varrho_0} ds\, F(s)$$

hinzu, worin

$$\mu = \begin{matrix} \sigma \\ \varrho \end{matrix} \Big\} \text{ je nachdem } \Big\{ \sigma \gtrless \frac{\alpha^2 (a - h)}{h}.$$

Um nun P und Q für eine zwischen zwei beliebigen senkrecht zur X-Axe gelegten Ebenen enthaltene Scheibe zu erhalten, deren Abstände vom Mittelpunkte des Ellipsoides h'' und h' sein mögen ($h'' > h'$), unterscheide man wieder drei Fälle:

1) h'' positiv, h' positiv, a negativ.
2) h'' positiv, h' positiv, a positiv.
3) h'' positiv, h' negativ, a positiv.

Setzt man

$$g'' = \frac{h''}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 + s} - \frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + s}}$$

$$g' = \frac{h'}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+s} - \frac{a\alpha}{\sqrt{\alpha^2+s}},$$

und bezeichnet man durch ϱ'' und ϱ' die positiven Wurzeln der Gleichungen

$$\lambda - \frac{h''^2}{\alpha^2} = \frac{(h''-a)^2}{\varrho''} + \frac{b^2}{\beta^2+\varrho''} + \frac{c^2}{\gamma^2+\varrho''}$$

$$\lambda - \frac{h'^2}{\alpha^2} = \frac{(h'-a)^2}{\varrho'} + \frac{b^2}{\beta^2+\varrho'} + \frac{c^2}{\gamma^2+\varrho'},$$

so ergiebt sich leicht mit Benutzung der vorhergehenden Resultate:

Immer wird

$$P = \int_{\varrho'}^{\infty} ds\, f(s)\sqrt{S-g'^2} - \int_{\varrho''}^{\infty} ds\, f(s)\sqrt{S-g''^2};$$

hingegen wird

im ersten Fall (h'' positiv, h' positiv, a negativ)

$$Q = \frac{\pi}{2}\int_{\varrho'}^{\varrho''} ds\, F(s) + \int_{\varrho''}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g''}{\sqrt{S}} - \int_{\varrho'}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g'}{\sqrt{S}};$$

im zweiten Fall (h'' positiv, h' positiv, a positiv)

$$Q = \frac{\pi}{2}\int_{\varrho'}^{\varrho''} ds\, F(s) + \int_{\varrho''}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g''}{\sqrt{S}} - \int_{\varrho'}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g'}{\sqrt{S}}$$

$$+\pi\int_{\mu''}^{\mu'} ds\, F(s),$$

wo

$$\mu'' = \left.\begin{matrix}\sigma\\ \varrho''\end{matrix}\right\} \text{ je nachdem } \left\{\sigma \gtrless \frac{\alpha^2(a-h'')}{h''}\right.$$

$$\mu' = \left.\begin{matrix}\sigma\\ \varrho'\end{matrix}\right\} \text{ je nachdem } \left\{\sigma \gtrless \frac{\alpha^2(a-h')}{h'}\right.;$$

und im dritten Fall (h'' positiv, h' negativ, a positiv)

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} Q &= \frac{\pi}{2}\int_{\varrho_0}^{\varrho''} ds\, F(s) + \frac{\pi}{2}\int_{\varrho_0}^{\varrho'} ds\, F(s) + \int_{\varrho''}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g''}{\sqrt{S}} \\ &- \int_{\varrho'}^{\infty} ds\, F(s)\, arc\sin\frac{g'}{\sqrt{S}} + \pi\int_{\mu''}^{\varrho_0} ds\, F(s). \end{aligned}\right.$$

Der für P gefundene Ausdruck enthält nur elliptische Integrale; Q hingegen lässt sich, wie es scheint, nicht auf elliptische Integrale zurückführen, da der vor dem *arcus sinus* stehende Factor $ds\, F(s)$ sich nicht algebraisch integriren lässt. Aehnliche Ausdrücke lassen sich aufstellen für die Componenten der Anziehung der hyperboloidischen Scheiben.

Wenn $a=0$ ist, hängt die X-Componente nach 3) nur von P ab, kann also in diesem speciellen Fall durch elliptische Integrale ausgedrückt werden. Dasselbe gilt, wie leicht ersichtlich, für die übrigen elliptischen Scheiben, deren krumme Begrenzungsfläche eine centrische Fläche zweiten Grades ist. Man kann demnach den im Eingange unter 3) erwähnten Satz aufstellen.

Ich bemerke noch, dass man aus den für P und Q gefundenen Formeln die Componenten eines vollständigen Ellipsoides erhält, indem man

$$h''=\alpha, \quad h'=-\alpha$$

setzt. Dann wird zunächst

$$\varrho_0=\sigma, \quad \varrho'=\varrho''=\infty,$$

$$\text{und } \mu''=\sigma, \text{ da } \sigma > \alpha(a-\alpha);$$

demnach ist

$$P=0,$$

und, nach 5)

$$Q=\pi\int_\sigma^\infty ds\,F(s)=-2\alpha\beta\gamma\pi\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(k+s)\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)(\gamma^2+s)}},$$

worin k für X, Y, Z resp. die Werthe α^2, β^2, γ^2 hat.

Benutzt man noch die Formeln 3)

$$X=aQ, \quad Y=bQ, \quad Z=cQ,$$

so hat man die bekannten Formeln für die Componenten der Anziehung eines Ellipsoides.

5.

Componenten der von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades und von zwei zur Axe derselben senkrechten Ebenen begrenzten unendlich dünnen Schalen.

Es ist leicht ersichtlich, dass sämmtliche Integrale, von denen, nach dem Bisherigen, die Componenten der elliptischen Scheiben abhängen, die von irgend einer Fläche zweiten Grades begrenzt werden, durch Differentiation nach λ in elliptische Integrale verwandelt werden. Durch Differentiation der Attractionscomponenten der Scheiben nach λ erhält man aber die Componenten unendlich dünner Schalen, die von zwei ähnlichen Flächen zweiten Grades und von zwei zur Axe dieser Flächen senkrechten Ebenen begrenzt werden. Hieraus erhellt die Richtigkeit des im Eingange unter 2) aufgestellten Satzes.

Im Allgemeinen werden allerdings die Ausdrücke für die Componenten der Schalen sehr complicirt. Für die X-Componente einer cylindrischen Schale erhält man dagegen einen höchst einfachen Ausdruck. Differenzirt man nämlich die im Art. 2 für die X-Componente des Cylinders gefundene Formel

$$X^{*)} = -2\alpha\beta \Big|_{h'}^{h''} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda s - (h-a)^2 - \frac{b^2 s}{\alpha^2 + s} - \frac{c^2 s}{\beta^2 + s}}}{s\sqrt{(\alpha^2+s)(\beta^2+s)}} ds$$

nach λ, so erhält man, für die Componente der cylindrischen Schale,

$$X' = -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \Big|_{h'}^{h''} \int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s-\varrho_2)}},$$

wo ϱ die positive, ϱ_1 und ϱ_2 die beiden negativen Wurzeln der Gleichung

$$\lambda = \frac{(h-a)^2}{s} + \frac{b^2}{\alpha^2 + s} + \frac{c^2}{\beta^2 + s}$$

bedeuten.

Es sei $\varrho_1 > \varrho_2$, so geht das vorstehende Integral durch die Substitution

$$\frac{\varrho - \varrho_2}{s - \varrho_2} = \sin^2\varphi$$

über in

$$\frac{2}{\sqrt{\varrho - \varrho_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}, \quad k^2 = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho - \varrho_2}.$$

Mithin ist

$$X' = -\frac{2\alpha\beta d\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Big|_{h'}^{h''} \frac{1}{\sqrt{\varrho - \varrho_2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Componente der Anziehung einer von zwei ähnlichen Cylindermanteln und von zwei zur Axe senkrechten Ebenen begrenzten unendlich dünnen Schale hängt demnach nur von zwei vollständigen elliptischen Integralen erster Gattung ab, deren Moduli rationale Functionen von den Wurzeln je einer cubischen Gleichung sind.

Für die Y- und Z-Componente, sowie für alle drei Componenten der übrigen Schalen zweiten Grades erhält man Formeln, in denen unvollständige Integrale erster und zweiter Gattung vorkommen.

6.

Componenten einer Kugelscheibe.

Wird aus dem in Art. 4 betrachteten Ellipsoid eine Kugel mit dem Radius α, so geht der in den Formeln für Q vor dem *arcus sinus* stehende Factor $F(s)$ über in

$$-\frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + s)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

*) Eine Differenz von der Form

$$f(h'', \varrho'') - f(h', \varrho')$$

bezeichne ich kurz durch

$$\Big|_{h'}^{h''} f(h, \varrho).$$

Dieser Ausdruck lässt sich rein algebraisch integriren. Mithin werden sich alle drei Componenten der Anziehung einer Kugelscheibe auf elliptische Integrale zurückführen lassen. Diese Zurückführung soll den Gegenstand dieses Artikels bilden.

Für die Kugelscheibe kann man der Allgemeinheit unbeschadet die Coordinate c des angezogenen Punktes gleich 0 setzen. Thut man dies, so wird die Componente Z gleich Null. Es werden ferner ϱ'' und ϱ' die positiven Wurzeln der quadratischen Gleichungen

$$1-\frac{h''^2}{\alpha^2}=\frac{(h''-a)^2}{s}+\frac{b^2}{\alpha^2+s}$$

$$1-\frac{h'^2}{\alpha^2}=\frac{(h'-a)^2}{s}+\frac{b^2}{\alpha^2+s}.$$

Die negativen Wurzeln dieser beiden Gleichungen sollen durch ϱ_1' und ϱ_1'' bezeichnet werden.

Ich setze ferner der Kürze wegen

$$\int_\varrho^\infty ds\, f(s)\sqrt{S-g^2}=U.$$

Man erhält leicht

$$U=\frac{2\alpha^3}{\sqrt{\alpha^2-h^2}}\int_\varrho^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}}$$

$$\left\{\frac{\alpha^2+a^2-2ah}{\alpha^2+s}-\frac{\alpha^2b^2}{(\alpha^2+s)^2}-\frac{(h-a)^2}{s}\right\},$$

$$P=\Big|_{h''}^{h'}U. \tag{6}$$

Man erhält ferner für Q durch theilweise Integration, da

$$\int ds\, F(s)=\tfrac{4}{3}\alpha^3(\alpha^2+s)^{-\frac{3}{2}},$$

folgende Formeln:

Erster Fall (h'' positiv, h' positiv, a negativ)

$$Q=\tfrac{4}{3}\alpha^3\Big|_{h''}^{h'}\int_\varrho^\infty(\alpha^2+s)^{-\frac{3}{2}}\,d\left(arc\sin\frac{g}{\sqrt{S}}\right),$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\tfrac{4}{3}\alpha^3\int_\varrho^\infty(\alpha^2+s)^{-\frac{3}{2}}\,d\left(arc\sin\frac{g}{\sqrt{S}}\right)=V$$

setzt,

$$Q=\Big|_{h''}^{h'}V. \tag{7}$$

Zweiter Fall (h'' positiv, h' negativ, a positiv).

In diesem Fall tritt zu dem vorigen Ausdruck für Q noch das Glied

$$-\tfrac{4}{3}\pi\alpha^3(\alpha^2+\sigma)^{-\frac{3}{2}}$$

hinzu, aber nur dann, wenn σ zwischen $\dfrac{\alpha^2(a-h'')}{h''}$ und $\dfrac{\alpha^2(a-h')}{h'}$ liegt.

Dritter Fall (h'' positiv, h' negativ, a positiv).

In diesem Fall tritt zu dem Ausdruck für Q im ersten Fall noch das Glied

$$-\tfrac{4}{3}\pi\alpha^3(\alpha^2+\sigma)^{-\frac{3}{2}}$$

hinzu, aber nur dann, wenn

$$\sigma > \frac{\alpha^2(a-h'')}{h''}.$$

Führt man die angedeutete Differentiation nach s aus, so wird, nach gehöriger Reduction,

$$V = \frac{2\alpha^3}{3\sqrt{\alpha^2-h^2}}\int_\varrho^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}}$$

$$\left\{\frac{a-h}{s}+\frac{2h-a-\dfrac{a\alpha^2}{r}}{\alpha^2+s}+\frac{\dfrac{a\alpha^2}{r^2}-h}{s+\alpha^2-r^2}\right\},$$

wo $a^2+b^2=r^2$ gesetzt worden ist.

Um die in U und V enthaltenen elliptischen Integrale auf die Normalform zu bringen, wende man auf sie die Transformation zweiten Grades

$$s=\frac{\varrho-\varrho_1\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}$$

an. Dadurch geht bekanntlich das Integral

$$\int_\varrho^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}}\quad(\varrho>\varrho_1>\alpha^2)$$

über in das vollständige Integral erster Gattung

$$\frac{2}{\sqrt{\varrho+\alpha^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Der Modul k bestimmt sich aus der Gleichung

$$k^2=\frac{\varrho_1+\alpha^2}{\varrho+\alpha^2},$$

oder durch die ursprünglich gegebenen Grössen ausgedrückt

$$k^2=\frac{(h-a)^2+b^2+(\alpha^2-h^2)-\sqrt{4(\alpha^2-h^2)(h-a)^2+[(h-a)^2+b^2-(\alpha^2-h^2)]^2}}{(h-a)^2+b^2+(\alpha^2-h^2)+\sqrt{4(\alpha^2-h^2)(h-a)^2+[(h-a)^2+b^2-(\alpha^2-h^2)]^2}}.$$

Ich bezeichne im Folgenden die vollständigen elliptischen Integrale erster, zweiter, dritter Gattung nach Legendre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wie üblich, durch K, E, $\Pi_1(n)$.

Die beiden Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi^3}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi^5} \quad (\Delta\varphi = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}),$$

auf welche man bei der Reduction unserer Integrale in die Normalform geführt wird, lassen sich durch K und E ausdrücken. Es ist nämlich, wenn

$$1-k^2 = k'^2$$

gesetzt wird,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi^3} = \frac{E}{k'^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi^5} = \frac{2(1+k'^2)}{3k'^4} E - \frac{1}{3k'^2} K.$$

Das erste Resultat findet man mit Hilfe der identischen Gleichungen

$$d\frac{tg\,\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} + \frac{k^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi^3}$$

$$d(tg\,\varphi\,\Delta\varphi) = \frac{\Delta\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{k^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi},$$

und das zweite, wenn man von der Gleichung

$$d\frac{tg\,\varphi}{\Delta\varphi^3} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi^3} + \frac{3k^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi^5}$$

ausgeht und das erste Resultat benutzt.

Die in U und V enthaltenen Integrale drücken sich folgendermassen durch die drei ganzen elliptischen Integrale aus:

$$\int_\varrho^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}} = \frac{2}{(\varrho_1+\alpha^2)\sqrt{\varrho+\alpha^2}}(K-E)$$

$$\int_\varrho^\infty \frac{ds}{(\alpha^2+s)^2\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varrho+\alpha^2}}\left[\left(\frac{2}{3(\varrho_1+\alpha^2)^2} + \frac{2(\alpha^2-h^2)}{3\alpha^4 b^2}\right)(K-E) - \frac{\alpha^2-h^2}{3\alpha^4 b^2} K\right]$$

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{s\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\varrho+\alpha^2}}\left[\frac{1}{\varrho_1} K + \frac{\varrho_1-\varrho}{\varrho\varrho_1} \Pi_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)\right]$$

$$\int_{\varrho}^{\infty} \frac{ds}{(s+\alpha^2-r^2)\sqrt{(s-\varrho)(s-\varrho_1)(s+\alpha^2)}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varrho+\alpha^2}}\left[\frac{1}{\varrho_1+\alpha^2-r^2} K + \frac{\varrho_1-\varrho}{(\varrho+\alpha^2-r^2)(\varrho_1+\alpha^2-r^2)} \Pi_1\left(\frac{\varrho_1+\alpha^2-r^2}{\varrho+\alpha^2-r^2}\right)\right].$$

Das vollständige Integral Π_1 dritter Gattung lässt sich bekanntlich durch ein unvollständiges Integral erster und zweiter Gattung ausdrücken. Man beachte, dass die Parameter der beiden hier vorkommenden Integrale dritter Gattung, nämlich

$$\frac{\varrho_1}{\varrho}, \quad \frac{\varrho_1+\alpha^2-r^2}{\varrho+\alpha^2-r^2},$$

stets negativ sind. Ist aber der Parameter n negativ, so wird, wenn man

$$\sin^2 \alpha = -\frac{n}{k^2-n}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{k^2}{k^2-n}, \quad \Delta^2 \alpha = \frac{k^2(1-n)}{k^2-n}$$

und

$$\alpha = am(A, k'), \quad \text{oder} \quad A = \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

setzt, nach den von Jacobi in den Fundamenten eingeführten Bezeichnungen

$$\Pi_1(n) = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\Delta \alpha}\left[\frac{\pi A}{2K'} + K(\Delta \alpha \cot \alpha + Z[A, k'])\right]$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\Delta \alpha}\left[\frac{\pi A}{2K'} + K\frac{d \log(\sin am[A, k']\,\Theta[A, k'])}{dA}\right]$$

$$= \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\Delta \alpha}\left[\frac{\pi A}{2K'} + K\frac{d \log H(A, k')}{dA}\right].$$

Wenn

$$A' = \frac{\pi A}{2K'}, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad q' = e^{-\pi\frac{K}{K'}},$$

so wird

$$H(A, k') = 2\sqrt[4]{q'}(\sin A' - q'^2 \sin 3A' + q'^6 \sin 5A' - q'^{12} \sin 7A' + \ldots),$$

und daher

$$\frac{K\, d \log H(A, k')}{dA} = l = \frac{\pi K}{2K'} \frac{\cos A' - 3q'^2 \cos 3A' + 5q'^6 \cos 5A' - \ldots}{\sin A' - q'^2 \sin 3A' + q'^6 \sin 5A' - \ldots},$$

folglich

$$\Pi_1(n) = \sqrt{\frac{-n}{(k^2-n)(1-n)}}\,(A' + l).$$

Hiernach wird, wenn man

$$A' = \frac{\pi}{2K'} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{\varrho_1(\varrho + \alpha^2)}{-\alpha^2(\varrho - \varrho_1)}},$$

$$l_1 = \frac{\pi K}{2K'} \cdot \frac{\cos A' - 3q'^2 \cos 3A' + \ldots}{\sin A' - q'^2 \sin 3A' + \ldots}$$

setzt,

$$\frac{\varrho_1 - \varrho}{\varrho\varrho_1\sqrt{\varrho + \alpha^2}} \Pi_1\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right) = \delta \frac{\sqrt{\alpha^2 - h^2}}{\alpha^3(a - h)} (A' + l_1),$$

$$\delta = \pm 1, \text{ je nachdem } a \gtrless h,$$

und, wenn man

$$B' = \frac{\pi}{2K'} \int_0^\beta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sin\beta = \sqrt{\frac{(\varrho_1 + \alpha^2 - r^2)(\varrho + \alpha^2)}{-r^2(\varrho - \varrho_1)}},$$

$$l_2 = \frac{\pi K}{2K'} \cdot \frac{\cos B' - 3q'^2 \cos 3B' + \ldots}{\sin B' - q'^2 \sin 3B' + \ldots}$$

setzt,

$$\frac{\varrho_1 - \varrho}{(\varrho + \alpha^2 - r^2)(\varrho_1 + \alpha^2 - r^2)\sqrt{\varrho + \alpha^2}} \cdot \Pi_1\left(\frac{\varrho_1 + \alpha^2 - r^2}{\varrho + \alpha^2 - r^2}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon\sqrt{\alpha^2 - r^2}}{r^3\left(\frac{a\alpha^2}{r^2} - h\right)} (B' + l_2), \quad \varepsilon = \pm 1, \text{ je nachdem } \frac{a\alpha^2}{r^2} \gtrless h.$$

Nähert sich die Kugelscheibe an einer Seite der Vollkugel ($h = \pm \alpha$), oder nähert sich der angezogene Punkt der Axe ($b = 0$), wodurch sich k der Null, also k' der Einheit nähert, so müssen diese Formeln, wie folgt, transformirt werden.

Es ist

$$H(A, k') = \sqrt{\frac{K'}{K}} \cdot \frac{1}{i} e^{-\frac{\pi A^2}{4KK'}} . H(Ai, k),$$

und daher

$$A' + l_1 = A' + \frac{K\, d \log H(A, k')}{dA} = \lambda_1,$$

wenn man

$$\frac{\pi A}{2K} = A_1',$$

und

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{A_1'} + e^{-A_1'} - 3q^2(e^{3A_1'} + e^{-3A_1'}) + 5q^6(e^{5A_1'} + e^{-5A_1'}) - \ldots}{e^{A_1'} - e^{-A_1'} - q^2(e^{3A_1'} - e^{-3A_1'}) + q^6(e^{5A_1'} - e^{-5A_1}) - \ldots}$$

setzt. An die Stelle von $A' + l_1$ und $B' + l_2$ treten also in den genannten Fällen λ_1 und λ_2.

Die Integrale U und V lassen sich jetzt folgendermassen ausdrücken:

$$U = \frac{4\alpha^3}{3\sqrt{(\alpha^2 - h^2)(\varrho + \alpha^2)}}\left[\left(\frac{3(\alpha^2 + a^2 - 2ah)}{\varrho_1 + \alpha^2} - \frac{2\alpha^2 b^2}{(\varrho_1 + \alpha^2)^2}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2(\alpha^2 - h^2)}{\alpha^2}\right)(K - E) + \left(\frac{\alpha^2 - h^2}{\alpha^2} - \frac{3(h-a)^2}{\varrho_1}\right)K\right] + 4\delta(h-a)(A' + l_1),$$

$$V = \frac{4\alpha^3}{3\sqrt{(\alpha^2 - h^2)(\varrho + \alpha^2)}}\left[\left(\frac{a-h}{\varrho_1} + \frac{\frac{a\alpha^2}{r^2} - h}{\varrho_1 + \alpha^2 - r^2}\right)K\right.$$
$$\left. + \frac{2h - a - \frac{a\alpha^2}{r^2}}{\varrho_1 + \alpha^2}(K - E)\right] + \tfrac{4}{3}\delta(A' + l_1) + \tfrac{4}{3}\varepsilon\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3(B' + l_2).$$

Hieraus erhält man schliesslich, mit Berücksichtigung von 6), 7), 3) folgende Ausdrücke für die Componenten der Anziehung einer Kugelscheibe:

$$X = \tfrac{4}{3}\Big|_{h''}^{h'}\left[\frac{\alpha^3}{\sqrt{(\alpha^2 - h^2)(\varrho + \alpha^2)}}\left\{\left(\frac{3\alpha^2 + 2a^2 - \frac{a^2\alpha^2}{r^2} - 4ah}{\varrho_1 + \alpha^2} - \frac{2\alpha^2 b^2}{(\varrho_1 + \alpha^2)^2}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{2(\alpha^2 - h^2)}{\alpha^2}\right)(K - E) + \left(\frac{\left(a\frac{a\alpha^2}{r^2} - h\right)}{\varrho_1 + \alpha^2 - r^2} + \frac{(3h - 2a)(a-h)}{\varrho_1} + \frac{\alpha^2 - h^2}{\alpha^2}\right)K\right\}$$
$$\left. + \delta(3h - 2a)(A' + l_1) + \varepsilon a\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3(B' + l_2)\right] - \tfrac{4}{3}\pi\varepsilon' a\alpha^3(\alpha^2 + \sigma)^{-\frac{3}{2}},$$

$$Y = \tfrac{4}{3}b\Big|_{h''}^{h'}\left[\frac{\alpha^3}{\sqrt{(\alpha^2 - h^2)(\varrho + \alpha^2)}}\left\{\frac{2h - a - \frac{a\alpha^2}{r^2}}{\varrho_1 + \alpha^2}(K - E)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{a-h}{\varrho_1} + \frac{\frac{a\alpha}{r^2} - h}{\varrho_1 + \alpha^2 - r^2}\right)K\right\} + \delta(A' + l_1) + \varepsilon\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3(B' + l_2)\right]$$
$$- \tfrac{4}{3}\pi\varepsilon' b\alpha^3(\alpha^2 + \sigma)^{-\frac{3}{2}}.$$

In den vorstehenden Formeln ist $\sigma = 0$, wenn der angezogene Punkt innerhalb der vollständigen Kugel, hingegen $\sigma = r^2 - \alpha^2$, wenn er ausserhalb derselben liegt.

Ferner ist

$\delta = \pm 1$, je nachdem $a \gtrless h$,

$\varepsilon = \pm 1$ „ $a\left(\frac{\alpha}{r}\right)^2 \gtrless h$,

$\varepsilon' = 0$, wenn h'' und h' positiv, a negativ,

$\varepsilon' = \begin{cases}1\\0\end{cases}$ „ „ „ „ „ a positiv,

je nachdem σ innerhalb oder ausserhalb des Intervalles

$$\frac{\alpha^2(a - h'')}{h''} \text{ bis } \frac{\alpha^2(a - h')}{h'}$$

liegt;

$$\varepsilon' = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \text{ wenn } h'' \text{ positiv, } h \text{ negativ, } a \text{ positiv,}$$

je nachdem

$$\sigma \gtrless \frac{\alpha^2(a - h'')}{h''}.$$

Die Componenten der Anziehung, die eine Kugelcalotte auf einen Punkt ihres Randes ausübt, lassen sich mit Hilfe einer cyklometrischen Function ausdrücken. In diesem Fall ist nämlich

$$h'' = \alpha, \quad h' = a, \quad a^2 + b^2 = \alpha^2.$$

Die ursprünglichen Formeln für P und Q (Art. 4) sind jetzt

$$P \parallel 2\alpha^4 \int_0^\infty \frac{ds}{s(\alpha^2 + s)^2} \int_{g_0}^{g} \frac{x\,dx}{\sqrt{S - x^2}}$$

$$Q \parallel -2\alpha^3 \int_0^\infty \frac{ds}{(\alpha^2 + s)^{\frac{3}{2}}} \int_{g_0}^{g} \frac{dx}{\sqrt{S - x^2}}$$

$$g = \frac{\alpha(\alpha - a) + s}{\sqrt{\alpha^2 + s}}, \qquad g_0 = \frac{as}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + s}}, \qquad S = \frac{s^2}{\alpha^2 + s},$$

woraus man leicht

$$P = \tfrac{4}{3} b, \quad Q = -\tfrac{4}{3} \arccos \frac{a}{\alpha}$$

erhält. Folglich sind die Componenten der Anziehung, die eine Kugelcalotte auf einen Punkt ihres Randes ausübt,

$$X = \tfrac{4}{3} b - \tfrac{4}{3} a \arccos \frac{a}{\alpha},$$

$$Y = \quad - \tfrac{4}{3} b \arccos \frac{a}{\alpha}.$$

Setzt man in diesen Formeln $a = 0$, $b = \alpha$, so erhält man die Componenten der Anziehung, die eine Halbkugel auf einen Punkt ihres Randes ausübt, nämlich

$$X = \tfrac{4}{3}\alpha,$$
$$Y = -\tfrac{2}{3}\pi\alpha.$$

Die X-Componente ist also auf dem Rande einer Halbkugel rational ausdrückbar.

Für die Componenten der Anziehung, die ein unendlich hoher Cylinder mit dem Radius α auf einen Punkt seines Randes ausübt, sind die Formeln

$$X = 4\alpha, \quad Y = -\pi\alpha.$$

(Vergl. diese Zeitschrift 8. Jahrgang, S. 354.)

Es ist also die senkrecht zur Basis gerichtete Componente der Anziehung, die eine Halbkugel auf einen Punkt ihres Randes ausübt, gleich dem dritten Theile der gleichgerichteten Componente der Anziehung, die ein unendlich hoher Cylinder von demselben Radius auf einen Punkt seines Randes ausübt; und die Componente in der Richtung der Basis ist auf dem Kugelrande gleich $\frac{2}{3}$ von der Componente in der Richtung der Basis auf dem Cylinderrande.

Schleswig, im December 1868.

XII.

Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Conductoren.

Von

Dr. TH. KÖTTERITZSCH,

Gymnasialoberlehrer zu Grimma.

---

§ 9.

Bestimmung der noch zu lösenden Aufgabe.

In meinem früheren, Band 13 pag. 120 — 147 dieser Zeitschrift abgedruckten Aufsatze über die Frage: „Wie sind elektrische Massen auf der Axe eines Systems von, von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe umschlossenen und einander nicht einschliessenden Conductoren anzuordnen, wenn dieselben zur Ermittelung der elektrischen Dichtheit auf den Conductoren benützt werden sollen?" war ich zu dem Resultate gelangt, dass die elektrische Dichtheit an irgend einer Stelle der Oberfläche eines der gegebenen Conductoren analytisch angegeben werden kann in Form eines Differentialquotienten eines bestimmten Integrales, das vollständig bekannt ist, sobald man q Functionen W (wenn q die Anzahl der Conductoren ist) angeben kann, die folgende Eigenschaften haben:

1. sie müssen Functionen von μ und x (y und y') sein, wobei x die Abscisse (y die Ordinate und $y'=\frac{dy}{dx}$) des Punktes ist, auf welchen das Potential der zu bestimmenden elektrischen Massenvertheilung ausgeübt wird;

2. sie werden unendlich für jeden reellen ganzzahligen Werth von μ;

3. sie werden Null für $\mu = \pm\infty$;

4. sie sind endlich und stetig für Werthe von μ, die nicht unter den Fall 2 gehören, auch wenn μ eine endliche complexe Grösse ist;

5. ihre reellen Theile sind gerade, ihre imaginären ungerade Functionen von μ;

6. sie werden unendlich, sobald $\mu = \pm i\infty + l$, wenn l eine endliche Grösse bedeutet;

7. sie verschwinden für x (oder y) gleich $\pm\infty$, μ endlich;

8. das in Bezug auf μ von ihnen zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ genommene Integral verschwindet identisch.

Diese Functionen W sind in der früheren Abhandlung ihrer allgemeinen Form nach angegeben worden auf Seite 142 durch die Gleichungen 13, 14, 15, und 16. Jetzt soll nun die in § 8 versprochene Bestimmung der Functionen W selbst geschehen.

§ 10.

Einfachste Form der Functionen W.

Es war $c_s W_s$ eine Function von μ und x, die aus dem Ausdrucke

$$\text{A)} \quad \sum_1^q {}_p \int_{-h_p}^{+h_p} f_p(\varrho)\,[x + b_p - \varrho + y y']\,[(x + b_p - \varrho)^2 + y^2]^{-\frac{3}{2}}\, d\varrho$$

dadurch hervorging, dass man in ihm y und y' mit Hilfe der auf die Meridiancurve des s^{ten} Conductors bezüglichen Gleichungen

$$y = \varphi_s(x)$$
$$y' = \varphi_s'(x)$$

eliminirte (diese Elimination ist für die Folge ohne Belang, wir werden daher auf sie weiter kein Gewicht mehr legen); ferner $f_p(\varrho)$ in eine für das Intervall der Integrationsgrenzen, $2h_p$, giltige Fourier'sche Reihe entwickelte und in dieser Entwickelung statt des Stellenindexes n die complexe Variable μ einführte.

Es wurde dann, um für eine später nach dieser complexen Variablen μ erfolgende Integration nicht an ungehörigen Stellen unendliche Functionswerthe zu bekommen, dieses über den Ausdruck A) genommene Integral nach § 5, 11 und 12 in die beiden Integrale Z_1 und Z_2 zerlegt.

Man kann, wie leicht ersichtlich, diesen Uebelstand einfach dadurch umgehen, dass man in Bezug auf die Integration nach μ eine geschlossene Curve wählt, die nirgends nach der imaginären Seite hin in's Unendliche reicht.

Multiplicirt man nun noch den Ausdruck A) mit

$$\text{B)} \qquad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu - 1} + \frac{1}{\mu + 1} + \frac{1}{\mu - 2} + \frac{1}{\mu + 2} + \cdots,$$

so erfüllt derselbe alle Bedingungen 1 bis 7, die in § 9 an ihn gestellt wurden, wenn der Ausdruck A) innerhalb der Integrationsgrenze endlich bleibt.

Statt des anzuwendenden Factors B) kann man aber auch schreiben:

$$\frac{1}{\mu} + 2\mu\left[\frac{1}{\mu^2 - 1^2} + \frac{1}{\mu^2 - 2^2} + \frac{1}{\mu^2 - 3^2} + \cdots\right].$$

Vergleicht man hiermit die Entwickelung

$$\pi \, ctg\,(\mu\pi) = \frac{1}{\mu} + 2\mu\left[\frac{1}{\mu^2 - 1^2} + \frac{1}{\mu^2 - 2^2} + \frac{1}{\mu^2 - 3^2} + \cdots\right],$$

so erkennt man, dass statt des Factors B) einfach geschrieben werden kann

C) $$\pi \, ctg\,(\mu\pi).$$

Führen wir ferner in dem Ausdrucke A statt ϱ die Variable $\frac{h_p}{\pi}\varrho$ ein, so verwandelt sich derselbe in:

D) $$\sum_1^q {}_p \frac{h_p}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)\left[x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho + yy'\right]\left[\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2\right]^{-\frac{3}{2}} d\varrho.$$

Es ergiebt nun weiter die Entwickelung von $f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)$ in eine Fourier'sche Reihe die Entwickelungen:

$$f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n \, a_n^p \, e^{n\varrho i}$$

$$a_n^p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right) e^{-n\varrho i}\, d\varrho,$$

setzt man in diesen beiden Gleichungen statt n die complexe Variable μ und stellt die gefundenen Ausdrücke zusammen, wie verlangt wird, damit die Function $c_s\, W_s$ hervorgehe, so erscheint:

$$c_s W_s = \sum_1^q {}_p \frac{h_p}{\pi} a_\mu^p \,\pi\, ctg\,(\mu\pi)$$

$$b_p h_p \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\mu\varrho i}\left[x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho + yy'\right]\left[\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2\right]^{-\frac{3}{2}} d\varrho.$$

Die Bedingung 8 § 9 verlangt nun das Bestehen der Relation

1) $$c_s\int W_s\, d\mu = \int \sum_1^q {}_p h_p \, a_\mu^p \, ctg\,(\mu\pi)$$

$$b_p h_p \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\mu\varrho i}\left[x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho + yy'\right]\left[\left(x + b_p - \frac{b_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2\right]^{-\frac{3}{2}} d\varrho\, d\mu \equiv 0.$$

Diese Gleichung 1) gilt nun nach ihrer bisherigen Herleitung unter den Bedingungen, dass

1. die für die Integration nach μ giltige Integrationscurve die reelle Axe in der Art umschliesst, dass sie allenthalben in endlicher Entfernung von ihr bleibt;

2. die Functionen a_μ^p innerhalb der Integrationscurve allenthalben synectisch bleiben, und

3. die Integrationscurve beliebig verengert werden kann, wenn sie nur

alle Punkte, für welche μ eine reelle ganze Zahl ist, einfach umschliesst und wenn alle ihre Punkte in endlicher Entfernung von der reellen Axe bleiben.

Wenn wir später diese Integrationscurve so abändern, dass sie nur solche kreisförmige, unendlich kleine Flächenstücke umschliesst, die um die in der Bedingung 3 genannten Punkte als Mittelpunkte herumliegen, so können wir auch jetzt ohne Weiteres die Integration nach ϱ ausführen, wenn wir uns in der hier zu integrirenden Function statt μ n restituirt denken, wenn wir nur nach geschehener Integration statt n wieder μ schreiben.

Zur Ausführung der Integration entwickeln wir noch:

$$2)\quad\left\{\begin{aligned} &\left[x+bp-\frac{h_p}{\pi}\varrho+yy'\right]\left[\left(x+bp-\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}} \\ &\qquad=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m A_m^p e^{m\varrho i} \\ &A_m^p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[x+b_p-\frac{h_p}{\pi}\varrho+yy'\right] \\ &\qquad\qquad\left[\left(x+b_p\,\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2+y^2\right]^{-\frac{3}{2}} e^{-m\varrho i}\,d\varrho \end{aligned}\right.$$

und setzen diese Entwickelung in die Gleichung 1) ein. Die Integration gelingt nun leicht mit Hilfe der Formeln

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{n\varrho i} e^{m\varrho i}\,d\varrho=\begin{cases}0 \text{ je nachdem } m \lessgtr n\\ 2\pi \text{ je nachdem } m=n\end{cases}$$

und demnach

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, a_n^p\, A_m^p\int_{-\pi}^{+\pi} e^{n\varrho i} e^{m\varrho i}\,d\varrho=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, 2\pi\, a_n^p\, A_n^p.$$

Führen wir also nun nach diesen Formeln die Integration nach ϱ in der Gleichung 1) aus und setzen hierauf statt n wieder μ, so entsteht:

$$3)\qquad \frac{c_s}{2\pi}\int W_s\,d\mu=\int\sum_1^q{}_p\, h_p\, a_\mu^p\, A_\mu^p\, ctg\,(\mu\pi)\,d\mu\equiv 0.$$

Dieses ist die allgemeinste und einfachste Form, die die Bedingungsgleichung zur Bestimmung der Function W_s annehmen kann. In der Gleichung 3) braucht nun die Integrationscurve nur noch alle die Punkte einfach zu umschliessen, für welche μ eine reelle ganze Zahl ist.

Solcher Gleichungen von der Form 3) giebt es überhaupt q, indem s alle Werthe von 1 bis q zu durchlaufen hat. Es sind nun diese q Gleichungen von der Form 3) gerade diejenigen, welche uns die q Functionen W_s liefern sollen.

§ 11.
Bestimmung der Functionen W_s.

Soll die Gleichung 3) § 10 für jedes beliebige x bestehen, so ist dies offenbar nur möglich, wenn die linker Hand nach μ zu integrirenden Functionen selbst der Null identisch gleich sind. Wollte man aber ohne Weiteres diese Functionen der Null gleich setzen, so müsste sein

$$a_\mu^p = 0,$$

also auch

$$fp\left(\frac{hp}{\pi}\varrho\right) = 0.$$

Dies wäre aber eine von den Lösungen des Problems, die wir § 4 als unbrauchbar ausgeschlossen haben; in gleicher Weise, wie wenn wir die auch der Gleichung 3) § 10 genügende Annahme machen wollten:

$$h_p = 0.$$

Soll nun dennoch die Gleichung 3) §. 10 bestehen, indem die nach μ zu integrirende Function eine Function von x (y und y') ist, so ist dies nur möglich, wenn nach erfolgter Integration die Function linker Hand eine solche Form hat, dass sie die linke Seite der auf 0 reducirten Differentialgleichung der Meridiancurve des s^{ten} Conductors

$$y' - \varphi'_s(x) = 0$$

als Factor enthält, während sämmtliche übrige etwa noch vorkommende Factoren endlich und von Null verschieden bleiben. Fassen wir dieselben zusammen in der Form

$$\Psi_s(x, y, y'),$$

so gilt also jetzt die Gleichung:

$$4)\quad \frac{c_s}{2\pi}\int W_s\, d\mu = \int \sum_1^q{}^p\, h_p\, a_\mu^p\, A_\mu^p\, ctg(\mu\pi)\, d\mu = \Psi_s(x,y,y')\,[y - \varphi_s'(x)].$$

Gesetzt nun, man besässe die Lösung des analytischen Problems, irgend eine Function dreier Variablen $F(\alpha, \beta, \gamma)$ in eine Reihe zu entwickeln von der Form

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = a_0 f_0(\alpha,\beta,\gamma) + a_1 f_1(\alpha,\beta,\gamma) + a_{-1} f_{-1}(\alpha,\beta,\gamma) \\ + \ldots + a_n f_n(\alpha,\beta,\gamma) + a_{-n} f_{-n}(\alpha,\beta,\gamma) + \ldots,$$

wo die f Functionszeichen sind für Functionen der drei Variablen α, β, γ, die aus einer allgemeineren Function von α, β, γ und n folgen, indem man dem n nach und nach alle ganzzahligen reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, während die a von α, β und γ unabhängig sind. Alsdann könnte man das Gesetz dieser Entwickelung auf die Function

$$\Psi_s(x, y, y')\,[y' - \varphi_s'(x)]$$

anwenden, indem man noch den Factor $\Psi_s(x, y, y')$ der Bequemlichkeit der Rechnung entsprechend wählte, und entwickeln nach den Functionen

$$\sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_n^p A_n^p,$$

wo die A_n^p durch die Gleichungen 2) § 10 definirt sind, die δ aber vor der Hand noch unbestimmte Coefficienten bedeuten mögen. Während aber die A_n^p einen verschiedenen Werth haben je nach dem Conductor, auf den sie sich beziehen, oder in Bezug auf dessen Differentialgleichung der Meridiancurve die Entwickelung vorgenommen wird, so mögen die δ davon unabhängig sein, ebenso wie von x, y und y'. Genauer angedeutet entwickeln wir also

$$\Psi_1(x,y,y')\,[y'-\varphi_1'(x)] \text{ nach } \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,1}^{p} A_n^p$$

$$\Psi_2(x,y,y')\,[y'-\varphi_2'(x)] \quad \text{„} \quad \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,2}^{p} A_n^p$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Psi_q(x,y,y')\,[y'-\varphi_q'(x)] \quad \text{„} \quad \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,q}^{p} A_n^p.$$

Führen wir nun die Entwickelung nach dem oben angegebenen vorausgesetzten Entwickelungsgesetz aus, indem wir die Entwickelungscoefficienten mit b bezeichnen, so entsteht

$$\text{E)}\quad \begin{cases} \Psi_1(x,y,y')\,[y'-\varphi_1'(x)] = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_1b_n \left\{\delta_{n\,1}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,1}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,1}^{q} A_n^q\right\} \\ \Psi_2(x,y,y')\,[y'-\varphi_2'(x)] = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_2b_n \left\{\delta_{n\,2}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,2}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,2}^{q} A_n^q\right\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_q(x,y,y')\,[y'-\varphi_q'(x)] = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_qb_n \left\{\delta_{n\,q}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,q}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,q}^{q} A_n^q\right\}. \end{cases}$$

Bei dieser Entwickelung werden die Coefficienten b auch mit von den jetzt noch unbestimmten constanten Werthen δ abhängen. Wir bestimmen nun diese unbekannten constanten Werthe δ durch die Bedingung, dass die Entwickelung der linksstehenden Functionen durch die in { } eingeschlossenen Werthe schon angegeben werde, dass also gelte:

$$\text{F)}\quad \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_1b_n \left\{\delta_{n\,1}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,1}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,1}^{q} A_n^q\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,1} A_n^p \\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_2b_n \left\{\delta_{n\,2}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,2}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,2}^{q} A_n^q\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,2}^{p} A_n^p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n}\; {}_qb_n \left\{\delta_{n\,q}^{1} A_n^1 + \delta_{n\,q}^{2} A_n^2 + \ldots + \delta_{n\,q}^{q} A_n^q\right\} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{n} \sum_{1}^{q}{}_{p}\, \delta_{n\,q}^{p} A_n^q. \end{cases}$$

Aus dem Systeme F) zieht man nun so viele Systeme von je q Gleichungen zur Bestimmung der δ, als die Anzahl der möglichen Entwickelungen E) überhaupt beträgt, und es giebt auch ebenso viele Systeme F) selbst.

Es möge eines dieser möglichen Systeme dargestellt werden durch F) selbst, so erhält man aus F)

$$\text{G)} \quad \begin{cases} {}_1b_n = 1 \\ {}_2b_n = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ {}_qb_n = 1. \end{cases}$$

Wir bestimmen aus dem Gleichungensysteme G) von q Gleichungen die q-Werthe $\overset{1}{\delta}_n, \overset{2}{\delta}_n, \overset{3}{\delta}_n \dots \overset{q}{\delta}_n$ und es möge entstehen

$$\text{H)} \quad \begin{cases} \overset{1}{\delta}_n = \overset{1}{\varepsilon}_n \\ \overset{2}{\delta}_n = \overset{2}{\varepsilon}_n \\ \overset{3}{\delta}_n = \overset{3}{\varepsilon}_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \overset{q}{\delta}_n = \overset{q}{\varepsilon}_n. \end{cases}$$

Vermittelst des Gleichungensystems H) erlangt man nun, wenn man zugleich die Gleichung 4) berücksichtigt, nachdem dort die Integration nach μ ausgeführt ist:

$$\text{J)} \quad \frac{c_s}{2\pi}\int W_s\, d\mu = 2i\sum_1^q{}^p h_p \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \overset{p}{a}_n \overset{p}{A}_n = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n \sum_1^q{}^p \overset{p}{\varepsilon}_n \overset{p}{A}_n.$$

Eine Auflösung dieser identischen Gleichung ist jedenfalls

$$5) \quad 2i\sum_1^q{}^p h_p \overset{p}{a}_n \overset{p}{A}_n = \sum_1^q{}^p \overset{p}{\varepsilon}_n \overset{p}{A}_n.$$

Oder es ist, wenn wir statt n wieder die complexe Variable μ schreiben und die Gleichung 3) § 10 berücksichtigen,

$$6) \quad c_s W_s = 2\pi\sum_1^q{}^p h_p \overset{p}{a}_\mu \overset{p}{A}_\mu \, ctg(\mu\pi) = \frac{2\pi}{2i}\sum_1^q{}^p \overset{p}{\varepsilon}_\mu \overset{p}{A}_\mu \, ctg(\mu\pi).$$

Setzt man den so gefundenen Werth von $c_s W_s$ in das System linearer Gleichungen der $\overset{s}{X}_p X_p$ des § 6 der früheren Abhandlung ein, so folgt, wie leicht ersichtlich

$$7) \quad h_p \overset{p}{a}_\mu = \frac{1}{2i} \overset{p}{\varepsilon}_\mu,$$

also auch

$$8) \quad \overset{p}{a}_\mu = \frac{1}{2i\, h_p} \overset{p}{\varepsilon}_\mu$$

und

$$9)\qquad \overset{p}{a}_n = -\frac{1}{4\pi h p}\, \overset{p}{s}_\mu \int \frac{\overset{p}{s}_\mu\, d\mu}{\mu - n}$$

das Integral ausgedehnt über einen kleinen Kreis, der unter den Punkt $\mu = n$ als Mittelpunkt beschrieben ist.

Durch die Gleichung 9) hat nun unser Problem seine vollständige Lösung gefunden.

Die Existenz der Gleichung 9) hängt ab von der Möglichkeit der Entwickelung einer Function, wie sie oben für $F(\alpha, \beta, \gamma)$ angenommen wurde, die Anzahl der verschiedenen Entwickelungen der Function $F(\alpha, \beta, \gamma)$ nach dem oben angenommenen Gesetze multiplicirt mit der Anzahl der verschiedenen Lösungen, welche man, wie oben die Gleichung 5) aus der Gleichung J) ziehen kann, giebt an, auf wie vielerlei Art das vorgelegte Problem einer Lösung fähig ist.*)

Die für den jetzigen Standpunkt der Analysis noch ungerechtfertigte Annahme einer Entwickelung einer Function nach dem obigen Gesetz veranlasst uns, noch ein anderes Mittel zur Beschaffung der Functionen W, oder was dasselbe ist, der Gleichungen 9) anzugeben.

Es sei die auf 0 reducirte und noch mit einem stets endlich und von Null verschieden bleibenden, vor der Hand beliebigen Factor multiplicirte Gleichung der Meridiancurve des s^{ten} Conductors

$$10)\qquad \Phi_s(x, y) = 0.$$

Ferner die auf Null reducirte und mit einem vor der Hand beliebigen, stets endlichen und von Null verschieden bleibenden Factor multiplicirte Differentialgleichung derselben Curve:

$$11)\qquad \Phi'_s(x, y, y') = 0.$$

Oder wenn wir die Constanten, welche in den Gleichungen 10) und 11) vorkommen, mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$ bezeichnen, so wird aus der Gleichung 10)

$$12)\qquad \Phi_s(x, y, a_1, a_2, a_3 \ldots) = 0,$$

aus der Gleichung 11)

$$13)\qquad \Phi'_s(x, y, y', a_1, a_2, a_3 \ldots) = 0.$$

Die Grössen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ sind nun nur insofern Constanten, als sie durch kein analytisches Gesetz mit den variablen Grössen x, y, y' in Verbindung stehen, ebenso wenig wie unter einander (wenn nicht eine Bedingung für die Existenz der Gleichungen 10) und 11) etwa die Constanten a mit einander in Beziehung bringt).

*) Es ist von Interesse, zu bemerken, dass der allgemeine Gang dieser unserer Untersuchung zu der Erwartung berechtigt, dass jede Untersuchung, namentlich über physikalische Probleme, bei denen man aus einem angenommenen Gesetze experimentelle Thatsachen analytisch quantitativ zu erklären sucht, auf Resultate führen werden, die dem eben gewonnenen ganz ähnlich sind.

Eine solche Nichtexistenz von Relationen für die Grössen a ist aber nicht ein Kennzeichen dafür, dass überhaupt nie welche existirt haben, sondern nur dafür, dass mit diesen Relationen bestimmte analytische Operationen vorgenommen worden sind.

So können z. B. die Grössen a ursprünglich zu denken sein als Functionen einer Variablen k in der Form:

$$ {}_1a_1 = \psi_1(k); \quad {}_2a_2 = \psi_2(k); \quad {}_3a_3 = \psi_3(k) \ldots {}^{*)}, $$

so dass die Gleichungen 12) und 13) ursprünglich die Gestalt hatten:

$$ 14) \qquad \Phi_s[x, y, \psi_1(k), \psi_2(k), \psi_3(k), \ldots] = \chi(k), $$

$$ 15) \qquad \Phi'_s[x, y, y', \psi_1(k), \psi_2(k), \psi_3(k) \ldots] = 0 $$

und aus denen die Gleichungen 12) und 13) nun z. B. wieder hervorgehen können, wenn man der Variablen k einen bestimmten Werth, etwa k_0 beilegt.

Es ist wichtig, zu bemerken, dass es nicht unbedingte Erforderniss ist, dass die Functionen ψ frei von den willkürlichen Variablen x, y oder y' wären, sondern es können die Functionen ψ diese Variablen auch enthalten, wenn nur durch Substitution des Werthes k_0 für k aus dem Systeme von Gleichungen

$$ {}_1a_1 = \psi_1(k), \quad {}_2a_2 = \psi_2(k), \quad {}_3a_3 = \psi_3(k) \ \ldots $$

folgt

$$ a_1 = \psi_1(k_0), \quad a_2 = \psi_2(k_0), \quad a_3 = \psi_3(k_0) \ldots 0 = \chi(k_0). $$

Betrachtet man die Gleichungen 12), 13), 14), 15) von diesem Gesichtspunkte aus, so erkennt man, dass die Gleichungen 12) und 13) nur als die Individuen einer umfangreichen Gruppe von Gleichungen zu betrachten sind, die alle aus den Gleichungen 14) und 15) hervorgehen, wenn man der Variablen k nach und nach alle Werthe beilegt, die sie überhaupt anzunehmen fähig ist.

Die eben angeführte Entstehungsweise der Gleichungen 12) und 13) aus 14) und 15) kann nun noch viel mehr verallgemeinert werden, wenn man verlangt, dass mehrere specielle Gleichungen, die aus den Gleichungen 14) und 15) dadurch folgen, dass man der Variablen k mehrere specielle Werthe k_1, k_2, k_3 ... beilegt, nach irgend einem analytischen Gesetz (das vorher gegeben ist) verknüpft**) werden. Für uns ist namentlich der Fall wichtig, wo die Gleichungen 12) und 13) aus den Gleichungen 14) und 15) dadurch hervorgehen, dass man das, was aus den Gleichungen 14) und 15) wird,

*) Der links stehende Index der a soll andeuten, dass diese Werthe von a im Allgemeinen verschieden sind von den Werthen von a mit nur Einem (rechten) Index.

**) Diese Betrachtung ist für physikalische Körper äusserst wichtig, weil es keine einzige physikalische Fläche giebt, die sich nicht nach einem bestimmten Gesetz änderte, wenn die Einflüsse von Druck, Temperatur etc. auf sie andere werden.

wenn man darin einmal $k=k_1$, dann $k=k_2$ setzt, wo k_1 und k_2 zwei bestimmte Werthe sind, von einander abzieht. Oder wenn

16) $$\Phi_s(x, y, a_1, a_2, a_3 \ldots) = \Phi_s[x, y, \psi_1(k_2), \psi_2(k_2), \psi_3(k_2) \ldots] - \Phi_s[x, y, \psi_1(k_1), \psi_2(k_2), \psi_3(k_1) \ldots] = {}_sb,$$

wo ${}_sb$ nun ein constanter Werth ist

17) $$\Phi'_s(x, y, y', a_1, a_2, a_3 \ldots) = \Phi'_s[x, y, y', \psi_1(k_1), \psi_2(k_2), \psi_3(k_2) \ldots] - \Phi'_s[x, y, y', \psi_1(k_1), \psi_2(k_1), \psi_3(k_1) \ldots] = 0.$$

Die Gleichungen 16) und 17) können nun leicht auf die Form gebracht werden:

18) $$\Phi_s(x, y, a_1, a_2, a_3 \ldots) = \int\limits_{k_1}^{k_2} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial k} + \frac{\partial \Phi_s}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial k} + \ldots \right) dk = {}_sb,$$

19) $$\Phi'_s(x, y, y', a_1, a_2, a_3 \ldots) = \int\limits_{k_1}^{k_2} \left(\frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_1} \frac{\partial a_1}{\partial k} + \frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_2} \frac{\partial a_2}{\partial k} + \ldots \right) dk = 0.$$

Wir substituiren nun auf der rechten Seite dieser Gleichungen 18) und 19) für k eine neue Variable ϱ nach dem Zusammenhange

$$k = g_s(\varrho),$$

wo die Function $g_s(\varrho)$ vor der Hand allein den Bedingungen unterworfen sein möge

$$k_2 = g_s(\pi)$$
$$k_1 = g_s(-\pi).$$
$$\frac{\partial g_s(\varrho)}{\partial \varrho} = g'_s(\varrho)$$

endlich und stetig für

$$-\pi \leq \varrho \leq +\pi.$$

Ist dann weiter zur Abkürzung

$$\frac{\partial a_1}{\partial k} = \frac{\partial \psi_1(k)}{\partial k} = {}_1\psi(\varrho); \quad \frac{\partial a_2}{\partial k} = \frac{\partial \psi_2(k)}{\partial k} = {}_2\psi(\varrho),$$
$$\frac{\partial a_3}{\partial k} = \frac{\partial \psi_3(k)}{\partial k} = {}_3\psi(\varrho); \ldots$$
$$dk = \frac{\partial g_s(\varrho)}{\partial \varrho} d\varrho = g'_s(\varrho)\, d\varrho,$$

so wird aus den Gleichungen 18) und 19):

20) $$\Phi_s(x, y, a_1, a_2, a_3 \ldots) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial a_1} {}_1\psi(\varrho) + \frac{\partial \Phi_s}{\partial a_2} {}_2\psi(\varrho) + \ldots \right) g'_s(\varrho)\, d\varrho = {}_sb,$$

21) $$\Phi'_s(x, y, y', a_1, a_2, a_3 \ldots) = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_1} {}_1\psi(\varrho) + \frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_2} {}_2\psi(\varrho) + \ldots \right) g'_s(\varrho)\, d\varrho = 0.$$

In diesen beiden Gleichungen 20) und 21) ist nun in den Functionen

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial a_1}, \frac{\partial \Phi_s}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_1}, \frac{\partial \Phi'_s}{\partial a_2} \cdots k$$

ersetzt zu denken durch ϱ nach der Relation $k = g_s(\varrho)$ und die Functionen ${}_s\psi(\varrho)$, ${}_s\psi(\varrho)$, ... ebenso wie $g_s(\varrho)$ und $g'_s(\varrho)$ können auch die Grössen x, y oder y' enthalten, wenn sie nur den Bedingungen 20) oder 21) genügen.

Kann man nun den bis jetzt noch ausserordentlich beliebig gelassenen Functionen ${}_1\psi(\varrho)$, ${}_2\psi(\varrho)$, ... $g_s(\varrho)$ eine solche Form geben, dass entweder die rechte Seite der Gleichung 20) die Gestalt annimmt

$$\text{K)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_1^q {}_p \frac{f_p(\varrho)\, d\varrho}{\sqrt{\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2}} = {}_s b,$$

oder die rechte Seite der Gleichung 21) die Gestalt:

$$\text{L)} \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sum_1^q {}_p \frac{f_p(\varrho)\left[x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho + y y'\right]}{\sqrt{\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2}}\, {}_s d\varrho = 0,$$

wobei die Functionen f nur Functionen von ϱ sind, so ist man damit auf frühere Formeln in §§ 4 und 5 zurückgekommen und die Functionen $f_p(\varrho)$ sind gerade, abgesehen von einer in dieselben multiplicirten Constanten, die gesuchten, welche das Gesetz für die zu substituirende elektrische Massenvertheilung auf der Rotationsaxe angeben.

Die in Gleichung 9) bestimmten a_n^p sind nichts weiter als die Coefficienten der Entwickelung von $f_p(\varrho)$ in eine Fourier'sche Reihe, giltig für das Intervall

$$-\pi < \varrho < +\pi.$$

Die Möglichkeit und die Anzahl der verschiedenen Lösungen des Problemes ist zusammenfallend mit der Möglichkeit und der Anzahl der Lösungen, die Gleichungen der Meridiancurven aller q Conductoren auf die Form K) oder die Differentialgleichungen derselben auf die Form L) zu bringen.

Die Lösungen der in diesem Paragraphen gestellten Aufgabe sind nun überhaupt nur brauchbar, so lange für irgend einen, z. B. den p^{ten} Conductor h_p und b_p so gewählt werden kann, dass die mit elektrischer Masse zu belegende Axenstrecke noch vollständig innerhalb des Conductors liegt.

Hinsichtlich der Bestimmung der constanten Factoren, welche in die a_n^p der Gleichung 9) oder in die Functionen $f_p(\varrho)$ der Ausdrücke K) und L) multiplicirt zu denken sind, verweise ich auf das am Ende von § 6 Gesagte.

Wir wenden noch das eben Gesagte auf zwei Beispiele an:

I. Es soll die elektrische Dichtheit auf einem Conductor bestimmt werden, dem man die Elektricitätsmenge $+M$ mitgetheilt hat und dessen Meridiancurve die Gleichung besitzt:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}-\sqrt{(x-l)^2+y^2}+x\,l\,\frac{a-x+\sqrt{(a-x)^2+y^2}}{l-x+\sqrt{(l-x)^2+y^2}}=c.$$

Diese Gleichung hat bereits die Form von 16), wenn man schreibt:

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}+x\,l\,[a-x+\sqrt{(a-x)^2+y^2}]$$
$$-\sqrt{(x-l)^2+y^2}-x\,l\,[l-x+\sqrt{(l-x)^2+y^2}]=c,$$

oder in der Form von 18):

$$\int\limits_l^a \frac{\varkappa k\, dk}{\sqrt{(x-k)^2+y^2}}=c,$$

also nach 19):

$$\int\limits_l^a \frac{\varkappa \varrho\,[x-k+yy']}{\sqrt{(x-k)^2+y^2}^3}\,d\varkappa=0$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varkappa\frac{a-l}{2\pi}\left(\frac{a+l}{2}+\frac{a-l}{2\pi}\varrho\right)\frac{\left(x-\frac{a+l}{2}-\frac{a-l}{2\pi}\varrho+yy'\right)d\varrho}{\sqrt{\left(x-\frac{a+l}{2}-\frac{a-l}{2\pi}\varrho\right)^2+y^2}^3}.$$

Da hiermit die Form L) [oder K)] bereits hergestellt ist, so ist die zu bestimmende Function $f(\varrho)$ bereits gegeben in der Gestalt:

$$f(\varrho)=\varkappa\frac{a-l}{2\pi}\left(\frac{a+l}{2}+\frac{a-l}{2\pi}\varrho\right)$$

mit den weiteren Folgerungen

$$b=-\frac{a+l}{2},$$

$$h=\frac{a-l}{2},$$

und zur Bestimmung von $\varkappa$:

$$M=\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\varrho)\,d\varrho=\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\varkappa\frac{a-l}{2\pi}\left(\frac{a+l}{2}+\frac{a-l}{2\pi}\varrho\right)d\varrho=\varkappa\,.\,\frac{a^2-l^2}{2},$$

also

$$\varkappa=\frac{2M}{a^2-l^2}.$$

Somit ist nun $f(\varrho)$ bekannt in der Form:

$$f(\varrho)=\frac{M}{\pi(a+l)}\left(\frac{a+l}{2}+\frac{a-l}{2\pi}\varrho\right)$$

und die elektrische Dichtheit auf dem gegebenen Conductor kann nun leicht nach § 1 bestimmt werden.

II. Es soll die elektrische Dichtheit auf einem Rotationsellipsoid bestimmt werden, dem man die Elektricitätsmenge $+M$ mitgetheilt hat und dessen Meridiancurve die Gleichung besitzt

$$\text{I)} \qquad \alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 = \alpha^2 \beta^2.$$

Um diese Gleichung I) auf die Form von 16) zu bringen, führen wir zunächst statt α und β zwei andere Constanten ε und δ ein, indem wir setzen:

$$\alpha^2 = \frac{4\varepsilon^2\delta}{(1-\delta)^2}; \quad \beta^2 = \varepsilon^2\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^2.$$

Die dann aus I) entstehende Gleichung:

$$\text{II)} \qquad (1-\delta^2)^2 y^2 + 4\delta(1-\delta)^2 x^2 = 4\delta(1+\delta)\varepsilon^2$$

kann auf die Form gebracht werden:

$$\frac{-x+\varepsilon+\sqrt{(x-\varepsilon)^2+y^2}}{-x-\varepsilon+\sqrt{(x+\varepsilon)^2+y^2}} = \delta,$$

oder:

$$l\left[-x+\varepsilon+\sqrt{(x-\varepsilon)^2+y^2}\right] - l\left[-x-\varepsilon+\sqrt{(x+\varepsilon)^2+y^2}\right] = l\delta,$$

womit die Form 16) gewonnen ist, aus der leicht die Form von 18) hervorgeht in der Gestalt:

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\varkappa\,dk}{\sqrt{(x-k)^2+y^2}} = l\delta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\frac{\varkappa}{\pi}\varepsilon\,d\varrho}{\sqrt{\left(x-\frac{\varepsilon}{\pi}\varrho\right)^2+y^2}}$$

mit der Differentialgleichung:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\frac{\varkappa}{\pi}\varepsilon\left[x-\frac{\varepsilon}{\pi}\varrho+yy'\right]}{\sqrt{\left(x-\frac{\varepsilon}{\pi}\varrho\right)^2+y^2}^{\,3}}\,d\varrho = 0.$$

Hieraus folgt:

$$f(\varrho) = \varkappa\frac{\varepsilon}{\pi} = Const.$$

$$b = 0,$$

$$h = \varepsilon.$$

Zur Bestimmung von $\varkappa$ hat man

$$M = \int_{-\pi}^{+\pi} \varkappa\frac{\varepsilon}{\pi}\,d\varrho = 2\varkappa\varepsilon;$$

also

$$\varkappa = \frac{M}{2\varepsilon}.$$

Es ist nun leicht, die elektrische Dichtheit auf dem Rotationsellipsoid nach § 1 zu bestimmen.

§ 12.

Darstellung von U.

Es ist im Verlaufe dieser Arbeit immer Rücksicht genommen worden auf eine gewisse Form von U, auf die das Potential stets gebracht werden konnte, so lange überhaupt das vorgelegte Problem lösbar war. Es scheint daher nicht am unrechten Orte, diese Form hier noch genauer zu betrachten, zumal sie für die wirkliche mathematische Bestimmung der Vertheilung der Elektricität auf den Conductoren so äusserst wichtig ist.

Wir legen hierfür die Entwickelungen des § 5 zu Grunde.

Es war nach § 4, 1.

$$U_s = \sum_1^q {}_p \int_{-h_p}^{+h_p} \frac{f_p(\varrho)\, d\varrho}{\sqrt{(x + b_p - \varrho)^2 + y^2}}$$

$$= \sum_1^q {}_p \frac{h_p}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f_p\left(\frac{h_p}{\pi}\varrho\right) d\varrho}{\sqrt{\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2}},$$

$$U_s = \sum_1^q {}_p \frac{h_p}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_n a_n^p \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{n\varrho i}\, d\varrho}{\sqrt{\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2}}.$$

Dieses letztere Integral ist es nun, welches wir genauer betrachten wollen.

Nach dem, was § 5 gesagt wurde, können wir setzen:

$$\frac{h_p}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{n\varrho i}\, d\varrho}{\sqrt{\left(x + b_p - \frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2 + y^2}} = \int_{arctang \frac{x + b_p - h_p}{y}}^{arctang \frac{x + b_p + h_p}{y}} e^{n \frac{\pi}{h_p} (x + b_p - y \, tang\, \alpha) i} \frac{\cos \alpha}{d\alpha}$$

$$= \int\limits_{\frac{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-h_p)^2}}{y}}^{\frac{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}{y}} e^{n\frac{\pi}{h_p}\left(x+b_p-\frac{y}{2}\left[\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right]\right)i} \frac{du}{u}.$$

Oder es ist, wenn wir zur Abkürzung schreiben:

$$u_2 = \frac{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}{y}$$

$$u_1 = \frac{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-h_p)^2}}{y}$$

$$\frac{h_p}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{e^{n\varrho i}\,d\varrho}{\sqrt{\left(x+b_p-\frac{h_p}{\pi}\varrho\right)^2+y^2}} = \int\limits_{u_1}^{u_2} e^{n\frac{\pi}{h_p}\left(x+b_p-\frac{y}{2}\left[\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right]\right)i}\frac{du}{u}$$

$$= e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)i}\int\limits_{u_1}^{u_2} e^{-n\frac{\pi}{h_p}\frac{y}{2}\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i}\frac{du}{u}$$

$$= e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)i}\int\limits_{u_1}^{u_2} e^{-z\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i}\frac{du}{u}$$

für

$$z = n\frac{\pi}{h_p}\frac{y}{2}.$$

Unter dem Integralzeichen entwickeln wir nun die Exponentialfunction und erhalten für das m^{te} Glied

$$\frac{(-1)^m i^m z^m . \left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)^m}{m!} \cdot \frac{du}{u}.$$

$$= \frac{(-iz)^m}{m!}\left\{u^m - \frac{m}{1}u^{m-2} + \frac{m.m-1}{1.2}u^{m-4} \mp \ldots + (-1)^m u^{-m}\right\}\frac{du}{u}$$

$$= \frac{(-iz)^m}{m!}\left\{u^m + \left(\frac{1}{-u}\right)^m - \frac{m}{1}\left[u^{m-2} + \left(\frac{1}{-u}\right)^{m-2}\right]\right.$$

$$\left. + \frac{m.m-1}{1.2}\left[u^{m-4} + \left(\frac{1}{-u}\right)^{m-4}\right] \mp \ldots\right\}\frac{du}{u},$$

wobei die Glieder in { } soweit fortzusetzen sind, bis die Exponenten von u und $\frac{1}{-u}$ 0 oder 1 geworden sind, also, wenn m eine gerade Zahl ist, bis zum Exponenten 0, wenn m eine ungerade Zahl ist, bis zum Exponenten 1.

Im ersten Falle ist das letzte Glied:

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m \,.\, \overline{m-1} \,.\, \overline{m-2} \,.\, \overline{m-3} \ldots \overline{m-\left(\frac{m}{2}-1\right)}}{\frac{m}{2}!}.$$

Im zweiten Falle dagegen:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m \,.\, \overline{m-1} \,.\, \overline{m-2} \ldots \overline{m-\left(\frac{m}{2}-\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)!}\left[u-\frac{1}{u}\right].$$

Bildet man nun die Summe aller dieser Glieder von der eben angegebenen Form, ordnet dieselben dann nach Potenzen von $\left(\frac{u}{1}\right)^n + \left(\frac{1}{-u}\right)^n$, indem man dem n nach und nach alle ganzzahligen Werthe von 0 bis ∞ beilegt, so erhält man für die nach u zwischen den Grenzen u_1 und u_2 zu integrirende Function:

$$\frac{1}{u}\left\{1+\frac{z^2}{(1!)^2}+\frac{z^4}{(2!)^2}+\frac{z^6}{(3!)^2}+\ldots+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}+\ldots\right\} du$$

$$-\frac{iz}{u}\left(u+\frac{1}{-u}\right)\left\{\frac{1}{1}+\frac{z^2}{(1!)^2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{z^4}{(2!)^2}\frac{1}{3}+\ldots+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{m+1}+\ldots\right\}\frac{du}{u}$$

$$-\frac{z^2}{u}\left[u^2+\left(\frac{1}{-u}\right)^2\right]\left\{\frac{1}{1.2}+\frac{z^2}{1^2}\cdot\frac{1}{2.3}+\frac{z^4}{(2!)^2}\frac{1}{3.4}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\cdot\frac{1}{\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}}+\ldots\right\} du$$

$$+\frac{iz^3}{u}\left[u^3+\left(\frac{1}{-u}\right)^3\right]\left\{\frac{1}{1.2.3}+\frac{z^2}{1^2}\cdot\frac{1}{2.3.4}+\frac{z^4}{(2!)^2}\frac{1}{3.4.5}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\,.\,\overline{m+3}}+\ldots\right\} du$$

$$+\frac{z^4}{u}\left[u^4+\left(\frac{1}{-u}\right)^4\right]\left\{\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{z^2}{1^2}\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{z^4}{(2!)^2}\cdot\frac{1}{3.4.5.6}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\,.\,\overline{m+3}\,.\,\overline{m+4}}+\ldots\right\} du$$

. . . .

$$+\frac{e^{-\frac{n}{2}\pi i}z^n}{u}\left[u^n+\left(\frac{1}{-u}\right)^n\right]\left\{\frac{1}{n!}+\frac{z^2}{1^2}\cdot\frac{1}{2.3\ldots\overline{n+1}}+\frac{z^4}{(2!)^2}\cdot\frac{1}{3.4\ldots\overline{n+2}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\cdot\frac{1}{\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\ldots\overline{m+n}}+\ldots\right\} du$$

. . . .

Führen wir nun die Integration aus indem wir die Formeln anwenden:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = l\frac{u_2}{u_1}$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \left[u^n + \left(\frac{1}{-u}\right)^n\right]\frac{du}{u} = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{u_2}{1}\right)^n - \left(\frac{u_1}{1}\right)^n - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^n + \left(\frac{1}{-u_1}\right)^n\right]; \quad n \gtrless 0,$$

so ändert sich an der eben geschriebenen Entwickelung weiter nichts, als dass in der ersten Horizontalreihe statt des Factors

$$\frac{du}{u} \quad l\frac{u_2}{u_1}$$

eintritt, in den übrigen Horizontalreihen dagegen statt des allgemeinen Factors

$$\left[u^n + \left(\frac{1}{-u}\right)^n\right]\frac{du}{u}$$

der Factor

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{u_2}{1}\right)^n - \left(\frac{u_1}{1}\right)^n + \left(\frac{1}{-u_1}\right)^n - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^n\right].$$

Multiplicirt man schliesslich noch die erlangte Entwickelung mit

$$e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)i},$$

so ist damit die Entwickelung von dem n^{ten} Gliede von U_s, d. h. von

$$_nU_s = e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)i} \int_{u_1}^{u_2} e^{-z\left(\frac{u}{1}-\frac{1}{u}\right)i}\frac{du}{u}$$

geschehen.

Die rasche Convergenz der einzelnen Horizontalreihen des Ausdrucks für $_nU_s$ verdient noch besonders hervorgehoben zu werden. Etwas Aehnliches ist auch der Fall, wenn man die Entwickelung von $_nU_s$ nach Verticalreihen anordnen wollte, was, wie man sich leicht überzeugen kann, auch erlaubt ist.

Der Gestalt nach noch etwas einfacher wird die Entwickelung von $_nU_s$, wenn man substituirt:

$$u_2 = e^{\eta_2}, \quad u_1 = e^{\eta_1},$$

indem hierdurch entsteht:

$$\left(\frac{u_2}{1}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^{2n} = e^{2n\eta_2} - e^{-2n\eta_2} = -2i\sin(2ni\eta_2),$$

$$\left(\frac{u_2}{1}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{-u_1}\right)^{2n} = -2i\sin(2ni\eta_1),$$

$$\left(\frac{u_2}{1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^{2n+1} = 2\cos(\overline{2n+1}\, i\eta_2),$$
$$\left(\frac{u_1}{1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{-u_1}\right)^{2n+1} = 2\cos(\overline{2n+1}\, i\eta_1).$$

Folglich ist für ein gerades n:

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{u_2}{1}\right)^n - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^n - \left(\frac{u_1}{1}\right)^n + \left(\frac{1}{-u_1}\right)^n\right] = -\frac{2i}{n}[\sin(ni\eta_2) - \sin(ni\eta_1)]$$
$$= -\frac{4i}{n}\cos\frac{n}{2}i(\eta_2+\eta_1)\sin\frac{n}{2}i(\eta_2-\eta_1).$$

dagegen für ein ungerades n:

$$\frac{1}{n}\left[\left(\frac{u_2}{1}\right)^n - \left(\frac{1}{-u_2}\right)^n - \left(\frac{u_1}{1}\right)^n + \left(\frac{1}{-u_1}\right)^n\right] = \frac{2}{n}[\cos(ni\eta_2) - \cos(ni\eta_1)]$$
$$= -\frac{4}{n}\sin\frac{ni}{2}(\eta_2+\eta_1)\sin\frac{ni}{2}(\eta_2-\eta_1)$$

und

$$\eta_2 = l(u_2) = l\,\frac{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}{y},$$
$$\eta_1 = l(u_1) = l\,\frac{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-h_p)^2}}{y}.$$

Es ist bemerkenswerth, dass in den Horizontalreihen der Entwickelung von ${}_nU_s$ nur die Coordinate y (nicht x) vorkommt. Dieser Umstand rechtfertigt es, wenn wir hier noch eine andere Entwickelungsform anführen.

Es sei zur Abkürzung:

$$H_0 = 1 + \frac{z^2}{(1!)^2} + \frac{z^4}{(2!)^2} + \frac{z^6}{(3!)^2} + \dots + \frac{z^{2m}}{(m!)^2} + \dots = \sum_0^\infty{}_m \frac{z^{2m}}{(m!)^2},$$
$$H_n = \frac{1}{n!} + \frac{z^2}{(1!)^2}\cdot\frac{1}{2.3\dots\overline{n+1}} + \frac{z^4}{(2!)^2}\cdot\frac{1}{3.4\dots\overline{n+2}} + \dots$$
$$+ \frac{z^{2m}}{(m!)^2}\cdot\frac{1}{\overline{m+1}.\overline{m+2}\dots\overline{m+n}} + \dots$$

Bildet man nun aus der Entwickelung:

$$e^{zx} = 1 + \frac{z}{1}x + \frac{z^2}{1.2}.x^2 + \frac{z^3}{1.2.3}.x^3 + \dots,$$

indem man für x das eine Mal schreibt e^{pi}, das andere Mal e^{-pi}, das Product

$$e^{ze^{pi}}\, e^{ze^{-pi}} = e^{z(e^{pi}+e^{-pi})},$$

so folgt:

$$e^{z(e^{pi}+e^{-pi})} = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m \frac{z^n}{n!}\frac{z^m}{m!}e^{(n-m)pi}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dp und integrirt dann zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, so folgt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{z(e^{pi}+e^{-pi})} dp = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2z\cos p}\, dp = \sum_0^\infty{}_n \sum_0^\infty{}_m \frac{z^n}{n!}\frac{z^m}{m!} \int_{-\pi}^{+\pi} n^{(n-m)pi} dp$$

$$= 2\pi \sum_0^\infty{}_m \frac{z^{2m}}{(m!)^2} = 2\pi H_0.$$

Wir haben also die Relation:

$$H_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2z\cos p}\, dp.$$

Multiplicirt man ferner das Product der beiden Entwickelungen

$$e^{z^2 e^{pi}} = 1 + \frac{z^2}{1} e^{pi} + \frac{z^4}{1.2} e^{2pi} + \frac{z^6}{1.2.3} e^{3pi} + \ldots$$

$$e^{e^{-pi}} = 1 + \frac{e^{-pi}}{1} + \frac{e^{-2pi}}{1.2} + \frac{e^{-3pi}}{1.2.3} + \ldots$$

mit

$$e^{+qpi} dp,$$

wobei q eine ganze positive Zahl sei, und integrirt dann zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$, so entsteht:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{z^2 e^{pi}} e^{e^{-pi}} e^{+qpi}\, dp = \sum_0^\infty{}_m \sum_0^\infty{}_n \frac{z^{2m}}{m!}\frac{1}{n!} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{(m-n+q)pi} dp$$

$$= 2\pi \sum_0^\infty{}_m \frac{z^{2m}}{m!\,(m+q)!}.$$

Oder

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{z^2 e^{pi}} e^{e^{-pi}} e^{+qpi}\, dp = 2\pi \sum_0^\infty{}_m \frac{z^{2m}}{(m!)^2} \cdot \frac{1}{\overline{m+1}\,.\,\overline{m+2}\ldots\overline{m+q}}.$$

Vergleicht man die rechte Seite dieser Gleichung mit der obigen Definition von H_n, so findet man, dass die Relation gilt:

$$H_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{z^2 e^{pi} + e^{-pi}} e^{npi}\, dp.$$

Differentiirt man noch diese Gleichung nach z, so entsteht:

$$\frac{\partial H_n}{\partial z} = \frac{2z}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{z^2 e^{pi} + e^{-pi}} e^{(n+1)pi}\, dp = 2z\,.\,H_{n+1}.$$

Es gilt also auch die wichtige und bequeme Recursionsformel:

$$H_{n+1} = \frac{1}{2z}\frac{\partial H_n}{\partial z}.$$

Nach den in diesem Paragraphen gewonnenen Resultaten können wir nun ${}_nU_s$ auch darstellen in der Form:

$$
\begin{aligned}
{}_nU_s = l\,&\frac{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-h_p)^2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{n\frac{\pi}{h_p}y\cos p}\,dp\,.\,e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)} \\
&+\sum_1^{\infty}{}^r\,\frac{e^{-\frac{r}{2}\pi i\left(\frac{h_p}{\pi}\frac{ny}{2}\right)^r}}{r}\left[\left(\frac{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}{y}\right)^r\right. \\
&-\left(\frac{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-b_p)^2}}{y}\right)^r+\left(\frac{-y}{x+b_p-h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p-h_p)^2}}\right)^r \\
&\left.-\left(\frac{-y}{x+b_p+h_p+\sqrt{y^2+(x+b_p+h_p)^2}}\right)^r\right]e^{n\frac{\pi}{h_p}(x+b_p)i} \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{\left(n\frac{\pi}{h_p}\frac{y}{2}\right)^2 e^{pi}+e^{-pi}}\,e^{rpi}\,dp
\end{aligned}
$$

und U_s selbst ist

$$U_s=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^n\,{}_nU_s.$$

XIII.

Ueber Isophoten (Linien gleicher Lichtintensität).

Von

Dr. L. Burmester,

Lehrer der Physik und der darstellenden Geometrie am deutschen Realgymnasium zu Lodż in Russisch-Polen.

(Hierzu Tafel VI, Fig. 1—4.)

Zweiter Theil.

§ 1.

Die Isophoten der Flächen zweiter Ordnung.

Die allgemeinen Gleichungen für die Isophoten einer Fläche $F=0$, welche wir im ersten Theile dieser Abhandlung*) abgeleitet haben, sind

$$1)\qquad F=0,$$

$$2)\qquad L=\frac{\alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}.$$

Hierin bezeichnen α, β, γ beziehungsweise die Cosinus der Winkel, welche die Lichtstrahlenrichtung mit den Coordinatenaxen der x, y, z einschliesst; und ferner bezeichnet L die Lichtintensität. Geben wir dem L die Werthe der Reihe:

$$-1,\quad -\frac{n-1}{n},\quad -\frac{n-2}{n}\ldots-\frac{2}{n},\quad -\frac{1}{n},\quad 0,$$

$$+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\ldots\frac{n-2}{n}+\frac{n-1}{n}+1,$$

in der n eine ganze positive Zahl ist, so liefert uns die Gleichung 2) ein Flächensystem, dessen Durchschnitt mit der Fläche 1) das Isophotensystem dieser Fläche ist. — Wir wollen, des kürzeren Ausdrucks wegen, die Flächen, welche so aus der Gleichung 2) hervorgehen, **Isophotoiden** und das System derselben **Isophotoidensystem** nennen.

*) Zeitschrift f. Math. u. Physik XIII, S. 267.

§ 2.
Die Isophoten der centralen Flächen zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung dieser Flächen ist

$$3)\qquad F \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \varkappa = 0.$$

Hiernach ist die allgemeine Gleichung des Isophotoidensystems dieser Flächen

$$4)\qquad L = \frac{\alpha Ax + \beta By + \gamma Cz}{\sqrt{(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2}}.$$

Aus dieser Gleichung, in der K nicht enthalten ist, folgen die Sätze:

Die Isophotoiden der centralen Flächen zweiter Ordnung sind im Allgemeinen Kegelflächen zweiter Ordnung, die den Mittelpunkt derselben als gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und die für alle ähnliche centrale Flächen zweiter Ordnung unverändert bleiben.

Die Isophotoiden der centralen Flächen zweiter Ordnung schneiden das Ellipsoid

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = 1$$

in Ellipsen, deren Ebenen parallel und durch die Gleichung

$$\alpha Ax + \beta By + \gamma Cz = L$$

bestimmt sind.

Die Isophotoidensysteme aller centralen Flächen zweiter Ordnung, in deren Gleichung keine der Grössen A, B, C gleich 0 oder ∞ ist, sind affin.

Nach diesem letzten Satz können wir die Construction der Isophoten dieser Flächen auf die Construction der Isophoten der Kugelfläche in sehr einfacher Weise zurückführen, und alle projectivische Eigenschaften des Isophotoidensystems der Kugelfläche auf das Isophotensystem der anderen centralen Flächen zweiter Ordnung übertragen. — Wir wollen daher zunächst das Isophotoidensystem resp. Isophotensystem der Kugelfläche untersuchen und aus den Resultaten dieser Untersuchung für die Isophotenconstruction der übrigen Flächen zweiter Ordnung Nutzen ziehen.

§ 3.
Die Isophoten der Kugelfläche.

Für die Kugelfläche ist

$$A = B = C = 1,$$

oder

$$5)\qquad F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - \varkappa = 0,$$

folglich ist die Gleichung des Isophotoidensystems der Kugelfläche

$$6)\qquad L = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Sätze:

Die Isophotoiden der Kugelfläche sind Rotationskegel, welche die Lichtstrahlenrichtung*) als gemeinschaftliche Rotationsaxe, den Kugelmittelpunkt als gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, und deren erzeugende Gerade mit der Rotationsaxe den Winkel von $arccos\, L$ bildet.

Die Lage des für alle Kugelflächen unveränderlichen Isophotensystems 6) ist durch die Lichtstrahlenrichtung allein bestimmt.

Legen wir durch dieses Isophotensystem in einem beliebigen Abstand $-d$ von dem Coordinatenanfang S eine zur z-Axe senkrechte Ebene, dann folgt aus der Gleichung 6) die Gleichung des Schnittsystems dieser Ebene

$$7)\qquad L = \frac{\alpha x + \beta y - \gamma d}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Bezeichnen wir das Kegelschnittsystem, welches aus dieser Gleichung hervorgeht, mit Σ, das Isophotoidensystem der Kugelfläche mit S, dann ist S der Schein von Σ. — Jedem Kegelschnitt in Σ entspricht eine Kegelfläche in S und jeder Kegelfläche eine Isophote der Kugelfläche. Die Eigenschaften des Systems Σ können wir daher auf das System S übertragen, und umgekehrt.

Aus der Gleichung 7) erhalten wir für $L = 0$ eine Gerade p (Taf. VI, Fig. 1), welche auf der Grundrissprojection der Lichtstrahlenrichtung PS senkrecht steht, für $L = \pm 1$ einen Punkt P, welcher auf dieser Projection liegt. — Die Kegelfläche in S, welche der Grenzisophote entspricht, degenerirt daher zu einer Ebene π, die, welche der Maximalisophote entspricht, zu einer auf der Ebene π senkrechten Geraden, und diese Gerade fällt mit der Lichtstrahlenrichtung, resp. gemeinschaftlichen Rotationsaxe zusammen.

Denken wir uns durch die Lichtstrahlenrichtung PS als Axe einen Ebenenbüschel gelegt, so schneiden die Ebenen desselben

das System S in gleichen concentrischen involutorischen Strahlenbüscheln, die den einen Ordnungsstrahl PS entsprechend gemein haben, deren zweiter Ordnungsstrahl in der Ebene π liegt, und von

das System Σ in projectivischen involutorischen geraden Gebilden, die den einen Ordnungspunkt P entsprechend gemein haben, deren zweiter Ordnungspunkt in der Geraden p liegt, und von

*) Mit Lichtstrahlenrichtung bezeichnen wir speciell denjenigen Lichtstrahl, welcher durch den Coordinatenanfang geht.

denen daher je zwei Schnitte eines Ebenenbüschels sind, dessen Axe ebenfalls in der Ebene π liegt.

denen daher je zwei Schnitt eines Strahlenbüschels sind, dessen Mittelpunkt ebenfalls in der Geraden p liegt.

Hieraus können wir leicht den Doppelsatz ableiten:

Die Ebene π ist die Polarebene des Strahles PS in Bezug auf alle Kegelflächen des Systems S.

Die Gerade p ist die Polare des Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ.

Nach diesen Sätzen können wir die involutorischen geraden Gebilde in Σ leicht erhalten, wenn wir ein einziges derselben und einen entsprechenden Punkt der übrigen kennen. — Haben wir so diese involutorischen geraden Gebilde construirt, dann sind auch die perspectivisch zu diesen liegenden concentrischen Strahlenbüschel in S gegeben, und die Durchschnitte ihrer Strahlen mit der Kugelfläche sind Punkte der Isophoten der Kugel. Nach dieser Methode werden wir die Kugelisophoten zwar nicht construiren, denn hierfür haben wir eine viel einfachere Methode im ersten Theile dieser Abhandlung angegeben; aber sie wird theils verallgemeinert, theils specialisirt auf allen anderen Flächen zweiter Ordnung Anwendung finden, und das System Σ ist aus diesem Grunde für die Folge von grosser Wichtigkeit. — Wir wollen daher nicht nur jene involutorischen geraden Gebilde, welche für die Isophotenconstruction ausreichen, sondern das Kegelschnittsystem Σ selbst construiren, so weit es die Bildebene gestattet.

Es sei in Fig. 1, Tafel VI, die Ebene des Systems Σ als Grundrissebene angenommen, Σ' die Projectionsaxe; ferner K_1 und K_2 die Projectionen einer Kugel K, S_0 und S_2 die Projectionen des Kugelmittelpunktes S, $L_1\, S_0$ und $L_2\, S_2$ die Projectionen einer beliebigen Lichtstrahlenrichtung LS, deren Trace in Σ durch den Punkt P bezeichnet ist.

Die horizontal projicirende Ebene der Geraden LS schneidet das System S in einem involutorischen Strahlenbüschel, welcher perspectivisch liegt zu dem involutorischen geraden Gebilde auf $L_1\, S_0$. Um dieses Gebilde zu construiren, legen wir diese projicirende Ebene um $L_1\, S_0$ gedreht in die Grundrissebene Σ nieder, d. h. wir ziehen $S_3\, S_0 = S_2\, O$ $(= d)$ senkrecht auf $L_1\, S_0$, verbinden S_3 mit P und $S_3\, Q$ senkrecht auf $S_3\, P$; dann ist S_3 der Mittelpunkt des umgelegten Strahlenbüschels, und $S_3\, P$, $S_3\, Q$ sind die Ordnungsstrahlen desselben. — Die durch den Punkt Q auf $L_1\, S_0$ senkrecht gezogene Gerade p ist die Polare des Punktes P in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ. Von S_3 aus tragen wir auf $S_3\, P$ n gleiche Theile beliebig ab, etwa bis T*). Mit der Strecke $S_3\, T$ beschreiben wir um S_3 als Mittelpunkt einen Kreis k, ziehen durch die Theilpunkte auf $S_3\, T$ Senk-

*) In der Figur haben wir n gleich 10 und die beliebige Strecke $S_3\, T$ als Einheit genommen.

rechte, z. B. durch 0,9 die Senkrechte rr', welche den Kreis k in r und r' schneidet. Diese beiden Punkte mit S_3 verbunden liefern uns ein Strahlenpaar $S_3A.S_3a$, und dieses auf L_1S_0 ein Punktepaar $A.a$ des involutorischen geraden Gebildes u, dessen Ordnungspunkte P und Q sind.

Ebenso erhalten wir durch die übrigen Theilpunkte der Strecke S_1T die anderen Punktepaare $B.b$, $C.c\ldots$ des geraden Gebildes u, welche die Endpunkte von den Hauptaxen der Kegelschnitte des Systems Σ sind.

Um nun noch in jedem durch P gehenden geraden Gebilde einen entsprechenden Punkt zu erhalten, construiren wir einen Kegelschnitt in Σ, z. B. die Ellipse e, welche der Lichtstärke 0,9 entspricht, aus der Hauptaxe Aa und den leicht zu ermittelnden Brennpunkten F und F'. Ziehen wir durch P eine beliebige Gerade u', deren Durchschnitt mit p durch Q' bezeichnet ist, dann sind P und Q' die Ordnungspunkte des geraden Gebildes u'. Die Durchschnittspunkte $A'.a'$ von u' mit e entsprechen den Punkten $A.a$ in u. — Ziehen wir die Geraden AA', aa' bis p, so müssen diese sich auf p in einem Punkte M treffen, und dieses Zusammentreffen in p kann als Controle für die Richtigkeit der Zeichnung dienen. Projiciren wir aus M durch einen Strahlenbüschel u auf u', so sind die Punkte A', B', $C'\ldots$, welche den Punkten $A, B, C\ldots$ entsprechen, Punkte der Kegelschnitte des Systems Σ. In gleicher Weise können wir u auf andere durch P gehende Gerade u'', $u'''\ldots$ durch entsprechende Strahlenbüschel projiciren. — Die so erhaltenen Punkte der durch P gehenden geraden Gebilde liefern das Kegelschnittsystem Σ. Legen wir durch den Mittelpunkt des Kegelflächensystems S eine Ebene parallel zu Σ, ist also in der Gleichung 7) $d=0$, dann erhalten wir als Schnitt einen involutorischen Strahlenbüschel, dessen Strahlen den Asymptoten der Hyperbeln des Systems Σ parallel sind.

§ 4.
Die Isophoten des Ellipsoids der Hyperboloide und der Kegelfläche zweiter Ordnung.

Legen wir durch das Isophotensystem der centralen Flächen zweiter Ordnung, dessen Gleichung

$$4)\qquad L=\frac{\alpha Ax+\beta By+\gamma Cz}{\sqrt{(Ax)^2+(By)^2+(Cz)^2}}$$

ist, in beliebigen Abstand $-\Delta$ von dem Flächenmittelpunkt (Coordinatenanfang) S_1 eine zur z-Axe senkrechte Ebene Σ_1, so ist, wenn wir, zwar auf Kosten der Symmetrie, aber zum Vortheil der nachfolgenden Construction

$$\frac{B}{A}=p,\quad \frac{C}{A}=q,$$

setzen,

$$8)\qquad L=\frac{\alpha x+\beta py-\gamma q\Delta}{\sqrt{x^2+(py)^2+(q\Delta)^2}}.$$

Bezeichnen wir das Kegelschnittsystem, welches aus dieser Gleichung hervorgeht, mit Σ_1, das Isophotoidensystem 4) mit S_1, dann ist S_1 der Schein von Σ_1.

Aus der Gleichung 8) erhalten wir für $L = 0$ eine Gerade p_1 (Fig. 2, Taf. VI), für $L = \pm 1$ einen Punkt P_1. — Die Isophotoide, welche der Grenzisophote entspricht, degenerirt hiernach zu einer Ebene π_1, deren Pol der unendlich ferne Punkt der Lichtstrahlenrichtung ist, und die Isophotoide welche der Maximalisophote entspricht, degenerirt zu einer Geraden $S_1 P_1$.

Nach § 2 sind die Systeme S und S_1 affin, folglich auch die Systeme Σ und Σ_1. — Wir können daher nach § 3 die folgenden Sätze aussprechen:

Legt man durch die Gerade $S_1 P_1$ als Axe einen Ebenenbüschel E_1, so schneiden die Ebenen desselben

das System S_1 in projectivischen concentrischen involutorischen Strahlenbüscheln, die den einen Ordnungsstrahl $S_1 P_1$ entsprechend gemein haben, deren zweiter Ordnungsstrahl in der Ebene π_1 liegt, und von denen daher je zwei Schnitte eines Ebenenbüschels sind, dessen Axe ebenfalls in der Ebene π_1 liegt.

das System Σ_1 in projectivischen involutorischen geraden Gebilden, die den einen Ordnungspunkt P_1 entsprechend gemein haben, deren zweiter Ordnungspunkt in der Geraden p_1 liegt, und von denen daher je zwei Schnitte eines Strahlenbüschels sind, dessen Mittelpunkt ebenfalls in der Geraden p_1 liegt.

Hieraus folgt:

Die Ebene π_1 ist die Polarebene des Strahles $S_1 P_1$ in Bezug auf alle Kegelflächen des Systems S_1.

Die Gerade p_1 ist die Polare des Punktes P_1 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ_1.

Eine centrale Fläche zweiter Ordnung wird von jeder Ebene des Ebenenbüschels E_1 im Allgemeinen in einen Kegelschnitt geschnitten, dessen Mittelpunkt der Flächenmittelpunkt ist, und dieser Kegelschnitt wird von dem in dieser Ebene enthaltenen involutorischen Strahlenbüschel in Punkte getroffen, welche die Isophoten der centralen Flächen zweiter Ordnung bilden. — Um diese involutorischen Strahlenbüschel zu erhalten, construiren wir die zu denselben perspectivisch liegenden involutorischen geraden Gebilde, welche im Systeme Σ_1 den Ordnungspunkt P_1 entsprechend gemein haben. — Dies kann nach den vorhergehenden Sätzen in gleicher Weise wie im Systeme Σ geschehen. Dort war zu dieser Construction nur ein durch P gehendes involutorisches gerades Gebilde u und ein Kegelschnitt e nöthig; also brauchen wir auch hier nur ein durch P_1 gehendes involutorisches gerade Gebildes u_1 und einen Kegelschnitt e_1 im Systeme Σ_1. Da die Systeme Σ und Σ_1 affin sind, so können wir zu dem geraden Ge-

bilde u und dem Kegelschnitt e in Σ sehr leicht das entsprechende gerade Gebilde u_1 und den entsprechenden Kegelschnitt e_1 in Σ_1 construiren, uns hiermit so viele durch P_1 gehende involutorische gerade Gebilde verschaffen, als wir zur Isophotenconstruction gebrauchen.

Die Vergleichung der beiden Gleichungen 7) und 8) ergiebt, dass in den Systemen Σ und Σ_1 die Abscissen zweier entsprechender Punkte gleich sind, dass die Ordinaten aber im Verhältniss $\varrho : 1$ stehen, und dass der Coordinatenanfang S_0 in Σ dem Coordinatenanfang S_0 in Σ_1 entspricht.

Es sei in Fig. 2 Tafel VI die Ebene des Systems Σ_1 als Grundrissebene genommen, Σ' die Projectionsaxe. Ferner seien K_1 und K_2 die Projectionen einer centralen Fläche K*) zweiter Ordnung, S_0 und S_2 die Projectionen des Mittelpunktes S_1 dieser Fläche, $L_1 S_0$ und $L_2 S_2$ die Projectionen einer beliebigen Lichtstrahlenrichtung LS_1. Wir construiren nun ganz wie im Systeme Σ (Fig. 1) das involutorische gerade Gebilde u, dessen Ordnungspunkte P und Q sind, nur mit dem Unterschiede, dass hier

$$S_3 S_0 = q\Delta \left(= \frac{S_2 O_1}{2}\right)$$

ist; von dem Kegelschnitt e bestimmen wir ausser den Endpunkten A, a der Hauptaxe noch die Endpunkte G, g der Nebenaxe. Nehmen wir hiernach das $\frac{1}{p}$-fache der Ordinaten der Punkte P, G, g, so erhalten wir die Ordinaten der entsprechenden Punkte P_1, G_1, g_1 in dem Systeme Σ_1. Durch einen der y-Axe parallelen Strahlenbüschel projiciren wir das involutorische gerade Gebilde u auf die Gerade $S_0 P_1$, dann ist das so erhaltene gerade Gebilde u_1 das dem u entsprechende involutorische gerade Gebilde in Σ_1, und dessen Ordnungspunkte sind P_1 und Q_1. Es sind $A_1 a_1$ und $G_1 g_1$ conjugirte Durchmesser der Ellipse e_1, welche der Ellipse e entspricht. Aus diesen können wir die Ellipse e_1 construiren, und wenn wir wollen, auch die Axen derselben nach bekannten Methoden erhalten. Die durch Q_1 zu $G_1 g_1$ parallel gezogene Gerade p_1 ist die Polare des Punktes P_1 in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ_1, und die Gerade $S_0 P_1$ ist der gemeinschaftliche Durchmesser derselben.

Ebenso wie im Systeme Σ können wir nun auch in dem Systeme Σ_1 mittelst des involutorischen geraden Gebildes u_1 und des Kegelschnittes e_1 alle durch P_1 gehende involutorische gerade Gebilde construiren und hiernach die Isophoten der Flächen zweiter Ordnung wie oben angegeben mit Hilfe der darstellenden Geometrie erhalten.

Obgleich diese involutorischen geraden Gebilde für die Construction dieser Isophoten ausreichen, so haben wir doch das Kegelschnittsystem Σ_1, soweit es die Bildebene gestattet, in Fig. 2 construirt; denn wir werden dasselbe bei den nicht centralen Flächen zweiter Ordnung wieder antreffen,

*) In der Figur ist diese Fläche ein Ellipsoid, für welches $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$ ist.

und ferner kann es noch zu folgender Isophotenconstruction dienen. Legen wir durch die z-Axe oder durch eine der beiden anderen Axen der Fläche einen Ebenenbüschel, so wird die centrale Fläche zweiter Ordnung in leicht zu construirenden Kegelschnitten, das System S_1 in Strahlenbüscheln geschnitten, welche durch das System Σ_1 bestimmt sind. Die Durchschnitte dieser Kegelschnitte und Strahlenbüschel sind Punkte der Isophoten der centralen Fläche zweiter Ordnung.

Legen wir durch den Mittelpunkt des Kegelflächensystems S_1 eine Ebene parallel zu Σ_1, ist also in der Gleichung 8) $\varDelta = 0$, dann erhalten wir als Schnitt einen involutorischen Strahlenbüschel, dessen Strahlen den Asymptoten der Hyperbeln des Systems Σ_1 parallel sind.

Diese hier für die Isophoten aller in der Ueberschrift dieses Paragraphen enthaltenen Flächen angegebene Constructionsweise kann auch, wenn die Flächen eine andere als hier angenommene räumliche Lage haben, oder wenn sie perspectivisch dargestellt sind, angewendet werden.

Bei dem einfachen Hyperboloid kann man die Construction der Isophoten dadurch sehr vereinfachen, dass man nicht nur die involutorischen geraden Gebilde in Σ_1, sondern das System Σ_1 selbst construirt und dann durch den Mittelpunkt des einfachen Hyperboloids solche Ebenen legt, welche dasselbe in geraden Linien schneiden.

Bei der Kegelfläche zweiter Ordnung vereinfacht sich die Isophotenconstruction besonders dadurch, dass die Isophoten Mantellinien der Kegelfläche sind. Um diese zu erhalten, braucht man nur die Schnittcurve, welche die Ebene des Systems Σ_1 mit der Kegelfläche bildet, zu construiren und die Durchschnittspunkte dieser Curve mit dem System Σ_1 zu bestimmen. Hierzu ist aber nur ein kleiner Theil von Σ_1 nöthig, nämlich der, welcher diese Schnittpunkte liefert.

Für die centralen Rotationsflächen zweiter Ordnung ist $p = 1$ und das System Σ_1 geht dann in das System Σ über. Die Construction der Isophoten dieser Flächen ist jedoch in diesem speciellen Fall einfacher nach der Methode auszuführen, welche wir im ersten Theile dieser Abhandlung für die Rotationsflächen allgemein dargelegt haben.

Wir können also stets ohne Schwierigkeit die Orte gegebener gleicher Lichtintensität auf den centralen Flächen zweiter Ordnung construiren; aber wir können auch umgekehrt mit leichter Mühe die Lichtintensität eines auf der Fläche gegebenen beliebigen Punktes bestimmen, wenn wir in Σ_1 den einen Kegelschnitt e_1, die Geraden S_0P_1, p_1 und die Linienscala S_2T construirt haben. — Wir brauchen dann den oben angegebenen Weg der Isophotenconstruction nur in entgegengesetzter Richtung zu gehen, um die Lichtintensität eines gegebenen Flächenpunktes von der Scala S_2T abzulesen.

§ 5.

Die Isophoten der centralen Cylinderflächen zweiter Ordnung.

Setzen wir in die Gleichung 4)

$$C=0,\quad \frac{B}{A}=p,$$

so erhalten wir die Gleichung des Isophotoidensystems der centralen Cylinderflächen zweiter Ordnung

$$L=\frac{\alpha x+\beta p y}{\sqrt{x^2+(py)^2}}. \tag{9}$$

Aus dieser Gleichung, welche einen involutorischen Strahlenbüschel repräsentirt, folgen die Sätze:

Die Isophotoiden der centralen Cylinderflächen zweiter Ordnung sind zugeordnete Ebenen eines involutorischen Ebenenbüschels, dessen Axe die z-Axe, und welcher für alle ähnlichen Cylinderflächen dieser Gattung unverändert bleibt.

Je zwei zugeordnete Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels 9) schneiden die Ellipse

$$x^2+p^2y^2=1$$

in Punkten, welche in parallelen Geraden liegen, deren Gleichung

$$\alpha x+\beta p y=L$$

ist.

Die Isophotoidensysteme aller centralen Cylinderflächen zweiter Ordnung sind affin.

Hiernach können wir die Isophoten dieser Cylinderflächen auf zweifache Weise construiren:

1) Nach dem zweiten Satze construiren wir die Ellipse

$$x^2+py^2=1,$$

dann die gleichweit von einander abstehenden parallelen Geraden, deren Gleichung

$$\alpha x+\beta p y=L$$

ist. — Durch die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der Ellipse gehen die Strahlen des Büschels 10), dessen Mittelpunkt der Ellipsenmittelpunkt ist.

2) Für die Rotationscylinderfläche ist die Construction des involutorischen Büschels nach dem ersten Theile dieser Abhandlung der speciellste Fall der dort angegebenen allgemeinen Construction, und hiernach kann man leicht den affinen Büschel 9) construiren. — Um dieses auszuführen, tragen wir von dem Coordinatenanfang auf die Grundrissprojection der Lichtstrahlenrichtung nach beiden Richtungen die Strecke $\varrho \csc \nu$*) ab,

*) ϱ bezeichnet den Radius des Rotationscylinders, ν den Winkel, welchen die Lichtstrahlenrichtung mit der z-Axe bildet.

theilen beide Strecken in n gleiche Theile und errichten in diesen Theilpunkten Senkrechte. — Die Durchschnittspunkte dieser Senkrechten mit dem Grundkreis des Cylinders liefern uns den involutorischen Strahlenbüschel des Rotationscylinders. — Dieses brauchen wir jedoch nicht zu construiren, sondern wir nehmen das $\frac{1}{p}$-fache der Ordinaten dieser Punkte, und die so erhaltenen Punkte bestimmen die Strahlen des Büschels 9).

Setzen wir in die Gleichung 8) $\Delta = 0$, so geht diese in die Gleichung 9) über, und hieraus folgt:

Die Strahlen des Büschels 9) sind den Asymptoten der Hyperbeln des Systems Σ_1 parallel.

§ 6.

Die Isophoten der nichtcentralen Flächen zweiter Ordnung.

Die allgemeine Gleichung dieser Flächen ist

$$10) \qquad F \equiv Ax^2 + By^2 - 2Dz = 0.$$

Nach der Gleichung 2) ist dann die Gleichung des Isophotoidensystems dieser Flächen

$$11) \qquad L = \frac{\alpha A x + \beta B y - \gamma D}{\sqrt{(Ax)^2 + (By)^2 + D^2}}.$$

Setzen wir

$$\frac{B}{A} = p, \quad \frac{1}{A} = q,$$

so ist

$$12) \qquad L = \frac{\alpha x + \beta p y - \gamma q D}{\sqrt{x^2 + (py)^2 + (qD)^2}}.$$

Hieraus folgen die Sätze:

Die Isophotoiden der nicht centralen Flächen zweiter Ordnung sind im Allgemeinen Cylinderflächen zweiter Ordnung, die auf der xy-Ebene senkrecht stehen, und das System der Leitlinien derselben in der xy-Ebene ist dem System Σ_1 congruent.*)

Die Isophotoidensysteme der nicht centralen Flächen zweiter Ordnung, in deren Gleichung keine der Grössen A, B, D gleich 0 oder ∞ ist, sind affin.

Die Gleichung 12) repräsentirt das System der Grundrissprojectionen der Isophoten dieser Flächen. — Die Construction dieses Systems ist in § 4 angegeben. Sind so die Grundrissprojectionen der Isophoten ausgeführt, dann können wir auch sehr leicht die Aufrissprojectionen construiren.

*) Es ist selbstverständlich, dass in Gleichung 8) Δ gleich D genommen werden muss.

Bei dem elliptischen Paraboloid benutzen wir zu diesem Zwecke die Schnitte zur z-Axe senkrecht gelegter Ebenen, bei dem hyperbolischen Paraboloid die in demselben liegenden Geraden. Hiermit ist denn auch die Construction der Isophoten der beiden Paraboloide erledigt. Das in Fig. 1 Taf. VI dargestellte System Σ ist zugleich das System der Grundrissprojectionen von den Isophoten eines Rotationsparaboloides; das in Fig. 2 dargestellte System Σ_1 ist zugleich das System der Grundrissprojectionen von den Isophoten eines elliptischen Paraboloides. — Gehen wir den Weg der Construction in entgegengesetzter Richtung, so können wir auch die Lichtstärke eines beliebig gegebenen Flächenpunktes bestimmen.

Für das Rotationsparaboloid ist $p=+1$, für das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid ist $p=-1$. — Hieraus folgt:

> Die Systeme der Grundrissprojectionen von den Isophoten der Rotationsparaboloide und der gleichseitig-hyperbolischen Paraboloide sind ähnlich.

In gleicher Weise kann man aus den in dieser Abhandlung aufgestellten allgemeinen Gleichungen oder Sätzen viele Specialsätze ableiten, welche für die Isophotenconstruction oft sehr nützlich sind.

§ 7.

Untersuchung der Systeme Σ und Σ_1. Vereinfachte Construction der Isophoten der Flächen zweiter Ordnung.

Die Gleichung des Systems Σ ist nach § 3

$$L=\frac{\alpha x+\beta y+\gamma d}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}.$$

Drehen wir das Coordinatensystem, auf welches diese Gleichung bezogen ist, um den Coordinatenanfang bis die x-Axe mit der Projection der Lichtstrahlenrichtung zusammenfällt, d. h. setzen wir:

$$\text{statt } x,\quad x\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}-y\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

$$\text{statt } y,\quad x\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+y\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

dann wird die transformirte Gleichung des Systems Σ

$$L=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,.\,x+\gamma d}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}.$$

Bezeichnen wir mit ν den Winkel, welchen die Lichtstrahlenrichtung mit der z-Axe einschliesst, dann ist

$$\gamma=\cos\nu,\quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sin\nu,$$

und hiernach

$$L=\frac{x\,.\,\sin\nu+d\cos\nu}{\sqrt{x^2+y^2+d^2}}.$$

Für $L=0$ ist

$$x=-d\cot\nu=S_0Q \text{ (Fig. 1).}$$

Diese Gleichung repräsentirt die Gerade p.

Nehmen wir jetzt den Punkt Q als Coordinatenanfang, d. h. setzen wir statt x, $x-d\cot\nu$, dann ist die Gleichung des Systems Σ:

$$L=\frac{x\sin\nu}{\sqrt{(x-d\cos\nu)^2+y^2+d^2}}.$$

Hieraus folgt durch Umformung der Gleichung

$$\alpha)\quad x^2+\frac{L^2}{L^2-\sin^2\nu}\cdot y^2-2\frac{L^2 d\cot\nu}{L^2-\sin^2\nu}\cdot x+\frac{L^2d^2}{\sin^2\nu\,(L^2-\sin^2\nu)}=0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass die Mittelpunkte der Kegelschnitte des Systems Σ auf der jetzigen x-Axe liegen, und dass deren Abscisse

$$\beta)\qquad m=\frac{L^2 d\cot\nu}{L^2-\sin^2\nu}$$

ist.

Setzen wir statt x, $x+m$, so erhalten wir die Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte des Systems Σ

$$\gamma)\qquad \frac{(L^2-\sin\nu^2)^2}{d^2L^2(1-L^2)}\cdot x^2+\frac{L^2-\sin\nu^2}{d^2(1-L^2)}\cdot y^2=1.$$

Hiernach sind die Quadrate der Halbaxen dieser Kegelschnitte

$$a^2=\frac{d^2L^2(1-L^2)}{(L^2-\sin^2\nu)^2},$$

$$b^2=\frac{d^2(1-L^2)}{L^2-\sin^2\nu};$$

ferner ist der halbe Parameter dieser Kegelschnitte

$$\delta)\qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}=\frac{b^2}{a}=\frac{d\sqrt{1-L^2}}{L},$$

und wenn wir $L=\cos\lambda$ setzen

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{p}=d\tan\lambda.$$

Der Halbparameter der Kegelschnitte des Systems Σ ist der Tangente des Winkels λ proportional und unabhängig von der Richtung der Lichtstrahlen.

Aus der Gleichung δ) folgt

$$b^2=\sqrt{a\,.\,d\tan\lambda}.$$

Die Halbaxe b ist die mittlere Proportionale zwischen der Halbaxe a und der Grösse $d\tan\lambda$.

Dieser Satz kann zur Construction der Nebenaxe ($2b$) dienen, da wir die Grössen $2a$ und $d\tan\lambda$ leicht aus der Fig. 1 entnehmen können.

Aus der Gleichung β) ergiebt sich für $L=\pm 1$

$$m_{\pm 1}=\frac{d}{\sin\nu\cos\nu}.$$

Dies ist der Abstand des Punktes P von Q.

Setzen wir

$$\mu = m - m_{\pm 1},$$

so ist

$$\mu = d \tan v \cdot \frac{1 - L^2}{L^2 - \sin^2 v},$$

und da

$$b^2 = \frac{d^2 (1 - L^2)}{L^2 - \sin^2 v}$$

ist, ergiebt sich

$$b^2 = \mu d \cot v.$$

Hieraus folgt der Satz:

Die Endpunkte der Nebenaxen ($2b$) aller Kegelschnitte des Systems Σ liegen auf zwei congruenten Parabeln, welche den Punkt P als gemeinschaftlichen Scheitel, die Projection der Lichtstrahlenrichtung als gemeinschaftliche, aber entgegengesetzt gerichtete Axe haben, und deren Parameter gleich ($d \cot v$) der Strecke $S_0 Q$ (Fig. 1) ist.

Auf der einen dieser Parabeln liegen die Endpunkte der Nebenaxen von den Ellipsen, auf der anderen die Endpunkte von den Nebenaxen der Hyperbeln des Systems Σ.

Dieser Satz ist, wie man leicht erkennt, zu einer sehr einfachen Construction der Kegelschnitte des Systems Σ behilflich.

Da die Systeme Σ und Σ_1 affin sind, so gilt auch der Satz:

Die Endpunkte aller der Geraden p_1 (Fig. 2) parallelen Durchmesser der Kegelschnitte des Systems Σ_1 liegen auf zwei congruenten Parabeln, welche sich in dem Punkt P berühren und die Gerade $S_0 P_1$ als gemeinsamen aber entgegengerichteten Durchmesser haben.

Auf der einen Parabel liegen die Endpunkte der Ellipsendurchmesser, auf der anderen die Endpunkte der Hyperbelndurchmesser, und alle diese Durchmesser haben die Gerade $S_0 P_1$ als conjugirten Durchmesser.

Aus den Axenwerthen der Kegelschnitte Σ ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sin v}{L}.$$

Diese Gleichung liefert den Satz:

Die numerische Excentricität der Kegelschnitte des Systems Σ ist der Lichtstärke umgekehrt proportional.

Aus der Gleichung α) dieses Paragraphen folgt nach einfacher Umformung

$$\frac{L^2 - \sin^2 v}{L^2} \cdot x^2 + y^2 - 2d \cot v \cdot x + \frac{d^2}{\sin^2 v} = 0.$$

In dieser Gleichung für das System Σ ist nur in den Coefficienten von x^2 die veränderliche Grösse L enthalten, und da die Systeme Σ und Σ_1 affin sind, so ergiebt sich der Doppelsatz*):

Die Kegelschnitte des Systems Σ berühren sich in denselben zwei imaginären Punkten der Geraden p (Fig. 1).

Die Kegelschnitte des Systems Σ_1 berühren sich in denselben zwei imaginären Punkten der Geraden p_1 (Fig. 2).

Die Systeme Σ und Σ_1 sind hiernach specielle Kegelschnittbüschel. — Es gelten ferner die bekannten Sätze:

Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ schneiden sich in einem Punkte der Geraden p.

Die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ_1 schneiden sich in einem Punkte der Geraden p_1.

Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ liegen auf einer Geraden, die durch den Punkt P geht.

Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems Σ_1 liegen auf einer Geraden, die durch den Punkt P_1 geht.

In dem Systeme Σ (Σ_1) ist P (P_1) ein Cardinalpunkt, die Gerade p (p_1) eine Cardinallinie**). — Nach § 3 können wir auch das System Σ (Σ_1) als ein involutorisches ebenes System ansehen, in dem der Punkt P (P_1) das Involutionscentrum und die Gerade p (p_1) die Involutionsaxe ist***).

Schneiden wir das Isophotoidensystem S (§ 3) durch eine Ebene E, welche senkrecht auf der Geraden LS steht, aber nicht durch den Punkt S geht dann, ist dieser Durchschnitt ein System von concentrischen Kreisen, welches wir mit Σ' bezeichnen wollen. Da nun das System Σ ebenfalls ein ebener Schnitt von S ist, so folgt der Satz:

Die Systeme Σ' und Σ sind collinear.

Aus diesem Satze lassen sich auch sehr leicht die oben ausgesprochenen Doppelsätze ableiten, wenn man beachtet, dass der Mittelpunkt der

---

*) L. J. Magnus, Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie I. Theil, S. 222.

**) Gretschel, Organische Geometrie. Leipzig 1868. Quandt und Händel. Seite 121.

***) Reye, Geometrie der Lage II. Theil, Seite 109. Hannover, Carl Rümpler 1868.

concentrischen Kreise des Systems Σ' in Bezug auf alle Kreise der Pol der unendlich fernen Geraden in Σ' ist, welche in Σ der Geraden p entspricht. Ferner können wir auch nach diesem Satze mittelst des Systems (Σ') concentrischer Kreise die Kegelschnitte des Systems Σ construiren. Um dies auszuführen, legen wir die Ebene durch den Punkt P Fig. 3 (Fig. 1), dann ist P der Mittelpunkt der concentrischen Kreise Σ', und die Ebene des Systems Σ wird von E in einer Geraden c geschnitten, welche durch P geht und auf $S_1 P$ senkrecht steht. Drehen wir die Ebene E um c bis sie mit der Ebene des Systems Σ zusammenfällt, dann behalten die Systeme Σ' und Σ collineare Lage. In Fig. 3, Taf. VI ist die Gerade c die Collineationsaxe, der Punkt C das Collineationscentrum und die Geraden p und i' sind die Gegenaxen; denn construiren wir wieder in Fig. 3, wie in Fig. 1 angegeben, den Strahlenbüschel S_2, machen QC gleich QS_2 und ebenso PR' gleich PS_2, so ist bekanntlich C das Collineationscentrum und die durch Q und R' zu c parallel gezogenen Geraden p und i' sind die Gegenaxen. — Ziehen wir ferner durch P eine Gerade f senkrecht auf PS_2, dann wird das involutorische Strahlenbüschel S_2 durch die Gerade f in einem symmetrischen involutorischen geraden Gebilde geschnitten, in welchem je zwei zugehörige Punkte die Durchmesserendpunkte der um P beschriebenen concentrischen Kreise des Systems Σ' sind. — Hierdurch ist das System Σ' gegeben und mittelst dieses Systems ist auch das System Σ leicht zu construiren. In der Fig. 3 entspricht dem Kreise K' (Lichtstärke 0,9) in Σ' die Ellipse K in Σ, und dem unendlich grossen Kreise (Lichtstärke 0) in Σ' die Gerade p in Σ. — Diesen unendlich grossen Kreis können wir für die Folge unbeachtet lassen, weil die Gerade p in Σ ihn vertritt.

Den Polaren des Punktes R' in Bezug auf die Kreise in Σ' entsprechen die Nebenaxen der Kegelschnitte in Σ. Den Kreistangenten an den Schnittpunkten, welche die Gerade i' mit den Kreisen bildet, entsprechen die Asymptoten der Hyperbeln des Systems Σ. — Die Berührungspunkte der Tangenten, welche von dem Punkte R' an die Kreise in Σ' gezogen werden können, liegen auf einem Kreise, der durch P und R' geht. Diesen Berührungspunkten in Σ' entsprechen die Endpunkte der Nebenaxen der Ellipsen in Σ; und da dem Punkte R' in Σ' ein unendlich ferner Punkt in Σ entspricht, so müssen auch diese Axenendpunkte in einer Parabel liegen, was schon oben analytisch bewiesen ist.

Ist die Zeichnenfläche zu klein für die Darstellung des grössten Kreises, welcher der Lichtstärke 0,1 entspricht, so können wir entweder die Ebene des Systems Σ parallel zu sich näher an den Flächenmittelpunkt S rücken und dadurch das System Σ verkleinern, oder wir können auch die auf PS senkrecht stehende Ebene E näher an S rücken. Hierdurch wird zwar die Collineationsaxe c und die Gegenaxe i' näher an Q gebracht und die Construction von Σ' und Σ ein wenig modificirt, aber nicht erschwert. Eine besondere Modification der Construction tritt ein, wenn wir die

Ebene E so legen, dass die beiden Gegenaxen p und i' zusammenfallen. Die beiden Systeme Σ' und Σ sind dann in collinearer Involution.

In den §§ 3 und 4 ist schon gesagt, dass das System Σ zur Construction der Isophoten der Kugelfläche und der Rotationsflächen zweiter Ordnung dienen könnte, aber keine Anwendung fände, weil wir im ersten Theile dieser Abhandlung*) für diese Flächen eine viel einfachere Construction angegeben haben. Wir wollen dennoch die Isophotenconstruction mittelst des Systems Σ in einer anderen Weise als dies in den §§ 3 und 4 geschehen, ausführen, um zu einer einfacheren Isophotenconstruction der Flächen zweiter Ordnung zu gelangen.

Legen wir durch die z-Axe einen Ebenenbüschel, dann wird das Isophotoidensystem S in involutorischen Strahlenbüscheln, die Ebene des Systems Σ in einem Strahlenbüschel geschnitten, dessen Mittelpunkt S_1 (Fig. 3, Taf. VI) ist. Auf jedem Strahl dieses Büschels S_1 wird durch das System Σ ein involutorisches gerades Gebilde erzeugt, welches beziehungsweise perspectivisch zu dem involutorischen Strahlenbüschel (S) liegt. Diese involutorischen geraden Gebilde auf den einzelnen Strahlen des Büschels S_1 können wir aber, ohne das System Σ fertig vor uns zu haben — was bisher nöthig war — auf folgende Weise construiren:

Es sei in Fig. 3 S_1 (α, β, γ) der genannte Strahlenbüschel in Σ. Wir bestimmen, wie in der Figur angegeben, in Σ' den Punkt S' welcher S_1 entspricht; und da die Punkte α, β, γ auf der Collineationsaxe c liegen, sich also selbst entsprechen, so ist S' (α, β, γ) der entsprechende Büschel in Σ'. Die Strahlen $S'\alpha$, $S'\beta$, $S'\gamma$ schneiden die concentrischen Kreise Σ' in symmetrischen involutorischen geraden Gebilden. Diese projiciren wir von dem Collineationscentrum C aus auf die entsprechenden Strahlen $S_1\alpha$, $S_1\beta$, $S_1\gamma$ und erhalten so auf den Strahlen des Büschels S_1 die für die Isophotenconstruction nöthigen involutorischen geraden Gebilde ohne Hilfe des *fertigen* Systems Σ; statt dessen brauchen wir nur das viel einfachere System concentrischer Kreise Σ' zu construiren. Verbinden wir die Punkte dieser involutorischen geraden Gebilde mit S, dem Mittelpunkt der Fläche, durch Gerade, dann sind ihre Durchschnitte mit dieser Fläche Punkte der Isophoten dieser Fläche zweiter Ordnung.

Da die Berührungspunkte der von S' an die concentrischen Kreise (Σ') gezogenen Tangenten auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesser $S'P$ ist, so folgt der Satz:

Die ersten Ordnungspunkte der involutorischen geraden Gebilde auf den Strahlen des Büschels S' liegen auf einem

Die ersten Ordnungspunkte der involutorischen geraden Gebilde auf den Strahlen des Büschels S_1 liegen auf einer

*) Zeitschrift für Math. u. Phys. Heft 3. 1868.

Kreise, dessen Durchmesser $S'P$ ist; die zweiten Ordnungspunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden.

Ellipse, deren eine Axe S_1P ist; die zweiten Ordnungspunkte liegen auf der Geraden p.

In gleicher Weise, wie durch die z-Axe der Rotationsfläche zweiter Ordnung, können wir auch durch die x- oder y-Axe derselben einen Ebenenbüschel legen; wir erhalten dann aber in Σ einen Parallelstrahlenbüschel, in dem jeder Strahl Träger eines involutorischen geraden Gebildes ist, und dem in Σ' ein Strahlenbüschel entspricht, dessen Mittelpunkt in der Gegenaxe i' liegt. Da die Systeme Σ' und Σ collinear, die Systeme Σ und Σ_1 affin sind, so ist auch jedes dem System Σ' ähnliches System concentrischer Kreise, welches wir mit Σ'' bezeichnen wollen, dem System Σ_1 collinear. Wir können hiernach mit Hilfe des Systems Σ'' das System Σ_1 construiren. — Um dies in der einfachsten Weise auszuführen, müssen wir Σ'' und Σ_1 in collineare Lage bringen. Zu diesem Zwecke construiren wir zunächst, um Σ'' zu erhalten, von dem System Σ' in Figur 4 nur die Gerade l' (QP in Fig. 3, Taf. VI), auf dieser die Punkte P und Q und die Gerade c, welche in P auf l' senkrecht steht; ferner bestimmen wir, wie in Fig. 3 gezeigt, auf der Geraden c das symmetrische involutorische gerade Gebilde und, wie in § 4 angegeben, die Punkte Q_1 und P_1 in Σ_1, welche den Punkten Q und P in Σ entsprechen. Dann entspricht, da S_0X die Affinitätsaxe ist, der Geraden c in Σ die Gerade c_1 in Σ_1. Hierauf projiciren wir durch einen zu S_0Y parallelen Strahlenbüschel das symmetrische involutorische gerade Gebilde c auf c_1 und beschreiben um P_1 als Mittelpunkt concentrische Kreise, von denen jeder durch zwei zugehörige Punkte des symmetrischen involutorischen geraden Gebildes c_1 geht. Dieses System concentrischer Kreise ist das gewünschte, welches wir oben mit Σ'' bezeichnet haben. Es ist dem System Σ' ähnlich, daher auch collinear mit Σ_1 und hat mit diesem collineare Lage; denn beide Systeme (Σ'' und Σ_1) haben das involutorische gerade Gebilde c_1 entsprechend gemein, und diese Gerade c_1 ist demnach die Collineationsaxe. Um nun noch das Collineationscentrum C_1 zu erhalten, bestimmen wir auf bekannte Weise in Σ'' den Punkt R'', welcher dem Punkt R' in Σ' entspricht; ziehen Q_1C_1 parallel und gleich P_1R'', dann ist C_1 das Collineationscentrum. Ziehen wir ferner durch Q_1 und R'' die Geraden p_1 und i'' parallel der Geraden c_1, dann sind p_1 und i'' die Gegenaxen der Systeme Σ_1 und Σ''. Hiernach ist nun auch mit Hilfe der concentrischen Kreise in Σ'' das System Σ_1 leicht zu construiren. Die Polaren des Punktes R'' in Bezug auf alle Kreise in Σ'' entsprechen dem der Geraden c_1 parallelen Durchmesser der Kegelschnitte in Σ_1. Den Kreistangenten an den Schnittpunkten, welche die Gegenaxe i'' mit den concentrischen Kreisen in Σ'' bildet, entsprechen die Asymptoten der Hyperbeln des System Σ_1. Die Berührungspunkte der Tangenten, welche von R'' an die Kreise in Σ'' gezogen werden können,

liegen auf einem Kreise, dessen Durchmesser $P_1 R''$ ist und durch die Punkte P_1 und R'' geht. Diesen Berührungspunkten entsprechen die Endpunkte der zu c_1 parallelen Durchmesser der Ellipsen in Σ_1; diese Endpunkte liegen daher auf einer Parabel, die durch P_1 geht, was schon oben bewiesen wurde.

Ebenso wie im System Σ können wir auch hier im System Σ_1 die involutorischen geraden Gebilde auf den Strahlen des Büschels erhalten, welcher entsteht, wenn wir durch die z-Axe der Fläche zweiter Ordnung einen Ebenenbüschel legen.

Es seien in Fig. 4 $S_0\alpha_1$, $S_0\beta_1$, $S_0\gamma_1$ drei Strahlen dieses Büschels. Dem Punkte S_0 in Σ_1 entspricht dann, wie man aus der Fig. 4 ersieht, der Punkt S'' in Σ''; die Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ entsprechen sich selbst, und folglich entspricht dem Strahlenbüschel S_0 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ in Σ_1 der Strahlenbüschel S'' $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ in Σ''. Die concentrischen Kreise in Σ'' erzeugen auf den Strahlen $S''\alpha_1$, $S''\beta_1, \ldots$ symmetrische involutorische gerade Gebilde; diese projiciren wir von C_1 aus auf die entsprechenden Strahlen $S_0\alpha_1$, $S_0\beta_1, \ldots$ und erhalten so auf allen Strahlen des Büschels S_0 die für die Isophotenconstruction nöthigen involutorischen geraden Gebilde ohne Hilfe des *fertigen* Systems Σ_1 mit Hilfe des leicht zu construirenden Systems concentrischer Kreise Σ''.

Um die Zeichnung dieser involutorischen geraden Gebilde zu controliren und um schärfere Schnitte für ungenaue Schnitte zu erhalten, können wir von der zweiten collinearen Lage der Systeme Σ'' und Σ_1, bei der die Collineationsaxe c_1 und das System Σ'' ungeändert bleibt, vortheilhaften Gebrauch machen. Dies ist in den Figuren 3 und 4 ausgeführt, und daher sind die Punkte auf den Strahlen in der Zeichnung durch Kreuzchen repräsentirt.

Da die Berührungspunkte der von S'' ausgehenden an die Kreise Σ'' möglichen Tangenten auf einem Kreise liegen, dessen Durchmesserendpunkte P_1 und S'' sind, so folgt der Satz:

Die ersten Ordnungspunkte der involutorischen geraden Gebilde auf den Strahlen des Büschels S'' liegen auf einem Kreise, in dem P_1 und S'' Durchmesserendpunkte sind; die zweiten Ordnungspunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden.

Die ersten Ordnungspunkte der involutorischen geraden Gebilde auf den Strahlen des Büschels S_0 liegen auf einer Ellipse, in der P_1 und S_0 Durchmesserendpunkte sind; die zweiten Ordnungspunkte liegen auf der Geraden p.

Statt durch die z-Axe kann man auch durch die x- oder y-Axe der Fläche zweiter Ordnung einen Ebenenbüschel legen; dann erhalten wir in der Ebene des Systems Σ_1 ein Parallelstrahlenbüschel, welchem in Σ'' ein

Strahlenbüschel entspricht, dessen Mittelpunkt in der Gegenaxe i'' liegt. Auf den Strahlen dieser Büschel erzeugen die concentrischen Kreise in Σ'' involutorische gerade Gebilde. Diese projiciren wir von C_1 aus auf die entsprechenden Strahlen des Parallelstrahlenbüschels und erhalten so die zur Isophotenconstruction behilflichen involutorischen geraden Gebilde; denn verbinden wir die Punkte dieser Gebilde durch Gerade mit dem Flächenmittelpunkt, dann sind die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Fläche, Punkte der Isophoten derselben.

Durch die in § 4 angegebene Isophotenconstruction gelangen wir zwar auf kurzem Wege zu den nöthigen involutorischen geraden Gebilden, aber der dort benutzte Ebenenbüschel ist durch die Gerade $S_1 P_1$*) gelegt und die Schnitte der Ebenen dieses Büschels mit der Fläche zweiter Ordnung sind mühsam zu construiren. — Die in diesem Paragraphen abgeleitete Construction führt zwar nicht ganz so rasch zu den nöthigen involutorischen geraden Gebilden; aber wir legen dagegen den Ebenenbüschel durch eine Axe der Fläche zweiter Ordnung, und dann sind die Schnitte der Ebenen dieses Büschels mit dieser Fläche sehr leicht zu construiren. Hiernach ist im Allgemeinen die Construction der Isophoten der Flächen zweiter Ordnung, welche Raumcurven vierter Ordnung sind, auf die Construction concentrischer Kreise (des Systems Σ'') und auf die Construction der Schnitte zurückgeführt, welche durch eine Axe der Fläche zweiter Ordnung gelegte Ebenen mit dieser Fläche bilden.

Die Construction der geradlinigen Isophoten der Kegelfläche zweiter Ordnung vereinfacht sich durch das Systems Σ'' sehr. Ist k_1 der Kegelschnitt der Kegelfläche mit der Ebene des Systems Σ_1, dann construiren wir den entsprechenden Kegelschnitt k'' in Σ''; zu den Schnittpunkten, welche k'' mit den concentrischen Kreisen in Σ'' bildet, bestimmen wir die entsprechenden Punkte auf k_1 in Σ_1, diese verbinden wir durch Gerade mit der Kegelspitze, dann sind diese Geraden die Isophoten der Kegelfläche.

*) S_1 ist der Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung.

Kleinere Mittheilungen.

XI. Ueber die Genauigkeit der Winkelgleichung des Stampfer'schen Nivellirinstrumentes. Von ANTON SCHELL, Professor der Geodäsie und descriptiven Geometrie am baltischen Polytechnikum zu Riga. (Hierzu Tafel V, Fig. 2 und 3.)

Im Jahre 1800 hat der Ingenieuroberst J. L. Hogrewe in seinem Werke: „Praktische Anleitung zum Nivelliren oder Wasserwägen nach einer in vielen Stücken veränderten und erleichterten Methode" ein Nivellirinstrument bekannt gemacht, welches gestattet, aus den Umdrehungszahlen einer an dem Instrumente angebrachten, verticalen Mikrometerschraube, welche der horizontalen Richtung der Visirlinie des Fernrohrs sowie der Einstellung auf zwei an der Nivellirlatte bezeichnete Punkte entsprechen, sowohl die Lattenhöhe als auch die Entfernung der Latte vom Instrumente auf geometrischem Wege zu bestimmen.

Hogrewe hat sein Instrument sowie die mit demselben auszuführende besondere Methode des Nivellirens in den wesentlichsten Theilen einer sorgfältigen Prüfung unterzogen. Nachdem er in dem zweiten Abschnitte des Vorberichtes seines oben citirten Werkes die Vortheile erwähnte, welche diese besondere Methode des Nivellirens besitzt, untersuchte er in dem dritten Abschnitte den Einfluss, welchen eine fehlerhafte Ablesung an der Schraube, sowie ein ungenaues Einspielen der Libelle auf die Lattenhöhe hervorbringt; es wurde ferner gezeigt, welche Correctionen erforderlich sind, wenn das Gefälle bedeutend wird, und schliesslich angegeben, wie mittelst Tabellen für ein bestimmtes Individuum die erforderliche Rechnung vereinfacht werden kann.

Professor Stampfer, in der Vorrede zu seinem Werke: „Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren" der Arbeiten Hogrewe's erwähnend und von der Richtigkeit und Ausführbarkeit seiner Vorschläge überzeugt, suchte die an dem Hogrewe'schen Instrumente noch vorhan-

denen Mängel und Gebrechen zu beseitigen und dadurch dem Instrumente eine Genauigkeit zu verleihen, welche kaum etwas zu wünschen übrig lässt. Insbesondere suchte er die mangelhafte Führung des Fernrohrs durch die Mikrometerschraube dadurch zu beseitigen, dass er die Verbindung derselben mit dem Fernrohre und dem Träger des Instrumentes durch Kugelgelenke herzustellen versuchte, wodurch die Mikrometerschraube eine veränderliche Lage erhielt. Die mangelhafte Art und Weise, wie Hogrewe die Rectification seines Instrumentes ausführte, veranlassten Professor Stampfer, den Drehungspunkt des Fernrohrs nicht in die Visirlinie zu legen, sondern derselben eine excentrische Bewegung zu geben, wodurch es möglich wird, das Fernrohr in seinen Lagern umzulegen und die Rectification des Instrumentes von einem Standpunkte aus rasch und sicher zu vollführen. Dass diese angebrachten Veränderungen nicht Nachahmungen, sondern Verbesserungen sind, bedarf wohl in den Augen des Sachverständigen keines Beweises. Allein nicht nur in der Construction des Instrumentes zeigen sich Verschiedenheiten, sondern auch in der Art und Weise, wie die erhaltenen Ablesungen der Schraube zur Bestimmung der Lattenhöhe und Horizontaldistanz benutzt werden. Während Hogrewe zur Ermittelung der letzteren den rein geometrischen Weg einschlug, zeigte Professor Stampfer, wie dieses verbesserte Nivellirinstrument zur genauen Messung von Verticalwinkeln gebraucht werden kann, und benutzte den mittelst der Mikrometerschraube gemessenen Winkel zur Berechnung obiger Grössen.

Trotz dieser Verbesserungen hat das Stampfer'sche Nivellirinstrument, wie der Verfasser in seiner Anleitung zum Nivelliren selbst sagt, Angriffe und Verkleinerungen erfahren. Erst in neuester Zeit wurde in Poggendorff's Annalen der Physik u. Chemie Band 129 das Stampfer'sche Instrument als einer wesentlichen Verbesserung fähig erkannt, und die Theorie desselben als ungenau und unrichtig bezeichnet. Was von den Verbesserungen zu halten ist, darüber hat sich Professor S. v. Kruspér in denselben Annalen Band 130 klar ausgesprochen. Was die Ungenauigkeit der Theorie betrifft, so wäre diese nur in der Ungenauigkeit oder wohl gar Unrichtigkeit der Stampfer'schen Winkelgleichung zu suchen, da diese es ist, auf welcher die von Professor Stampfer vorgeschlagene Methode des Nivellirens und Distanzmessens, sowie deren Genauigkeit beruht. Der Verfasser jenes Aufsatzes spricht dies auch deutlich aus, indem er sagt, dass das zweite Glied der Winkelgleichung eine ziemlich willkürlich angebrachte Verbesserung sei. In der mehrmals erwähnten Anleitung zum Nivelliren erklärt Professor Stampfer ausdrücklich: Die Erfahrung hat gelehrt, dass bei unseren Instrumenten zwei Glieder der Reihe hinreichend sind, um alle durch das Instrument messbare Winkel bis auf eine Secunde darzustellen. Wir wollen nun auf theoretischem Wege untersuchen, in wie weit sich dieser Ausspruch bewahrheitet.

Wie gleich anfangs erwähnt, benutzt Professor Stampfer zur Messung der Verticalwinkel die Mikrometer- oder Elevationsschraube, deren oberes Ende E mit einem Kugelsegmente versehen, und durch eine sphärisch ausgebohrte Platte mit den Trägern des Fernrohrs derart verbunden ist, dass sie nach allen Richtungen frei bewegt, aber nicht gedreht werden kann. Die Mutter M der Elevationsschraube befindet sich in dem mit einer Trommel versehenen Umdrehungskörper, welcher sich mit seinem kugelförmig abgedrehten Ende in einen Stahlring des mit der Trägerplatte verbundenen Prismas legt. Durch eine Spiralfeder wird das Anliegen beider Kugeln an ihre Höhlungen gesichert und jeder todte Gang der Schraube beseitigt. Um die Bewegung des Fernrohrs messen zu können, ist an jenem Träger, an welchem die Elevationsschraube befestigt ist, eine aus 40 Strichen bestehende Theilung angebracht, welche den Schraubengängen der Elevationsschraube entspricht; ausserdem ist die mit dem Rotationskörper in Verbindung stehende Trommel in 100 gleiche Theile getheilt, so dass mittelst entsprechend angebrachter Zeiger $^1/_{100}$ einer Schraubenumdrehung direct und $^1/_{1000}$ durch Schätzung erhalten werden kann.

Sind in Fig. 2, Taf. V, E und M die Mittelpunkte der oben erwähnten Kugelgelenke, C der Drehungspunkt des Fernrohrs, ferner, unter der Voraussetzung, dass der Index der Elevationsschraube auf den Nullpunkt der Theilung gestellt ist, die constanten Dimensionen des Instrumentes

$$CE = R, \quad CM = D, \quad EM = S,$$

ferner

$$\angle ECM = \alpha, \quad \angle CEM = \beta,$$

so ist aus dem Dreieck EMC

$$\cos\alpha = \frac{D^2 + R^2 - S^2}{2DR}.$$

Wird die Elevationsschraube bei ungeänderter Lage der Alhidade um n Schraubengänge, welche einer Länge s entsprechen, weiter bewegt, so gelangt die Linie EC, welche der Visirlinie des Fernrohrs entsprechen mag, in die Lage $E'C$, und es ist, wenn der von der Visirlinie durchlaufene Winkel ECE' mit W bezeichnet wird:

$$\cos(\alpha - W) = \frac{D^2 + R^2 - (S - s)^2}{2DR}$$

$$= \frac{D^2 + R^2 - S^2}{2DR} + \frac{S}{DR}s - \frac{1}{2DR}.s^2$$

Wenn $\cos(\alpha - W)$ in eine Reihe entwickelt und die Glieder der vierten und höheren Ordnung vernachlässigt werden, so erhält man:

$$1) \qquad W - \tfrac{1}{2}\cot g\,\alpha\,W^2 - \tfrac{1}{6}W^3 = \frac{S}{DR\sin\alpha}s - \frac{1}{2DR\sin\alpha}s^2 \ldots$$

Setzt man

$$2) \qquad W = A_0 s + B_0 s^2 + C_0 s^3 \ldots$$

ferner

$$\angle EMC = \gamma,$$

und beachtet, dass

$$\sin \gamma = \frac{R \sin \alpha}{S},$$

so findet man aus den Gleichungen 1) und 2) nach der Methode der unbestimmten Coefficienten:

$$A_0 = + \frac{1}{D \sin \gamma}$$

$$B_0 = - \frac{1}{2 D^2 \sin \gamma^2} \left\{ \frac{D \sin \gamma - S \operatorname{cotg} \alpha}{S} \right\}$$

$$C_0 = + \frac{1}{6 D^3 \sin \gamma^3} \left\{ 1 - 3 \operatorname{cotg} \alpha \left(\frac{D \sin \gamma - S \operatorname{cotg} \alpha}{S} \right) \right\}.$$

Wird der Winkel W in Secunden ausgedrückt, und $s = ng$ gesetzt, wo g die Höhe eines Schraubenganges bezeichnet, so erhält man durch Substitution der soeben erhaltenen Werthe in Gleichung 2) für den Winkel, welcher den ersten n Schraubengängen entspricht, den Ausdruck:

$$3) \quad \left\{ \begin{aligned} W'' = & \frac{g}{D \sin \gamma \sin 1''} n - \frac{g^2}{2 D^2 \sin \gamma^2 \sin 1''} \left\{ \frac{D \sin \gamma - S \operatorname{cotg} \alpha}{S} \right\} n^2 \\ & + \frac{g^3}{6 D^3 \sin \gamma^3 \sin 1''} \left\{ 1 - 3 \operatorname{cotg} \alpha \left(\frac{D \sin \gamma - S \operatorname{cotg} \alpha}{S} \right) \right\} n^3 \ldots \end{aligned} \right.$$

oder ganz allgemein:

$$\text{I.} \qquad W'' = A'' n + B'' n^2 + C'' n^3 \ldots$$

Um die speciellen Werthe der Constanten kennen zu lernen, wurden die Dimensionen eines aus der Werkstätte des k. k. polytechnischen Institutes zu Wien hervorgegangenen Nivellirinstrumentes direct ermittelt, und hierfür folgende Werthe erhalten:

$R = 6{,}1$ Wiener Zolle
$D = 6{,}3$ „ „
$S = 3{,}0$ „ „
$g = 0{,}01875$ „ „

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung 3) erhält man als Winkelgleichung:

$$4) \qquad W'' = 644'',32\, n - 0{,}1162\, n^2 + 0{,}0003636\, n^3 \ldots$$

Diese Gleichung zeigt zunächst, dass

1) Der Coefficient B des zweiten Gliedes negativ ist. Dies wird stets der Fall sein, so lange

$$D \sin \gamma - S \operatorname{cotg} \alpha > 0$$

oder wie sich mit Hilfe des Dreiecks CEM leicht zeigen lässt

$$S^2 > \pm (D^2 - R^2).$$

Bei allen aus der genannten Werkstätte hervorgegangenen Nivellirinstru-

menten, welche genau nach obigem Principe construirt sind, ist

$$S^2 > \pm (D^2 - R^2),$$

weshalb das zweite Glied der Winkelgleichung stets negativ ausfällt;

2. der Einfluss des dritten Gliedes unbedeutend ist, und den Betrag von 1 Secunde nicht erreicht, so lange $n < 15$ ist; dagegen bedeutend werden kann, sobald n die Zahl 15 überschreitet. Es folgt hieraus unmittelbar, dass, insofern der Constantenbestimmung der Winkelgleichung die directen Abmessungen des Nivellirinstrumentes zu Grunde gelegt würden, die Winkelgleichung als aus drei Gliedern bestehend betrachtet werden müsse. Abgesehen davon, dass der genauen Ermittelung der Dimensionen des Instrumentes grosse Schwierigkeiten entgegentreten, sind es auch noch andere Umstände, welche diese Art der Constantenbestimmung unbrauchbar erscheinen lassen. Um sich insbesondere von den etwa vorhandenen Ungleichförmigkeiten der Schraubengänge, welche durch die bei der Bearbeitung derselben erzeugte Erwärmung resultiren können, unabhängig zu machen, geschieht die Constantenbestimmung am einfachsten und sichersten dadurch, dass man auf geeignetem Wege eine Reihe von Verticalwinkeln ermittelt, dieselben bei gehöriger Aufstellung des Instrumentes mit der Elevationsschraube misst, und aus den erhaltenen Resultaten mittelst der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten bestimmt. Wird diese Ermittelungsart der Constanten vorausgesetzt, so lässt sich zeigen, dass die einfachere aus zwei Gliedern bestehende von Professor Stampfer angenommene Winkelgleichung

II. $$w = an + bn^2 \ldots$$

die oben unter I. gegebene innerhalb der Grenzen, welche der Winkelmessung durch die Länge der Elevationsschraube gesteckt sind, bis auf eine Secunde genau zu ersetzen im Stande ist.

Die Constanten a und b werden von den theoretisch bestimmten A und B um kleine Grössen abweichen, welche die Bestimmung haben, innerhalb gewisser Grenzen eine Uebereinstimmung der durch die Gleichungen I und II dargestellten Winkelwerthe bis auf eine Secunde zu erzielen. Setzt man

5) $$\begin{cases} a = A + xC \\ b = B + yC \end{cases}$$

so sind x und y so zu bestimmen, dass der Gleichung

$$An + Bn^2 + Cn^3 = an + bn^2$$

oder mit Berücksichtigung von 5):

6) $$n^2 = x + ny \ldots$$

Genüge geleistet werde.

Setzt man der Einfachheit halber der Reihe nach $n = 5, 10, 15, \ldots 40$, so erhält man nachstehende Bedingungsgleichungen:

$$25 = x + 5y,$$
$$100 = x + 10y,$$
$$225 = x + 15y,$$
$$400 = x + 20y,$$
$$625 = x + 25y,$$
$$900 = x + 30y,$$
$$1225 = x + 35y,$$
$$1600 = x + 40y,$$

aus welchen die Unbekannten x und y nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt werden können. Die aus den Bedingungsgleichungen sich ergebenden Normalgleichungen sind:

$$2x + 45y = 1275$$
$$3x + 85y = 2700,$$

woraus folgt:

$$x = -387$$
$$y = +45.$$

Werden diese Werthe in Gleichung 5) substituirt, so erhält man

$$a = +644'',18$$
$$b = -0,0998$$

und als Winkelgleichung:

7) $$w = 644'',18\,n - 0'',0998\,n^2 \ldots$$

Die Gleichungen I und II stellen, insofern wir den jeweiligen Stand der Schraube als Abscisse und den zugehörigen Winkelwerth als Ordinate betrachten, zwei Curven K_1 und K_2 Fig. 3 dar, welche sich auf beiden Seiten der Abscissenaxe ins Unendliche erstrecken. Beide Curven weichen vom Ursprunge an bis auf eine gewisse Strecke sehr wenig von einander ab, und durchschneiden sich innerhalb derselben in 3 Punkten O, M_1 und M_2. Um die Lage dieser Durchschnittspunkte zu bestimmen, hat man nur n aus der Gleichung

$$Cn^3 + (B - b)\,n^2 + (A - a)\,n = 0$$

oder wegen Gleichung 5)

$$n^3 - yn^2 - xn = 0$$

zu ermitteln. Werden für x und y obige Werthe substituirt, so erhält man

$$n_1 = 0,$$
$$n_2 = 11,51 = OP_1,$$
$$n_3 = 33,42 = OP_2.$$

An allen übrigen Stellen weichen beide Curven mehr oder weniger von einander ab. Um die Maximalabweichungen zwischen den Curvenstücken OM_1 und M_1M_2 kennen zu lernen, darf man nur die Differenz

8) $$\triangle W = W - w = C\,\{n^3 - yn^2 - xn\}$$

in Bezug auf ihr Maximum untersuchen. Man erhält als Bedingungsgleichung:

$$n^2 - \frac{2}{3} y n - \frac{x}{3} = 0,$$

woraus folgt:

$$n'_1 = 5{,}20 = OQ_1$$
$$n'_2 = 24{,}80 = OQ_2.$$

Diese Werthe in Gleichung 8) substituirt, geben:

$$\triangle W_1 = +0'',309 = N_1 \nu_1$$
$$\triangle W_2 = -1'',026 = N_2 \nu_2.$$

Wie man sieht, findet zwischen beiden Curvenstücken von O bis M_2 nahezu ein Decken statt, da der Maximalunterschied den Werth von einer Secunde kaum überschreitet. Aber auch über O und M_2 hinaus, bevor sich beide Curvenäste für immer von einander entfernen, findet noch eine kleine Strecke hindurch eine grosse Uebereinstimmung beider Curven statt. Man erhält die Lagen der äussersten Punkte N_3 und N_4, deren Abweichungen $N_3 \nu_3$ und $N_4 \nu_4$ dem Maximalunterschiede $\triangle W_2 = \mp 1'',026$ gleichkommen, wenn man diesen Werth in Gleichung 8) substituirt. Man erhält

$$n^3 - 45 n^2 + 387 n \mp 2822 = 0.$$

Diese Gleichung aufgelöst giebt für das obere Zeichen:

$$n_1'' = +24{,}80 = OQ_2,$$
$$n_2'' = +24{,}80 = OQ_2,$$
$$n_3'' = -\ 4{,}60 = OQ_4,$$

und für das untere

$$n_1''' = +36{,}52 = OQ_3,$$
$$n_2''' = +\ 4{,}24 + 7{,}70 \sqrt{-1},$$
$$n_3''' = +\ 4{,}24 - 7{,}70 \sqrt{-1}.$$

Diese Resultate zeigen deutlich, dass circa innerhalb 40 Schraubengänge, d. i. von $n = -4{,}60$ bis $n = +36{,}52$ die unter II angenommene Form der Winkelgleichung der gegebenen Bedingung vollkommen entspricht, da der Unterschied zwischen dieser und der theoretisch bestimmten Winkelgleichung bei den der Construction zu Grunde liegenden Dimensionen *in maximo* nur den Betrag von 1'',026 erreichen kann.

Die auf analytischem Wege erhaltenen Resultate lassen sich übersichtlicher durch Vergleichung aus nachstehender Tabelle entnehmen, in welcher die aus Gleichung I und II berechneten Winkelwerthe für die unmittelbar auf einander folgenden Schraubengänge zusammengestellt sind.

n	Winkelwerthe aus I.			II.		Differenz.
	°	′	″	′	″	
1	0	10	44,20	10	44,08	+0,12
2	0	21	28,18	21	27,96	0,22
3	0	32	11,93	32	11,65	0,28
4	0	42	55,44	42	55,12	0,32
5	0	53	38,73	53	38,40	0,33
6	1	4	21,82	4	21,50	0,32
7	1	15	4,69	15	4,38	0,31
8	1	25	47,31	25	47,06	0,25
9	1	36	29,73	36	29,54	0,19
10	1	47	11,94	47	11,82	0,12
11	1	57	53,93	57	53,90	0,03
12	2	8	35,71	8	35,78	−0,07
13	2	19	17,30	19	17,46	0,16
14	2	29	58,70	29	58,94	0,24
15	2	40	39,89	40	40,24	0,35
16	2	51	20,85	51	21,33	0,48
17	3	2	1,61	2	2,22	0,61
18	3	12	42,21	12	42,92	0,71
19	3	23	22,63	23	23,41	0,78
20	3	34	2,83	34	3,68	0,85
21	3	44	42,85	44	43,77	−0.92
22	3	55	22,67	55	23,66	0,99
23	4	6	2,33	6	3,35	1,02
24	4	16	41,80	16	42,84	1,04
25	4	27	21,07	27	22,11	1,04
26	4	38	0,18	38	1,20	1,02
27	4	48	39,10	48	40,09	0,99
28	4	59	17,86	59	18,78	0,92
29	5	9	56,43	9	57,27	0,84
30	5	20	34,84	20	35,58	0,74
31	5	31	13,09	31	13,67	0,58
32	5	41	51,17	41	51,56	0,39
33	5	52	29,09	52	29,25	0,16
34	6	3	6,85	3	6,74	+0,11
35	6	13	44,44	13	44,04	0,40
36	6	24	21,86	24	21,14	0,72
37	6	34	59,17	34	58,03	1,14
38	6	45	36,31	45	34,73	1,58
39	6	56	13,30	56	11,22	2,08
40	7	6	50,15	6	47,52	2,63

Wird bei der Construction des Nivellirinstrumentes darauf Rücksicht genommen, dass, sobald der Index der Elevationsschraube auf Null gestellt ist, die constanten Dimensionen derselben solche Werthe erlangen, dass entweder $\angle CME = 90°$ oder $\angle CEM = 90°$ wird, so erfüllt die theoretische Winkelgleichung unmittelbar die Form

III. $$\omega = \alpha'' n + \beta'' n^2 \ldots,$$
da in beiden Fällen
$$D \sin \gamma - S \cotg \alpha = 0.$$
Die Gleichung 3) geht dann über in:

9) $$\omega'' = \frac{g}{D \sin 1''} n + \frac{g^2}{6 D^3 \sin 1''} n^2 \ldots$$

Es lässt sich wie oben nachweisen, dass auch die unter III gegebene Form der Winkelgleichung auf jene unter II dargestellte innerhalb der gegebenen Grenzen der Genauigkeit gebracht werden kann.

Wird die Visirlinie des Fernrohrs auf irgend ein Object gerichtet und der Stand n der Elevationsschraube abgelesen, so kann der Verticalwinkel, welchen die Visirlinie mit der dem Nullpunkte der Schraube entsprechenden einschliesst, innerhalb der angegebenen Grenzen der Genauigkeit durch die Gleichung II dargestellt werden. Es folgt hieraus unmittelbar für den Winkel, welcher einer Drehung vom n^{ten} bis m^{ten} Schraubengange entspricht, die Gleichung
$$\omega = a'' (m - n) + b'' (m^2 - n^2).$$

XII. Nachtrag zu dem Aufsatze über Polyeder von J. C. Becker.

(Hierzu Tafel V, Fig. 4 und 5).

Ich hatte das Manuscript meiner Arbeit über Polyeder bereits der Redaction dieser Zeitschrift zugesendet, als ich auf zwei neuere Arbeiten, die eine über Polyeder überhaupt, die andere speciell über eine Erweiterung des Euler'schen Satzes aufmerksam gemacht wurde. Die erstere, von Herrn Camille Jordan unter dem Titel „*Recherches sur les polyèdres*“ im Jahre 1866 in Crelle's Journal veröffentlicht, darf wohl als die gediegenste Arbeit gerühmt werden, welche über diesen Gegenstand erschienen ist. Die andere, 1862 unter dem Titel „Der Census räumlicher Complexe etc.“ von J. B. Listing im 10. Bande der Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen veröffentlicht und auch als besonderer Abdruck erhältlich, gehört nur insofern hierher, als sie an den Euler'schen Satz über Polyeder anknüpft, während sie im Uebrigen nicht von Polyedern, sondern von beliebigen räumlichen Complexen handelt.

Doch ersehe ich aus dieser Arbeit, dass die Erweiterung, welche ich dem Euler'schen Lehrsatze gegeben, nicht mehr neu ist, sondern bereits 1812 von Lhuilier zum Gegenstande einer mir bisher unbekannt gebliebenen Abhandlung gemacht worden, die in den Annalen von Gergonne erschienen. In dieser Arbeit wird der folgende noch allgemeinere Lehrsatz aufgestellt:

Bezeichnet i die Anzahl eingeschlossener Polyederräume im Innern eines grösseren Polyeders, o die Anzahl von durchgehenden Oeffnungen, $p, p' \ldots$ die Anzahl von einge-

schriebenen Polygonen auf Seitenflächen des Polyeders, welche dadurch ringförmig begrenzt (mehrfach zusammenhangend) werden; ist endlich die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten durch S, F und A ausgedrückt, so ist:

$$F + S = A + 2(i - o + 1) + p + p' + p'' + \dots$$

Obgleich ganz selbstständig entstanden, dürfte daher meine Arbeit als Ergänzung sowohl der Untersuchungen von Lhuilier als derjenigen des Herrn Jordan angesehen werden. Mit den letzteren stimmt sie überein in den Herbeiziehungen der Riemann'schen Lehre vom Zusammenhange der Flächen als Eintheilungsgrund für die Polyeder. Herr Jordan beschränkt seine Untersuchungen auf Polyeder, deren Oberflächen ausschliesslich aus einfach zusammenhangenden Flächen zusammengesetzt sind, dehnt sie aber in seinem *Résumé* auf begrenzte Flächennetze und für den Fall aus, dass die einzelnen Flächen nicht mehr eben, die Kanten also nicht mehr gerade sind. Durch das Symbol (m, n) bezeichnet er eine Oberfläche, die von m geschlossenen sich selbst nicht schneidenden Linien begrenzt, und von solchem Zusammenhange ist, dass man n geschlossene sich selbst und einander nicht schneidende Linien auf ihr ziehen kann, ohne sie zu zerstücken.

Für Polygonnetze, die dem Symbole (m, n) entsprechen, stellt er in seinem *Résumé*, ohne den Beweis mitzutheilen, den Satz auf:

$$F + S = A + 2 - m - 2n.$$

In der Hauptabhandlung giebt er für den Fall $m = n = o$ einen so einfachen directen Beweis, dass ich schwankend geworden bin, ob der von mir gewählte Weg, zunächst die Zahl der Dreiecke zu bestimmen, aus welcher die Oberfläche zusammengesetzt ist, oder in welche sie sich zerlegen lässt, sich als der einfachere aufrecht erhalten lasse.

Auf diesen Weg war ich gekommen durch eine Bemerkung des Herrn Prouhet, zu welcher sich derselbe veranlasst sah, als er im Jahre 1860 der Pariser Akademie ein noch unbekanntes Fragment des Descartes mittheilte, worin bereits, jedoch ohne Beweis, der Satz ausgesprochen ist, dass die Summe aller Kantenwinkel eines Polyeders von e Ecken $4e - 8$ Rechte beträgt. Herr Prouhet schloss daraus, dass Descartes auch bereits den Euler'schen Satz gekannt haben müsse, da der Beweis jenes Satzes sich auf diesen stütze. Mir schien dieser Schluss zwar patriotisch, aber sonst nicht sehr gerechtfertigt. Denn einerseits ist nicht zu begreifen, warum Descartes, wenn ihm der Euler'sche Satz bekannt gewesen, davon keine weitere Notiz genommen haben sollte, da er doch mindestens eben so interessant ist, wie der angeblich daraus abgeleitete. Andererseits kommt es doch häufig genug vor, dass von zwei Lehrsätzen jeder als Beweisgrund für den andern angeführt werden kann, und zugleich für jeden ein directer Beweis unabhängig vom anderen existirt. Denn kein geometrischer Lehrsatz ist eine logische Consequenz eines anderen, ausgenommen, wenn er

als specieller Fall bereits darin enthalten ist; sondern jeder ist unmittelbar in der Natur der Sache begründet und eine eigentliche Einsicht in diese Begründung kann nur unmittelbare Anschauung gewähren. Der Beweis ist nur ein Nothbehelf und giebt statt der Einsicht in die immer gegenseitige Abhängigkeit räumlicher Gebilde von einander lediglich die Ueberzeugung von der Gewissheit derselben, indem er dieselbe darstellt als Consequenz früher erkannter Gesetze. Hat nun der eine aus dem Euler'schen Satze den Descartes'schen abgeleitet, so ist dies durchaus kein Grund, warum nicht ein anderer jenen aus diesem ableiten könne, nachdem er diesen zuerst direct begründet; denn jeder kann nur darum auch als Consequenz des anderen dargestellt werden, weil alle Wahrheit mit sich selbst übereinstimmen muss. Der Umstand, dass Descartes den einen dieser Sätze ausspricht, ohne den anderen zu erwähnen, führte mich darum zu einem ganz anderen Schlusse wie Herrn Prouhet, nämlich zu dem, dass sich der Descartes'sche Satz leicht müsse direct ableiten lassen, und dies schien mir um so wahrscheinlicher, als ich bemerkte, dass er auch dann noch gilt, wenn sich unter den Flächen des Polyeders mehrfach begrenzte befinden, während dann der Euler'sche Satz nicht mehr richtig ist.

Der einfache Beweis, den ich für den Descartes'schen Satz ganz auf dieselbe Weise gefunden, wie man den Satz von der Winkelsumme ebener Polygone beweist, nämlich durch Zerlegung der Oberfläche in Dreiecke, war nur eine Bestätigung für die Richtigkeit meiner Vermuthung.

Durch den noch einfacheren Beweis des Herrn Jordan für den Euler'schen Satz in seiner ursprünglichen Gestalt sah ich mich angeregt, auch für den Satz von der Zahl der Dreiecke auf der Oberfläche einen so einfachen directen Beweis zu suchen. Die Resultate dieser kleinen Untersuchung habe ich in dem Folgenden zusammengestellt:

Lehrsatz 1. Jedes einfache ebene oder windschiefe e-Eck lässt sich durch $e-3$ Diagonalen in $e-2$ Dreiecke zerlegen, wobei ganz einerlei ist, wie die Diagonalen gezogen werden, wenn sie sich nur nicht schneiden.

Beweis. Der Satz ist offenbar richtig für $e=4$ und $e=5$. Lässt sich nun zeigen, dass er richtig ist für irgend einen Werth von e, wenn er es für alle kleineren ist, so ist er allgemein bewiesen. Zieht man aber in einem solchen e-Ecke irgend eine Diagonale, und liegen rechts von derselben e_1, links e_2 Seiten des Polygons, so haben die beiden Theilpolygone bezüglich e_1+1 und e_2+1 Seiten und Ecken. Jede dieser Zahlen ist kleiner als e, da $e_1+e_2=e$ ist, und auf jeder Seite der Diagonale wenigstens zwei Seiten liegen müssen. Folglich zerfällt, wenn der Satz für kleinere Werthe von e richtig ist, das erste der Theilpolygone durch e_1-e Diagonalen in e_1-1 Dreiecke, das zweite durch e_2-2 Diagonalen in e_2-1 Dreiecke; das ganze also durch $e_1-2+e_2-2+1=e-3$ Diagonalen in $e_1-1+e_2-1=e-2$ Dreiecke g. e. d.

Dieser Satz bedarf jedoch einer Erläuterung und einer Ergänzung. Betrachtet man nämlich das Polygon lediglich als eine geschlossene Linie, so pflegt man unter Diagonale jede gerade Verbindungslinie zweier Eckpunkte zu verstehen und bei dieser Auffassung ist der Satz nicht richtig. Sei z. B. $\dot{A}BCDA$ ein windschiefes Viereck, so kann dasselbe, als gebrochene Linie betrachtet, zwei verschiedene je in einer Diagonale gebrochene Flächen begrenzen, deren jede durch diese Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt. Fasst man aber jede der beiden Geraden AC und DB als Diagonale auf, so bilden beide mit der ursprünglichen Linie $ABCDA$ vier Dreiecke. Der obige Satz ist also nur richtig, wenn man unter einem einfachen e-Eck nicht eine in e-Punkten gebrochene geschlossene Linie, sondern eine von einer solchen, sich selbst nicht schneidenden Linie begrenzte ebene oder aus ebenen Stücken zusammengesetzte Fläche versteht, und als Diagonale eine jede gerade Verbindungslinie zweier nicht benachbarten Ecken ansieht, welcher in diese Fläche verläuft.

Dies vorausgesetzt, zeigt der blosse Blick auf die Fig. 4 und 5 auf Taf. V unmittelbar, dass der Satz auch dann noch richtig bleibt, wenn man die geschlossene Begrenzung von einem oder mehreren Eckpunkten aus um eine oder mehrere nach innen gehende gerade oder gebrochene Linien erweitert, sofern man nur jede neue Strecke doppelt als Seite zählt und demgemäss die Zahl der Eckpunkte vergrössert.

Wird in dem Sechsecke $ABCDEF$ die Begrenzung um die Linien AMN und CP erweitert, so verhält es sich wie das beistehende Zwölfeck und lässt sich durch 9 Diagonalen in 10 Dreiecke zerlegen.

Lehrsatz 2. Ist die Oberfläche eines Polyeders mit e-Ecken einfach zusammenhangend, so besteht sie entweder aus $2e-4$ Dreiecken oder lässt sich durch Diagonalen in so viele Dreiecke zerlegen.

Beweis. Zieht man auf der Polyederoberfläche eine beliebige aus Kanten und Diagonalen zusammengesetzte, sich selbst nicht schneidende geschlossene Linie, so zerfällt sie dadurch in zwei getrennte Theile. Die Zahl der Eckpunkte dieser Trennungslinie sei e_1, die der inneren Eckpunkte auf dem einen Theile i_1, auf dem andern i_2. Verbindet man nun die inneren Eckpunkte eines jeden dieser Theile durch eine oder mehrere sich selbst und einander weder schneidende noch berührende gerade oder gebrochene Linien und jede derselben wieder mit einem Eckpunkte der Theilungslinie durch Gerade, die ebenfalls weder einander noch die bereits gezogenen Verbindungslinien schneiden, so verhalten sich beide Theile wie einfache Polygone, und zwar der eine wie ein solches mit e_1+2i_1, der andere wie ein solches mit e_1+2i_2 Ecken. Der erstere zerfällt mithin durch die auf ihm befindlichen Kanten und ausserdem noch nöthigen Dia-

gonalen in $e_1 + 2i_1 - 2$ Dreiecke und der andere ebenso in $e_1 + 2i_2 - 2$, die ganze Oberfläche mithin in

$$e_1 + 2i_1 - 2 + e_1 + 2i_2 - 2 = 2e - 4$$

Dreiecke, q. e. d.

Es ist klar, dass die Giltigkeit dieses Satzes ganz unabhängig ist von der Beschaffenheit der einzelnen Flächen, und nicht alterirt wird, wenn einzelne derselben mehrfach begrenzt sind.

Lehrsatz 3. Eine durch m geschlossene, sich selbst und einander nicht schneidende gebrochene Linien begrenzte Fläche, welche zusammengesetzt ist aus beliebig von geraden Linien begrenzten ebenen Flächenstücken und von dem Zusammenhange, dass auf ihr sich keine geschlossene Linie ziehen lässt, ohne sie zu zerstücken, besteht entweder aus $a+2i+2m-4$ Dreiecken, oder lässt sich durch Diagonalen in so viele Dreiecke zerlegen, wenn a die Zahl der Eckpunkte auf den Begrenzungslinien, i die der inneren Eckpunkte bezeichnet.

Beweis. Offenbar entsteht aus einer solchen Fläche eine einfach zusammenhangende Polyederoberfläche, wenn auch die m Begrenzungslinien noch, je nach ihrer Beschaffenheit, durch ebene oder gebrochene Flächenstücke verbunden werden. Die so entstehende Fläche zerfällt mithin in $2a+2i-4$ Dreiecke, und wenn die m Begrenzungslinien beziehungsweise $a_1, a_2 \ldots a_m$ Eckpunkte haben, so kommen davon auf die Verbindungsflächen

$$a_1 - 2 + a_2 - 2 + \ldots + a_m - 2 = a - 2m,$$

und bleiben also für die anfänglich vorgelegte Fläche

$$2a + 2i - 4 - a + 2m = a + 2i + 2m - 4$$

Dreiecke, wie zu beweisen war.

Lehrsatz 4. Lassen sich auf der Oberfläche eines Polyeders von e Ecken n geschlossene, sich selbst nicht schneidende Linien ziehen, ohne dass sie dadurch in getrennte Theile zerfällt (ist sie also $2n+1$-fach zusammenhangend), so besteht sie entweder aus $2e + 4(n-1)$ Dreiecken, oder lässt sich durch Diagonalen in so viele Dreiecke zerlegen.

Beweis. Es ist offenbar immer möglich, die n geschlossenen Linien um die Durchbrechungen so zu wählen, dass sie lediglich aus Kanten und Diagonalen zusammengesetzt sind. Ferner kann eine $(n+1)^{te}$ geschlossene, sich selbst nicht schneidende, aus Kanten und Diagonalen zusammengesetzte Linie von der Art gezogen werden, dass dadurch die ganze Polyederoberfläche in zwei Theile zerfällt, die alle $n+1$ Linien zu gemeinschaftlichen Grenzen haben, wozu nur nöthig, dass die Projection der letzten Linie auf irgend eine Ebene die Projectionen der übrigen einschliesst.

Ist nun a die Anzahl der Eckpunkte auf den Begrenzungslinien, i_1 die der inneren Eckpunkte auf dem einen Theile der Fläche, i_2 die der inneren Eckpunkte auf dem anderen Theile, so zerfällt die ganze Polyederoberfläche nach dem vorigen Lehrsatze in

$$[a + 2i_1 + 2(n+1) - 4] + [a + 2i_2 + 2(n+1) - 4] = 2e + 4(n-1)$$

Dreiecke, wie zu beweisen war.

Hieraus ergiebt sich durch dieselbe Schlussweise, welche angewandt wurde, um den dritten Lehrsatz aus dem zweiten abzuleiten, der folgende, welcher alle vorhergehenden in sich enthält:

Lehrsatz 5. Eine durch m geschlossene, sich selbst und einander nicht schneidende gebrochene Linien begrenzte Fläche, welche zusammengesetzt ist aus beliebig durch gerade Linien begrenzten ebenen Flächenstücken und von dem Zusammenhange, dass sich n geschlossene, sich selbst nicht schneidende Linien auf ihr ziehen lassen, ohne sie zu zerstücken, also eine Fläche von der Klasse (m, n), besteht entweder aus

$$a + 2i + 2(2n + m - 2)$$

Dreiecken, oder lässt sich durch Diagonalen in so viele Dreiecke zerlegen, wenn a und i die im dritten Lehrsatze angegebene Bedeutung haben.

Lehrsatz 6. Bezeichnen e, f und k beziehungsweise die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten einer Polyederfläche von der Klasse (m, n), q die Anzahl der Querschnitte, welche erforderlich sind, um alle ebenen Flächenstücke, aus denen sie zusammengesetzt ist, einfach zusammenhangend zu machen, so ist

$$e + f = k + q - 2n - m + 2.$$

Beweis. Sei D die Zahl der Dreiecke, in welche sich die vorliegende Fläche zerlegen lässt, $d + q$ die Anzahl der dazu erforderlichen Diagonalen, und wählt man zur Herstellung des einfachen Zusammenhangs der einzelnen Flächen Diagonalen als Querschnitte, so ist

$$1) \qquad D = a + 2i + 2(2n + m - 2)$$

und

$$2) \qquad 3D = a + 2(k_1 + d + q),$$

wenn a und i die frühere Bedeutung haben und k_1 die Anzahl der inneren Kanten bezeichnet.

Aus der Verbindung dieser Gleichungen folgt weiter:

$$3D = 2D + D = 2D + a + 2i + 2(2n + m - 2) = a + 2(k_1 + d + q);$$

oder

$$2D + 2a + 2i + 2(2n + m - 2) = 2a + 2(k_1 + d + q),$$

woraus durch Division mit 2:

$$D + a + i + 2n + m - 2 = a + k_1 + d + q.$$

Beachtet man nun einerseits, dass $a+i=e$, und $a+k_1=k$, andererseits, dass die Flächenzahl, wenn alle Flächen in Dreiecke zerlegt werden, eben so oft um 1 vermehrt wird, als in einer einfach begrenzten Fläche eine Diagonale gezogen wird, während die Querschnitte die Flächenzahl nicht vermehren, d. h. dass $D=f+d$, so folgt hieraus sofort:

$$f+e+2n+m-2=k+q,$$

wie zu beweisen war.

Die Beweise der vorstehenden Sätze behalten auch dann ihre Giltigkeit, wenn die betrachteten Oberflächen aus krummen Flächenstücken zusammengesetzt sind, Kanten und Diagonalen also krumme Linien sind. In dem Falle, dass mehrere Kanten zusammen eine einzige geschlossene Linie bilden, muss dieselbe jedoch als aus wenigstens drei Kanten bestehend angesehen werden, die durch 3 Eckpunkte getrennt sind. Für den 6. Lehrsatz kann jedoch auch diese Beschränkung fallen gelassen werden, wenn nur jede solche geschlossene Linie, die als Kante gezählt wird, als in einem Punkte begrenzt aufgefasst wird, der dann als Eckpunkt zählt. Denn mit jeder Vereinigung zweier Kanten zu einer fällt auch ein Eckpunkt weg, und es bleibt nur der letzte, der nicht weggelassen werden kann, ohne die Richtigkeit der Gleichung

$$f+e+2n+m-2=k+q$$

aufzuheben. In der That, betrachten wir z. B. eine von einem Kreise begrenzte Kugelhaube und nehmen auf dem Kreise einen Punkt als Eckpunkt an, so ist

$$e=k=f=m=1, \quad q=n=0;$$

also

$$e+f+2n+m-2=k+q=1.$$

Wir können also den 6. Lehrsatz in dieser Erweiterung so aussprechen:

Ist eine aus f vollkommen begrenzten Flächenstücken zusammengesetzte Fläche von der Klasse (m, n), k die Zahl der Kanten, welche sämmtlich begrenzt, e die Zahl der sämmtlichen Begrenzungspunkte, endlich q die Zahl der Querschnitte, durch welche für alle Flächenstücke der einfache Zusammenhang hergestellt wird, so ist

$$e+f+2n+m-2=k+q.$$

In dieser Form ist er selbst giltig für den Fall einer einzigen geschlossenen oder unendlichen, nur in einem einzigen Punkte begrenzten $2n+1$-fach zusammenhangenden Fläche, z. B. für eine Riemann'sche Fläche T. Denn für diese hat man

$$e=f=1, \quad m=k=0, \quad q=2n,$$

also

$$e+f+2n+m-2=k+q=2n.$$

Eine noch weiter gehende Verallgemeinerung dieses Satzes ist der oben erwähnte „Census räumlicher Complexe“ von J. B. Listing.

XIII. Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Strome. Von J. Loschmidt.

Da sich die Auffassung der galvanischen Bewegung als eines Doppelstromes zweier Flüssigkeiten fast durchgehends so überaus brauchbar erweist, so schien es mir wahrscheinlich, dass auch dem Ohm'schen Gesetze ein Satz der Hydrodynamik entsprechen werde.

Dies ist nun in der That der Fall, und zwar ist derselbe längst bekannt: in einer speciellen Form trägt er den Namen des Poiseuille'schen Gesetzes.

Bekanntlich bezieht sich dasselbe auf das Durchströmen von Flüssigkeiten durch längere Röhren unter constantem Drucke, und bestimmt das Volumen der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Röhre gehenden Flüssigkeit oder die Ausflussmenge.

Eine theoretische Begründung dieses Gesetzes verdanken wir F. Neumann*).

Er geht dabei von der Newton'schen Annahme aus, dass die Reibung, welche zwischen zwei benachbarten Flüssigkeitsschichten oder zwischen einer Flüssigkeitsschicht und der sie berührenden Gefässwand stattfindet, proportional sei der Differenz ihrer Geschwindigkeiten.

Stefan, welcher auf Grundlage dieser Hypothese die Reibung in die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen einführte und dieselben dann auf mehrere specielle Fälle anwandte, hat dasselbe Problem behandelt und ist zu ganz gleichen Ergebnissen gekommen**).

Wenn man mit R den Radius der Röhre, mit P_1 und P_2 den Druck innerhalb derselben in den Abständen S_1 und S_2 bezeichnet, und unter M und μ die Constanten der Reibung zwischen Flüssigkeit und Röhrenwand und zwischen zwei benachbarten Flüssigkeitsschichten, endlich unter ϱ die Dichte der Flüssigkeit versteht, so ergiebt sich für das durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit strömende Flüssigkeitsquantum q der Ausdruck

$$q = -\left(\frac{P_1 - P_2}{S_1 - S_2}\right)\frac{\pi\varrho}{2}\left(\frac{R^3}{M} + \frac{R^4}{4\mu}\right).$$

Nehmen wir nun statt einer einzigen eine grosse Anzahl gleicher Röhren, vereinigen selbe in einem cylindrischen Bündel und bestimmen sodann die Flüssigkeitsmenge Q, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt w dieses Bündels strömt. Wenn wir mit n die Anzahl von Röhren bezeichnen, welche auf die Flächeneinheit im Querschnitte des Bündels entfallen, so erhalten wir, wenn zur Abkürzung

---

*) Aus dessen Vorlesungen, mitgetheilt von Jacobson in: Reichert's und Du Bois' Archiv für Anat. u. Phys. 1860, p. 80.

**) J. Stefan: „Ueber die Bewegung flüssiger Körper". Zwei Abhandlungen. Wiener Ak. Sitz. Bd. 46. 1862.

$$\frac{n\pi\varrho}{2}\left(\frac{R^3}{M}+\frac{R^4}{4\mu}\right)=k$$

gesetzt wird:

$$Q=-kw\left(\frac{P_1-P_2}{S_1-S_2}\right),$$

einen Ausdruck, welcher nach Form und Inhalt ganz mit dem Ohm'schen Gesetze übereinstimmt.

Die unserer Deduction zu Grunde liegende physikalische Ansicht läuft offenbar darauf hinaus, dass der galvanische Leitungsdraht als eine Röhre betrachtet wird, angefüllt mit porösem Materiale, durch welche das elektrische Fluidum hindurchgetrieben wird. Die Grösse der Poren, die Dichte der elektrischen Flüssigkeit, sowie die Stärke der Adhäsion derselben zur Materie des Leiters bestimmen die specifische Leitungsfähigkeit des letzteren.

Kirchhoff hat den Grund zu einer Theorie des (nicht constanten) galvanischen Stromes gelegt in zwei Abhandlungen: „Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten." Pogg. Ann. 100; 1857, und: „Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern." Pogg. Ann. 102; 1857.

Da derselbe dabei das Ohm'sche Gesetz zum Ausgangspunkt genommen, und dieses, wie wir oben nachgewiesen, als ein hydrodynamisches aufgefasst werden kann, so wird sich auch zwischen seinen Endgleichungen für die Elektricitätsbewegung und denjenigen hydrodynamischen Gleichungen, welche für das Strömen einer Flüssigkeit durch ein System von Röhren bei nicht stationärer Strömung gelten, eine gewisse Uebereinstimmung nachweisen lassen. Wir wollen diesen Nachweis hier nur für den speciellen und wichtigsten Fall der Elektricitätsbewegung in Drähten durchführen.

Wir nehmen die gerade Axe der Elementarröhre zur Axe der x und bezeichnen die Geschwindigkeit längs derselben mit u, mit p und ϱ aber Druck und Dichte der durchströmenden Flüssigkeit; endlich mit λ den Coefficienten der Reibung zwischen Wand und Flüssigkeit, und beschränken unsere Betrachtung auf das Verhalten der unmittelbar an die Röhrenwand anstossenden in Bewegung befindlichen zonenförmigen Flüssigkeitsschichten vom Radius R. Es geht dann die allgemeine Gleichung:

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{\mu}{r}\frac{du}{dr}=\varrho\frac{du}{dt}+\varrho u\frac{du}{dx}$$

über in

$$A)\qquad \frac{dp}{dx}+Mu+\varrho\frac{du}{dt}+\varrho u\frac{du}{dx}=o,$$

da nämlich in unserem Fall

$$\frac{du}{dr}=\frac{o-u}{\delta}$$

und

$$\frac{d^2 u}{d r^2} = o$$

ist, und

$$\frac{\lambda}{R \delta} = M$$

gesetzt ward.

Hierzu kommt noch die sogenannte Continuitätsgleichung, welche in unserem Falle folgende Gestalt annimmt:

$$B) \qquad \frac{d(\varrho u)}{dx} + \frac{d\varrho}{dt} = o.$$

Die den Gleichungen A) und B) entsprechenden Gleichungen Kirchhoff's sind nun:

$$\text{I.} \qquad i + \frac{16 \pi k}{c^2} \cdot \alpha^2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{di}{dt} + 4 \pi k \alpha^2 \log \frac{l}{\alpha} \cdot \frac{de}{dx} = o$$

und

$$\text{II.} \qquad \frac{di}{dx} + \frac{1}{2} \frac{de}{dt} = o.$$

Es beziehen sich diese beiden Gleichungen auf ein geradliniges Stück eines Drahtes von der Länge l, der von solcher Feinheit zu nehmen ist, dass dessen Radius α gegen die Länge l als verschwindend angesehen werden darf.

In denselben bedeutet i die Intensität des Stromes in mechanischem Mass ausgedrückt, $e dx$ die Menge der freien Elektricität, die in dem dem Elemente dx entsprechenden Theile des Drahtes enthalten ist, ferner k die specifische Leitungsfähigkeit des Drahtes, und c die bekannte Weber'sche Constante.

Die Uebereinstimmung zwischen den Gleichungen B) und II. ist von vornhinein gesichert, da beide aus demselben Principe abgeleitet sind. Bezeichnen wir die Dichte im natürlichen Zustande der Flüssigkeit mit ϱ_0 und setzen $\varrho = \varrho_0 + \Delta \varrho$, so führt die Betrachtung jener beiden Gleichungen zu der Annahme, dass die Dichtigkeitsänderungen, welche die Flüssigkeit erfährt, immer so klein bleiben müssen, dass $\Delta \varrho$ neben ϱ_0 als verschwindend klein angesehen werden darf.

Dadurch geht B) über in:

$$B') \qquad \varrho_0 \frac{du}{dx} + \frac{d\varrho}{dt} = o,$$

und wir erhalten als Bedingung der geforderten Uebereinstimmung die Gleichungen:

$$\varrho_0 \frac{du}{dx} = \frac{di}{dx}$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{1}{2} \frac{de}{dt}.$$

Diese integrirt, geben schliesslich:

$$i = \varrho_0 u$$
$$e = 2 \varDelta \varrho.$$

Der Sinn dieser Gleichungen, sowie deren Verträglichkeit mit der zu Grunde gelegten Anschauungsweise über das Wesen des elektrischen Stromes, liegt klar zu Tage. Der Factor 2 in der letzten Gleichung rührt daher, dass man den galvanischen Strom als Doppelstrom aufzufassen gewohnt ist.

Um nun die so erhaltenen Werthe in die Gleichung A) einzuführen, haben wir in dieser vorerst den Druck durch die Dichte auszudrücken. Wenn wir mit p_0 den Werth von p für $\varDelta \varrho = o$ bezeichnen, so können wir setzen:

$$p = p_0 + \beta \frac{\varDelta \varrho}{\varrho_0},$$

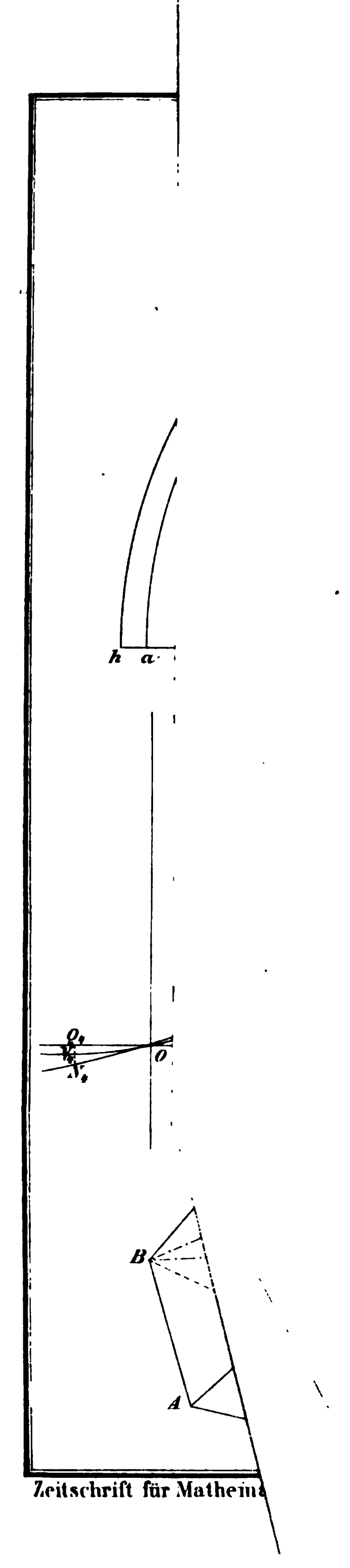
wo β einen constanten Factor bedeutet.

Damit erhalten wir schliesslich für A) die Form

$$A') \qquad \frac{de}{dx} + \frac{2M}{\beta} i + \frac{2\varrho_0}{\beta} \frac{di}{dt} + \frac{2}{\beta} \cdot \frac{i\,di}{dx} = o.$$

Um die Gleichung A') mit der Gleichung I. von Kirchhoff in Einklang bringen zu können, muss das Glied $\frac{\beta}{2} \frac{i\,di}{d\,x}$ fortwährend so klein bleiben, dass es neben den anderen Gliedern der Gleichung vernachlässigt werden darf.

Es ist dieses dieselbe Voraussetzung, welche man sich bei der Behandlung der Schallwellen in der Luft erlaubt, und die darin besteht, dass die Geschwindigkeiten und Dichtigkeitsänderungen überall sehr klein bleiben und sich von einem Punkte zum anderen nur langsam ändern.


h
a
O
B
A

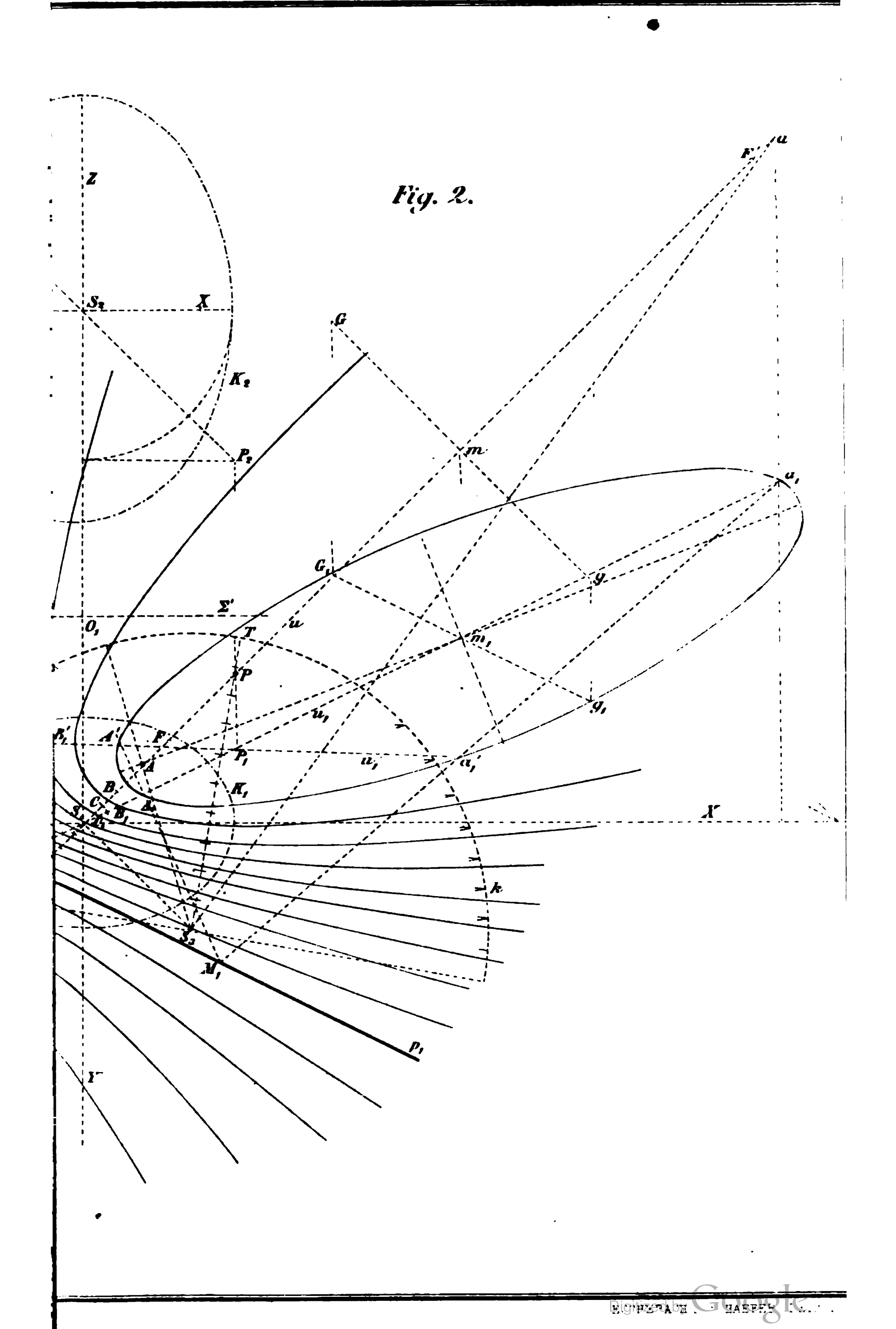
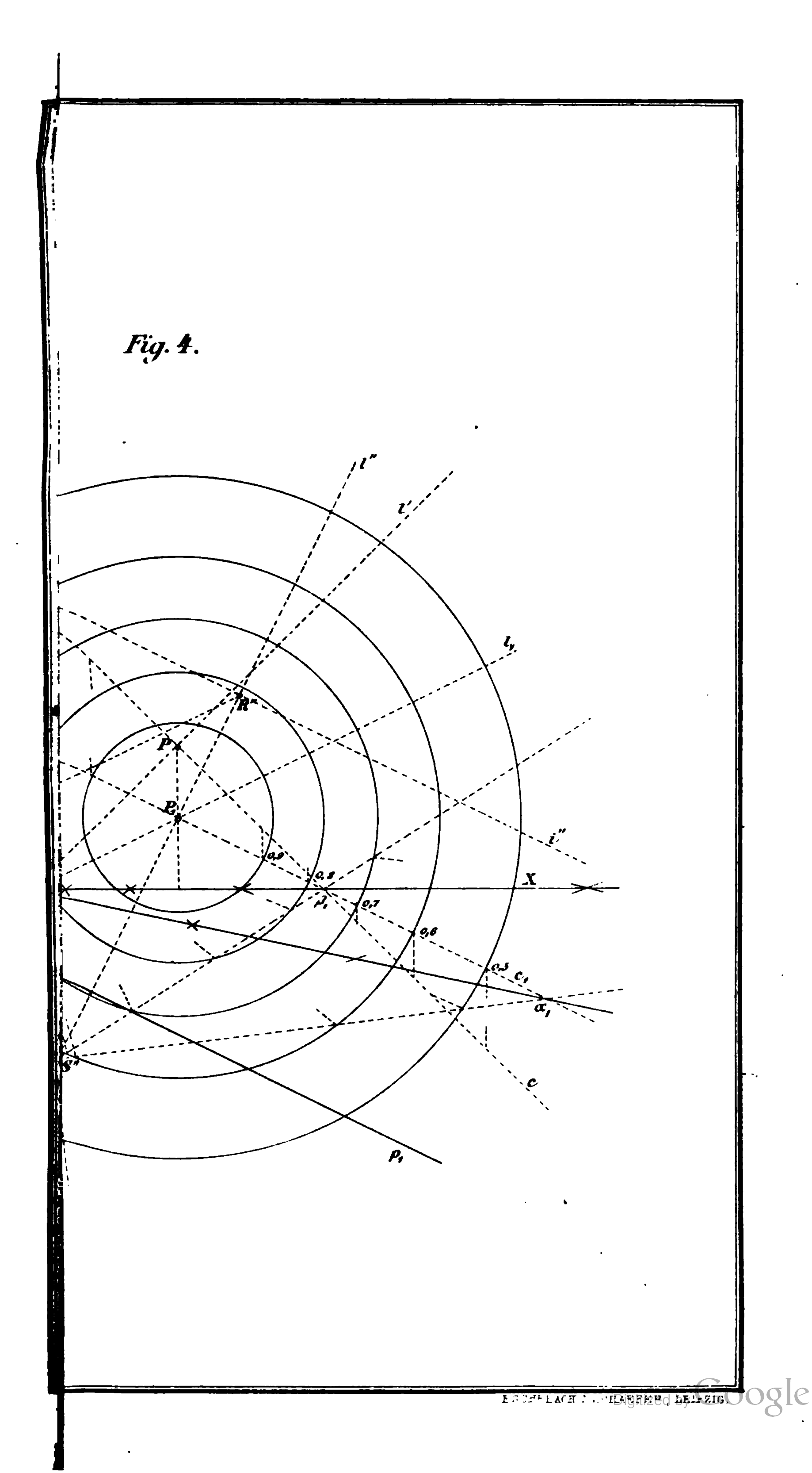


Fig. 2.


Fig. 4.
l''
l'
l₁
R''
P
P₁
l''
X
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
c₁
α₁
c
S''
p₁

XIV.

Die Recursionsformel

$$(B + An)\,\varphi(n) + (B' - A'n)\,\varphi(n+1) + (B'' + A''n)\,\varphi(n+2) = 0.$$

Von

Dr. J. THOMAE,

Docent an der Universität in Halle.

Es ist bekannt, dass man mittelst bestimmter Integrale Lösungen einer linearen Differenzengleichung mit ganzen linearen Coefficienten finden kann. Es erscheint aber wünschenswerth, dass wenigstens für den Fall einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung die Integration einmal völlig durchgeführt werde, einmal, weil hierbei die bestimmten Integrale bis jetzt in zu beschränkter Weise aufgefasst wurden und so die vollständigen Lösungen in vielen Fällen nicht lieferten, sodann weil sich das interessante, vielleicht noch unbekannte Resultat ergiebt, dass die vollständigen Lösungen durch hypergeometrische Reihen erhalten werden als Functionen der in ihnen enthaltenen Constanten.

Wir stellen hier die allgemeine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit ganzen linearen Coefficienten unter der Form einer Recursionsformel auf, weil sie als solche in der Analysis am meisten vorkommt. Diese bringen wir (§ 1) auf eine einfachere Form und leiten für diese die bestimmten Integrale her, welche (wie im § 2 bewiesen wird) die allgemeinen Lösungen derselben bilden. Im § 2 drücken wir dieselben Lösungen durch hypergeometrische Reihen aus, wobei jedoch constante oder periodische Factoren vernachlässigt sind. Sodann werden (§ 3) einige Grenzfälle erledigt, zu denen auch der Fall gerechnet werden kann, in welchem (§ 4) das bestimmte Integral sich in einen Differentialquotienten mit ganzer Ordnungszahl verwandelt und so auf eine viel einfachere Operation zurückgeführt wird. Ein besonderer Fall, der in der bequemeren Formel 2) des § 1 nicht enthalten ist, wird im § 5 hergeleitet. Es kann aber (§ 6) immer eine Function angegeben werden, deren Differentialquotienten, für einen be-

stimmten Werth der Differentiationsvariabeln genommen, der Recursionsformel Genüge leisten, wenn man die Variabilität der Variabeln der Formel auf eine arithmetische Reihe mit der Differenz Eins beschränkt.

Der Buchstabe n, der in der Recursionsformel überall festgehalten wird, bedeutet hier eine complexe Variable, wo nicht specielle Bestimmungen über denselben getroffen werden.

§ 1.

Bei Behandlung der Recursionsformel

$$1)\quad (B+An)\,\varphi(n)+(B'-A'n)\,\varphi(n+1)+(B''+A''n)\,\varphi(n+2)=0$$

setzen wir zunächst voraus, dass A'' von Null verschieden sei, dass aber sonst die Constanten A, A', A'', B, B', B'' jedwede Werthe annehmen können. Dann kann man durch die Gleichung

$$n_1=n+\frac{B''}{A''}$$

eine neue Variable statt n einführen, so dass die Recursionsformel durch A'' dividirt,

$$\frac{B'}{A''}+\frac{A'B''}{A''A''}=B'_1,\quad \frac{B}{A''}-\frac{AB''}{A''A''}=B_1,\quad \frac{A'}{A''}=A'_1,\quad \frac{A}{A''}=A_1$$

gesetzt, die Gestalt annimmt

$$n_1\,\varphi\left(n_1+2-\frac{B''}{A''}\right)+(B'_1-A'_1n_1)\,\varphi\left(n_1+1-\frac{B''}{A''}\right)$$
$$+(B_1+A_1n_1)\,\varphi\left(n_1-\frac{B''}{A''}\right)=0.$$

Diese Form kann noch weiter vereinfacht werden, wenn man

$$\varphi\left(n_1-\frac{B''}{A''}\right)=h^{-n_1}\,.\,y(n_1),\quad hA'_1=1+a,\quad h^2A_1=a$$

setzt, so dass also

$$h=\frac{A_1\pm\sqrt{A_1'^2-4A_1}}{2A_1},\qquad a=\frac{(A_1'\pm\sqrt{A_1'^2-4A_1})^2}{4A_1}$$

genommen werden muss. Ersetzen wir dann n_1 wieder durch n, hB'_1 durch b', h^2B_1 durch b, so erhalten wir die Form

$$2)\qquad ny(n+2)+(b'-[1+a]\,n)\,y(n+1)+(b+an)\,y(n)=0.$$

Aus den Lösungen der Formel 2) wird man leicht die der Formel 1) ableiten, wenn eben $A''\gtrless 0$ ist.

Um Lösungen dieser Recursionsformel zu finden, setzen wir nach den Regeln der Differenzenrechnung (Laplace) $y(n)$ unter der Form voraus

$$y(n)=\int s^{-n+1}\,.\,V\,.\,ds,$$

worin wir die Grenzen der Integration und die Function V als unbekannt ansehen. Setzen wir diesen Ausdruck in die Recursionsformel 2) ein, so nimmt diese die Gestalt an

$$\int s^{-n-1} \cdot V\,[n + (b' - \overline{1+a}\,.\,n)\,s + (b + an)\,s^2]\,ds = 0,$$

und wenn man auf den mit dem Factor n behafteten Theil die partielle Integration anwendet

$$\int s^{-n} \cdot \left\{ V\,(b' + bs) + \frac{d\,V\,(1-s)\,(1-as)}{ds} \right\} ds$$
$$- [s^{-n} \cdot (1-s)\,(1-as)\,.\,V] = 0.$$

Damit nun hierin zuerst der mit dem Integralzeichen behaftete Theil verschwinde, hat man V aus der linearen Differentialgleichung zu bestimmen

$$\frac{d\,(1-s)\,(1-as)\,V}{ds} + (1-s)\,(1-as)\,V \cdot \frac{b' + bs}{(1-s)\,.\,(1-as)} = 0,$$

aus welcher

$$V = Const.\,(1-s)^{\frac{b+b'}{1-a} - 1} \cdot (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)} - 1}$$

sich ergiebt. Damit dann noch der Theil, welcher durch die partielle Integration vom Integralzeichen befreit wurde,

$$[s^{-n} \cdot (1-s)\,(1-as)\,V] = \left[s^{-n} \cdot (1-s)^{\frac{b+b}{1-a}} \cdot (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a\,.\,1-a}}\right]$$

verschwinde, muss man die Integrationsgrenzen auf irgend ein Paar der vier Grössen

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{a}, \quad \infty$$

fallen lassen, woraus sechs Integrale entspringen, in denen noch die Integrationswege willkürlich sind. Damit aber die sechs Integrale

$$3) \qquad Const. \int s^{-n+1} \cdot (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a} - 1} \cdot (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)} - 1} \cdot ds$$

genommen zwischen den Grenzen

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{a}, \quad \infty$$

auch in den Fällen einen Sinn haben, in welchen die Integration nicht bis an die angegebenen Grenzen zulässig ist, muss man diejenige Modification des Weges eintreten lassen, welche ich in dieser Zeitschrift in diesem Band pag. 51 u 52 in einer Abhandlung über die Riemann'schen P-Functionen für solche Fälle angegeben habe. Diese Modification bewirkt auch, dass der Theil

$$\left[s^{-n} \cdot (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}} \cdot (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}}\right]$$

verschwindet, selbst dann, wenn er bei der gemeinen Annahme des Weges unendlich wird, nur darf nicht eine der Zahlen

$$-n, \quad \frac{b+b'}{1-a}, \quad -\frac{b+ab'}{a\,(1-a)}, \quad n + \frac{b}{a} - 1$$

eine ganze negative Zahl sein, in welchem Falle einige der Integrale unendlich werden, welcher Fall als Grenzfall besonders behandelt wird.

Setzen wir nun in 3) die (von n unabhängige) Constante in die Form

$$a^{\alpha} \,.\, (1-a)^{\gamma} \,.\, K,$$

worin nun K auch von a unabhängig sein mag, so stellt das Integral, genommen zwischen je einem Paare der angegebenen Grenzen, je einen Zweig der Riemann'schen Function

$$P\begin{pmatrix} \alpha, & \dfrac{b+ab'}{a(1-a)}+1-\alpha-\gamma, & \gamma, & \\ n+\alpha-\dfrac{b+b'}{1-a}-1, & 2-n-\alpha-\gamma, & \gamma-\dfrac{b}{a}-1, & a \end{pmatrix}$$

dar. Und umgekehrt können (nach Riemann's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe pag. 22) zur Darstellung eines Werthes dieser Function 48 verschiedene Integrale dienen. Beachtet man, dass die Constanten einer P-Function nicht Constante in Bezug auf n sind, so wird man diese der Recursionsformel gemäss bestimmen müssen, und erhält dann für dieselben Grenzen

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{a}, \quad \infty$$

die acht verschiedenen Formen

$$3)\quad \int s^{-n+1} \,.\, (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \,.\, (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \,.\, ds,$$

$$4)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} \,.\, \int s^{\frac{b+ab'}{a(1-a)}} \,.\, (1-s)^{-n-\frac{b}{a}} \,.\, (1-as)^{n-2} \,.\, ds,$$

$$5)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} \,.\, \int s^{-n-\frac{b}{a}} \,.\, (1-s)^{\frac{b+ab'}{a(1-a)}} \,.\, (1-as)^{-\frac{b+b'}{1-a}} \,.\, ds,$$

$$6)\quad \int s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \,.\, (1-s)^{-n+1} \,.\, (1-as)^{n+\frac{b}{a}-1} \,.\, ds,$$

$$7)\quad a^n \int s^{n+\frac{b}{a}-1} \,.\, (1-s)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \,.\, (1-as)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \,.\, ds,$$

$$8)\quad a^n \,.\, \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} \,.\, \int s^{-\frac{b+b'}{1-a}} \,.\, (1-s)^{n-2} \,.\, (1-as)^{-n-\frac{b}{a}} \,.\, ds,$$

$$9)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)}\, a^n \,.\, \int s^{n-2} \,.\, (1-s)^{-\frac{b+b'}{1-a}} \,.\, (1-as)^{\frac{b+ab'}{a(1-a)}} \,.\, ds,$$

$$10)\quad a^n \int s^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \cdot (1-s)^{n+\frac{b}{a}-1} \cdot (1-as)^{-n+1} \cdot ds.$$

Die Integrale 3), 4), 5), 6) gehen durch die Substitution $\frac{1}{as}$ für s bez. in die 7), 8), 9), 10) über. Lässt man den Factor a^n in den damit behafteten Integralen fort, so bilden sie Lösungen der Recursionsformel

$$n y_1(n+2) + \left(\frac{b'}{a} - \left[1+\frac{1}{a}\right] n\right) y_1(n+1) + \left(\frac{b}{a^2} + \frac{1}{a} n\right) y_1(n) = 0.$$

Lässt man in den mit dem Factor

$$\frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} a^n$$

behafteten Integralen diesen Factor fort, so bilden sie Lösungen der Recursionsformel

$$(a+b+na)\, y_2(n+2) + (b' - \overline{1+a} \cdot n)\, y_2(n+1) + (n-1)\, y_2(n) = 0.$$

Alle 48 Integrale erhält man nun, wenn man in den angeführten 8 Integralen für s eine der fünf Grössen einführt

$$\frac{s}{a}, \quad 1-s, \quad 1-\left(1-\frac{1}{a}\right)s, \quad \frac{1}{1-s}, \quad \frac{1}{1-(1-a)s};$$

dadurch entspringen aus 3) die Formen

$$11)\quad a^n \int s^{-n+1} \cdot (1-s)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \cdot \left(1-\frac{1}{a}s\right)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \cdot ds,$$

$$12)\quad \int s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \cdot (1-s)^{-n+1} \left(1-\frac{a}{a-1}s\right)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \cdot ds,$$

$$13)\quad \int s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \cdot (1-s)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \left(1-\frac{a-1}{a}s\right)^{-n+1} \cdot ds,$$

$$14)\quad \int s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \cdot (1-s)^{n+\frac{b}{a}-1} \cdot \left(1-\frac{s}{1-a}\right)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \cdot ds,$$

$$15)\quad \int s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} \cdot (1-s)^{-\frac{b+ab'}{a(1-a)}-1} \cdot (1-[1-a]s)^{n+\frac{b}{a}-1} \cdot ds,$$

in denen die Grenzen zwischen je einem Paare von Verzweigungspunkten der zu integrirenden Function zu nehmen sind.

§ 2.

Die P-Functionen lassen sich aber auch durch hypergeometrische Reihen darstellen, und zwar dienen dazu 24 verschiedene Reihen, von denen für jeden Werth des letzten Elementes mindestens acht gleichzeitig brauchbar sind. Wir lassen die Lösungen der Recursionsformel 2) durch hypergeometrische Reihen hier sämmtlich folgen, und zwar stehen immer

die zwei Reihen, welche dieselben Zweige einer P-Function darstellen und dasselbe letzte Element haben, neben einander.

$$16)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n+\frac{b+b'}{1-a}+1\right)}\cdot F\left(2-n,\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+1,\ \frac{b+b'}{1-a}-n+2,\ a\right),$$

$$17)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n+\frac{b+b'}{1-a}+1\right)}.F\left(1-\frac{b}{a}-n,\ \frac{b+b'}{1-a},\ \frac{b+b'}{1-a}-n+2,\ a\right),$$

$$18)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n-\frac{b+b'}{1-a}-1\right)}a^n.F\left(n+\frac{b}{a},\ 1-\frac{b+b'}{1-a},\ n-\frac{b+b'}{1-a},\ a\right),$$

$$19)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n-\frac{b+b'}{1-a}-1\right)}a^n.F\left(n-1,\ -\frac{b+ab'}{a.1-a},\ n-\frac{b+b'}{1-a},\ a\right),$$

$$20)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n+\frac{b+ab'}{a.1-a}-1\right)}.F\left(n+\frac{b}{a},\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+1,\ n+\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{a}\right),$$

$$21)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n+\frac{b+ab'}{a.1-a}-1\right)}.F\left(n-1,\ \frac{b+b'}{1-a},\ n+\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{a}\right),$$

$$22)\quad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(1-n-\frac{b+ab'}{a.1-a}\right)}.a^n.F\left(2-n,\ 1-\frac{b+b'}{1-a},\ 2-n-\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{a}\right),$$

$$23)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(1-n-\frac{b+ab'}{a.1-a}\right)}.a^n\times \\ F\left(1-n-\frac{b}{a},\ -\frac{b+ab'}{a.1-a},\ 2-n-\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{a}\right),\end{array}\right.$$

$$24)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi(n-2)}.F\left(2-n,\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+1,\ 2+\frac{b}{a},\ 1-a\right),$$

$$25)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi(n-2)}a^n.F\left(n+\frac{b}{a},\ 1-\frac{b+b'}{1-a},\ \frac{b}{a}+2,\ 1-a\right),$$

26) $$F\left(1-n-\frac{b}{a},\ \frac{b+b'}{1-a},\ -\frac{b}{a},\ 1-a\right),$$

27) $$a^n F\left(n-1,\ -\frac{b+ab'}{a.1-a},\ -\frac{b}{a},\ 1-a\right),$$

28) $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n+\frac{b+ab'}{a.1-a}-1\right)}\cdot\left(\frac{a}{a-1}\right)^n\times\\ F\left(n-1,\ n+\frac{b}{a},\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+n,\ \frac{1}{1-a}\right),\end{array}\right.$$

29) $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n+\frac{b+ab'}{a.1-a}-1\right)}\times\\ F\left(\frac{b+b'}{1-a},\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+1,\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+n,\ \frac{1}{1-a}\right),\end{array}\right.$$

30) $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(1-n-\frac{b+ab'}{a.1-a}\right)}\cdot(a-1)^n\times\\ F\left(2-n,\ 1-\frac{b}{a}-n,\ 2-n-\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{1-a}\right),\end{array}\right.$$

31) $$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(1-n-\frac{b+ab'}{a.1-a}\right)}\cdot a^n\times\\ F\left(1-\frac{b+b'}{1-a},\ -\frac{b+ab'}{a.1-a},\ 2-n-\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{1}{1-a}\right),\end{array}\right.$$

32) $$\frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(1+\frac{b+b'}{1-a}-n\right)}\cdot F\left(\frac{b+b'}{1-a},\ 1+\frac{b+ab'}{a.1-a},\ \frac{b+b'}{1-a}-n+2,\ \frac{a}{a-1}\right),$$

33) $$\frac{(1-a)^n\cdot\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n+\frac{b+b'}{1-a}+1\right)}\cdot F\left(2-n,\ 1-n-\frac{b}{a},\ \frac{b+b'}{1-a}-n+2,\ \frac{a}{a-1}\right),$$

34) $$\frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n-\frac{b+b'}{1-a}-1\right)}\cdot\left(\frac{a}{1-a}\right)^n\cdot F\left(n-1,\ n+\frac{b}{a},\ n-\frac{b+b'}{1-a},\ \frac{a}{a-1}\right),$$

35) $$\frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n-\frac{b+b'}{1-a}-1\right)}\,a^n\cdot F\left(-\frac{b+ab'}{a.1-a},\ -\frac{b+b'}{1-a}+1,\ n-\frac{b+b'}{1-a},\ \frac{a}{a-1}\right),$$

$$36)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi(n-2)}\,.\,F\left(n+\frac{b}{a},\ \frac{b+ab'}{a.1-a}+1,\ 2+\frac{b}{a},\ 1-\frac{1}{a}\right),$$

$$37)\quad \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi(n-2)}\,a^n\,.\,F\left(2-n,\ 1-\frac{b+b'}{1-a},\ 2+\frac{b}{a},\ 1-\frac{1}{a}\right),$$

$$38)\quad F\left(n-1,\ \frac{b+b'}{1-a},\ -\frac{b}{a},\ 1-\frac{1}{a}\right),$$

$$39)\quad a^n\,.\,F\left(-n-\frac{b}{a},\ -\frac{b+ab'}{a.1-a},\ -\frac{b}{a},\ 1-\frac{1}{a}\right).$$

Dass zwischen je drei der hypergeometrischen Reihen 16), 17) . . . 39) eine lineare homogene Gleichung bestehe, ist aus der Theorie der Riemann'schen P-Functionen und auch sonst bekannt, und zwar sind die Coefficienten periodische Functionen in n. Es folgt dies aber auch nothwendig daraus, dass diese Reihen einer und derselben Differenzengleichung zweiter Ordnung, nämlich der Recursionsformel 2) Genüge leisten. Damit jedoch jene Formel vollständig durch diese Reihen integrirt werde, ist nöthig, dass mindestens zwei unter ihnen sind, zwischen denen nicht schon für sich eine lineare homogene Gleichung mit periodischen Coefficienten besteht, durch welche zwei Lösungen sich jedwede dritte irgendwie gefundene linear und homogen mit periodischen Coefficienten ausdrücken lässt. Solche zwei Lösungen sind z. B. 16) und 18). Besteht nämlich schon zwischen zwei Functionen $\Phi(n)$ und $\Psi(n)$ eine lineare homogene Gleichung mit periodischen Coefficienten, so ist das Verhältniss dieser beiden Functionen selbst eine periodische Function, d. h. es ist

$$\frac{\Phi(n+1)}{\Psi(n+1)}-\frac{\Phi(n)}{\Psi(n)}=0.$$

oder

$$\Phi(n+1)\,.\,\Psi(n)-\Psi(n+1)\,.\,\Phi(n)=0.$$

Dass aber dieser Ausdruck von Null verschieden sei, wenn man für Φ und Ψ die Reihen 16) und 18) einsetzt, folgt unmittelbar aus dem von Riemann in seiner Abhandlung über die Gaussische Reihe pag. 17 für solche Ausdrücke gegebenen Werthe. Also sind die beiden Lösungen von einander unabhängig.

Setzt man irgend eine der angeführten hypergeometrischen Reihen in die Recursionsformel 2) ein, so liefert sie eine Relation zwischen drei nach Gauss' Bezeichnung contiguen Functionen.* Wählen wir hierzu Beispiels halber die Function 25) und setzen einen Augenblick

$$1-n-\frac{b}{a}=\alpha+1,\quad \frac{b+b'}{1-a}=\beta,\quad -\frac{b}{a}=\gamma,\quad 1-a=x,$$

also

$$a=1-x,\quad b=\gamma(x-1),\quad n=\gamma-\alpha,\quad b'=(\beta-\gamma)x+\gamma$$

so geht 2) über in

$$(\gamma - \alpha) . F(\alpha - 1, \beta, \gamma, x) + [(\beta - \alpha) x + 2\alpha - \gamma] F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \alpha (x - 1) . F(\alpha + 1, \beta, \gamma, x) = 0,$$

welches in der That eine der von Gauss aufgestellten Formeln ist. Man könnte auch umgekehrt diese bekannte Formel als Recursionsformel interpretiren in Bezug auf α, und durch Fortsetzung der F-Function zu den allgemeinen Lösungen der Recursionsformel 2) gelangen.

§ 3.

In den speciellen Fällen, in welchen a einen der Werthe 0, 1 oder ∞ annimmt, behalten zwar unsere Lösungen zum Theil immer noch Giltigkeit, da sie aber, weil sie als Grenzfälle zu behandeln sind, ihre Gestalt wesentlich ändern, so erscheint es zweckmässig, die resultirenden Formen besonders aufzustellen.

Für $a = 0$ nimmt die Recursionsformel die Gestalt an

$$40)\qquad n y(n+2) + (b' - n) y(n+1) + b y(n) = 0,$$

oder auch, wenn man

$$y(n) = \frac{x(n)}{\Pi(n-2)}$$

setzt, diese

$$41)\qquad x(n+2) + (b' - n) x(n+1) + b(n-1) x(n) = 0,$$

und bildet daher einen speciellen Fall des noch ausgeschlossenen Falles, dass A'' in der Formel 1) gleich Null sei. Das Integral 3) nimmt dann die Gestalt an

$$42)\qquad \int e^{bs} . s^{-n+1} . (1-s)^{b+b'-1} . ds$$

zwischen den Grenzen 0, 1, ∞, und zwar wird der Integrationsweg nach der letzteren Grenze so zu führen sein, dass bs auf ihm einen immer grösser werdenden negativen reellen Theil erhält. (Für $b' = 0$, $b = 1$ erhält man bei Annahme der Grenzen 0, ∞ die Lösung $\Pi(-n+1)$.) Die hypergeometrische Reihe 16) nimmt für $a = 0$ die Gestalt an

$$43)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Pi(-n+1)}{\Pi(-n+b+b'+1)} \times \\ \displaystyle\sum_0^\infty{}_{(\mu)} \frac{2-n}{2-n+b+b'} . \frac{2-n+1}{2-n+b+b'+1} \cdots \frac{2-n+\mu-1}{2-n+b+b'+\mu-1} . \frac{b^\mu}{\Pi(\mu)}, \end{array}\right.$$

in welcher Summe das Anfangsglied ($\mu = 0$) (wie auch in den folgenden Summen) Eins zu setzen ist. Die Reihe 17) geht über in

$$44)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Pi(-n+1)}{\Pi(-n+b+b'+1)} \times \\ \displaystyle\sum_0^\infty{}_{(\mu)} \frac{b+b'}{2-n+b+b'} . \frac{b+b'+1}{2-n+b+b'+1} \cdots \frac{b+b'+\mu-1}{2-n+b+b'+\mu-1} . \frac{(-b)^\mu}{\Pi(\mu)}. \end{array}\right.$$

Die Reihe 19) aber, wenn sie mit der, in Bezug auf n constanten Grösse

$$\Pi\left(\frac{b}{a}-1\right)$$

dividirt wird, geht über in

$$45)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b^n}{\Pi(n-b-b'-1)}\times\\ \sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\dfrac{n-1}{n-b-b'}\cdot\dfrac{n-1+1}{n-b-b'+1}\cdots\dfrac{n-1+\mu-1}{n-b-b'+\mu-1}\cdot\dfrac{(-1)^\mu\,.\,b^\mu}{\Pi(\mu)}\end{array}\right.$$

und 18) in

$$46)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b^n}{\Pi(n-b-b'-1)}\times\\ \sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\dfrac{1-b-b'}{n-b-b'}\cdot\dfrac{1-b-b'+1}{n-b-b'+1}\cdots\dfrac{1-b-b'+\mu-1}{n-b-b'+\mu-1}\cdot\dfrac{b^\mu}{\Pi(\mu)}.\end{array}\right.$$

Für $a=1$ geht die Recursionsformel über in

$$47)\qquad n\,y(n+2)+(b'-2n)\,y(n+1)+(b+n)\,y(n)=0$$

und ihre Lösungen 24), 25), 26), 27) in

$$48)\ \frac{\Pi(n+b-1)}{\Pi(n-2)}\cdot\sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{2-n}{2+b}\cdot\frac{2-n+1}{2+b+1}\cdots\frac{2-n+\mu-1}{2+b+\mu-1}\cdot\frac{(b+b')^\mu}{\Pi(\mu)},$$

$$49)\ \frac{\Pi(n+b-1)}{\Pi(n-2)}\cdot\sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{n+b}{2+b}\cdot\frac{n+b+1}{2+b+1}\cdots\frac{n+b+\mu-1}{2+b+\mu-1}\cdot\frac{(-1)^\mu\,.\,(b+b')^\mu}{\Pi(\mu)},$$

$$50)\ \sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{1-n-b}{-b}\cdot\frac{1-n-b+1}{-b+1}\cdots\frac{1-n-b+\mu-1}{-b+\mu-1}\cdot\frac{(b+b')^\mu}{\Pi(\mu)},$$

$$51)\ \sum_0^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{n-1}{-b}\cdot\frac{n-1+1}{-b+1}\cdots\frac{n-1+\mu-1}{-b+\mu-1}\cdot\frac{(-1)^\mu\,.\,(b+b')^\mu}{\Pi(\mu)}.$$

Damit die Recursionsformel 2) auch für $a=\infty$ einen Sinn habe, muss man dieselbe erst durch a dividiren und dann zur Grenze übergehen. Setzen wir dann

$$c'=\frac{b'}{a},\quad c=\frac{b}{a},$$

worin c', c beliebige Grössen sein können (Null z. B., wenn b, b' endlich sind), so erhält die Recursionsformel 2) die Gestalt

$$(c'-n)\,y(n+1)+(c+n)\,y(n)=0,$$

deren allgemeine Lösung bekanntlich

$$\frac{\Pi(n+c-1)}{\Pi(n-c'-1)}$$

ist. Man gelangt aber auch zu dieser Lösung, wenn man in 20) oder 21) $a=\infty$ setzt. Es ziehen sich dann die hypergeometrischen Reihen auf ihr Anfangsglied zurück, und es bleibt von jenen Lösungen nur

$$\lim_{a=\infty} \frac{\Pi\left(n+\frac{b}{a}-1\right)}{\Pi\left(n+\frac{b}{a.1-a}+\frac{b'}{1-a}-1\right)}=\frac{\Pi(n+c-1)}{\Pi(n-c'-1)}$$

übrig. Setzt man auch noch in dem Integral 14) $a=\infty$, so erhält man

$$\int s^{-c-c'-1}.(1-s)^{n+c-1}.ds,$$

also, abgesehen von einem constanten Factor, ebenfalls

$$\frac{\Pi(n-1+c)}{\Pi(n-c'-1)}.$$

Um für die Recursionsformel 47) auch noch eine Lösung in Integralform zu haben, verwandeln wir das Integral 13) durch die Substitution

$$\frac{a}{a-1}\cdot\frac{1}{s}$$

für s in

$$52)\quad (-1)^{1-n}.\int s^{\frac{b}{a}+n-1}.(1-s)^{-n+1}.\left(1-\frac{a-1}{a}s\right)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1}ds,$$

welches für $a=1$ übergeht in das Integral

$$53)\quad (-1)^{1-n}.\int s^{b+n-1}.(1-s)^{-n+1}.e^{-(b+b')s}.ds,$$

und für $b'=-b$ die Lösung

$$\frac{\Pi(b+n-1)}{\Pi(n-2)}$$

liefert, deren Richtigkeit noch *a posteriori* leicht erkannt wird.

§ 4.

Die Integralausdrücke für die Lösungen der Recursionsformel 2) sind selbst bei den von uns angewandten Modificationen des Weges nicht alle direct brauchbar, wenn einer der Exponenten der unter dem Integralzeichen stehenden Function, d. h. eine der Grössen

$$n,\quad n+\frac{b}{a},\quad \frac{b+b'}{1-a},\quad \frac{b+ab'}{a.1-a}$$

eine ganze positive oder negative Zahl oder Null ist. Es werden in diesem Falle einige der Integrale unendlich. Bei der Darstellung der Lösungen durch hypergeometrische Reihen, wie sie oben aufgestellt sind, findet sich, dass für die beiden letzten Exponenten, also wenn

$$\pm\frac{b+b'}{1-a},\quad \pm\frac{b+ab'}{a.1-a}$$

ganzzahlige Werthe annehmen, ein Unendlichwerden überhaupt nicht eintritt, dass hingegen für die beiden ersten Exponenten, also wenn

$$\pm n \text{ oder } \pm\left(n+\frac{b}{a}\right)$$

ganzzahlige Werthe annehmen, die Reihen selbst endlich bleiben, und nur die davorstehenden Factoren, von n abhängende Π-Functionen, unendlich werden können. Diese lassen sich aber mittelst des Satzes

$$\Pi(-\mu) \,.\, \Pi(\mu - 1) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi}$$

nach Multiplication mit den periodischen Functionen

$$(-1)^n \sin n\pi \text{ bez. } (-1)^n \sin\left(n + \frac{b}{a}\right)\pi$$

so umformen, dass die Lösungen endlich bleiben. Es lassen sich aber die Integrale auch noch in diesem Falle verwenden, wenigstens bei der hier angenommenen Modification des Weges, wenn man sie mit einem passenden Factor multiplicirt, der da verschwindet, wo die Integrale unendlich werden.

In den Fällen, in welchen

$$n - 2, \quad -n - \frac{b}{a}$$

beziehentlich ganze negative Zahlwerthe durchlaufen, erscheint es bemerkenswerth, dass die beiden von einander unabhängigen Lösungen der Recursionsformel 2) für diese Werthreihe ein constantes Verhältniss haben müssen. Um nur einen Fall zu betrachten, sei $n - 2$ eine ganze negative Zahl und $\psi(n)$ eine Lösung von

$$ny(n+2) + (b' - \overline{1 + a} \,.\, n)\, y(n+1) + (b + an)\, y(n) = 0,$$

die für $n = 2$, $n = 1$ endlich bleibt. Dann hat man zur Bestimmung von $\psi(n)$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
&0 \,.\, \psi(2) + b' \,.\, \psi(1) + b\,\psi(0) = 0,\\
&\qquad -\psi(1) + (b' + 1 + a)\,\psi(0) + (b - a)\,\psi(-1) = 0,\\
&\qquad -2\psi(0) + [b' + 2(1 + a)]\,\psi(-1) + (b - 2a)\,\psi(-2) = 0\\
&\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.},
\end{aligned}$$

aus welchem folgt, dass $\psi(0)$ aus $\psi(1)$, dann $\psi(-1)$ aus $\psi(1)$, $\psi(-2)$ aus $\psi(1), \ldots, \psi(-m)$ aus $\psi(1)$ linear homogen und endlich bestimmt ist, und also nur diesen einen willkürlichen Factor enthält, was zu beweisen war.

Man erhält aber Lösungen aus dem Integralausdrucke zuerst für positive ganze $n - 1$ in folgender Weise. Es bedeutet das Integral

$$\int_0^1 s^{-n+1} \,.\, (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a} - 1} \,.\, (1 - as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a} - 1} \,.\, ds,$$

wenn die Integration in gewöhnlichem Sinne nicht bis an den Punkt Null erstreckt werden kann, also wenn der reelle Theil von n grösser oder gleich 2 ist, die Summe der Integrale

$$\int_{\varepsilon}^{1} s^{-n+1} . (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1} . ds$$

$$+\frac{1}{1-e^{-2(n-1)\pi i}} . \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} s^{-n+1} . (1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}} . ds,$$

worin das letzte Integral über eine in positiver Richtung (links herum) um den Punkt $s=0$ herumführende Schlinge zu nehmen ist, die in ε anfängt und in ε endet und ausser dem Punkte Null keinen Verzweigungspunkt weiter enthält. Multipliciren wir nun mit der periodischen Function

$$1-e^{-2(n-1)\pi i},$$

und setzen dann für $n-1$ eine ganze positive Zahl, so geht der Ausdruck (nach dem Cauchy'schen Satz) über in

$$54)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1}}{s^{n-1}} . ds \\ &= \frac{1}{\Pi(n-2)} . \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \left[(1-s)^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1} \right], \end{aligned} \right.$$

wenn nach der Differentiation $s=0$ gesetzt wird. Auf diese Weise findet man folgende Lösungen der Recursionsformel 2)

$$55)\quad \frac{(-1)^n}{\Pi(n-2)} . \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \left[s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-as)^{n+\frac{b}{a}-1} \right],$$

wenn nach dem Differenziren $s=1$ gesetzt wird, und

$$56)\quad \frac{\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-n}}{\Pi(n-2)} . \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \left[s^{\frac{b+b'}{1-a}-1} . (1-s)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1} \right].$$

wenn nach dem Differenziren

$$s=\frac{a}{a-1}$$

gesetzt wird etc.

Wenn aber $n-2$ eine ganze negative Zahl ist, so findet man aus 8) die Werthe

$$75)\quad \frac{(-a)^n}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} . \frac{d^{-n+1}}{ds^{-n+1}} \left[s^{-\frac{b+b'}{1-a}} . (1-as)^{-n-\frac{b}{a}} \right]$$

für $s=1$, oder

$$58)\quad \frac{a^n}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{d^{-n+1}}{ds^{-n+1}}\left[(1-s)^{-\frac{b+b'}{1-a}} \cdot (1-as)^{\frac{b+ab'}{a.1-a}}\right]$$

für $s=0$. Wenn ferner

$$-n-\frac{b}{a}$$

eine ganze negative Zahl ist, so erhält man aus 4)

$$59)\quad \Pi(-n+1) \cdot \frac{d^{n+\frac{b}{a}-1}}{ds^{n+\frac{b}{a}-1}}\left[s^{\frac{b+ab'}{a.1-a}} \cdot (1-as)^{n-2}\right]$$

für $s=1$, und wenn

$$n+\frac{b}{a}-1$$

eine ganze negative Zahl ist, aus 15)

$$60)\quad \frac{(-1)^{n+\frac{b}{a}}}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{d^{-\left(n+\frac{b}{a}\right)}}{ds^{-\left(n+\frac{b}{a}\right)}}\left[s^{\frac{a+ab'}{1-a}-1} \cdot (1-s)^{-\frac{a+ab'}{a.1-a}-1}\right]$$

etc. Wenn aber eine der Zahlen

$$\pm\frac{b+b'}{1-a}, \quad \pm\frac{b+ab'}{a.1-a}$$

eine ganze negative Zahl oder Null ist, so reicht dasselbe Verfahren aus, die bestimmten Integrale in Differentialquotienten zu verwandeln. Es sind jedoch dann diese Differentialquotienten in Bezug auf ihre Brauchbarkeit nicht an specielle Werthe von n geknüpft, sondern allgemein verwendbar. Man hat zur Verwandlung der Integralausdrücke in Differentialquotienten jene mit den Factoren

$$1-e^{\pm\frac{b+b'}{1-a}2\pi i}, \quad 1-e^{\pm\frac{b+ab'}{a.1-a}2\pi i}$$

beziehentlich zu versehen und dann erst für

$$\frac{b+b'}{1-a}, \quad \frac{b+ab'}{a.1-a}$$

ganze Zahlen zu setzen. Auf diese Weise liefert z. B. das Integral 3), wenn

$$\frac{b+b'}{1-a}=-m$$

ist, die für alle n giltige Lösung

$$\frac{d^m}{ds^m}\left[s^{-n+1} \cdot (1-as)^{-\frac{b+ab'}{a.1-a}-1}\right]$$

für $s=1$. Ist $m=0$, d. h. $b=-b'$, so erhält man als Lösung eine Constante, ein Resultat, von dessen Richtigkeit man sich leicht *a posteriori* durch Einsetzen in 2) überzeugt. Ist

$$\frac{b+ab'}{a\,.\,1-a}=-m,$$

so liefert 4) die Lösung

$$62)\qquad \frac{\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(1-s)^{-n-\frac{b}{a}}.\,(1-as)^{n-2}\right]$$

für $s=0$.

Ist $\frac{b+b'}{1-a}$ eine positive ganze Zahl m, so liefert das Integral 8) die Lösung

$$63)\qquad \frac{a^n.\,\Pi(-n+1)}{\Pi\left(-n-\frac{b}{a}\right)}.\,\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\left[(1-s)^{n-2}.\,(1-as)^{-n-\frac{b}{a}}\right]$$

für $s=0$, und ist $\frac{b+ab'}{a\,.\,1-a}$ eine positive Zahl m, so liefert das Integral 9) die Lösung

$$64)\qquad a^n\frac{d^m}{ds^m}\left[(1-s)^{n+\frac{b}{a}-1}.\,(1-as)^{-n+1}\right]$$

für $s=0$. Diese Formen können noch vermehrt werden, was wir hier unterlassen.

§ 5.

Die Zurückführung der Recursionsformel 1) auf die Formel 2) hat uns wesentlich dazu gedient, die Lösungen durch Integrale in einer Form zu erhalten, welche die der Integrale ist, die zur Darstellung der hypergeometrischen Reihe benutzt zu werden pflegen. Dabei wurde aber vorausgesetzt, dass $A''\gtrless 0$ sei. Jetzt wollen wir, nur um den Fall zu erledigen, in welchem $A''=0$ ist, auf jene Form der Integrale Verzicht leistend, die Recursionsformel 1) direct integriren, zunächst unter der Voraussetzung, dass $A\gtrless 0$ sei. Wir wollen diese noch durch A dividiren, oder kürzer (was dasselbe ist) $A=1$ annehmen, die Formel sonst aber nicht weiter reduciren, sondern nur

$$A'=a+a',\quad A''=a\,.\,a'$$

setzen, so dass also die zu integrirende Recursionsformel die Gestalt hat

$$65)\quad (B''+aa'n)\,\varphi(n+2)+[B'-(a+a')\,n]\,\varphi(n+1)+(B+n).\,\varphi(n)=0.$$

Die Methode der Behandlung ist ganz die frühere. Wir setzen eine Lösung in der Form voraus

$$\int s^{-n+1}.\,V.\,ds,$$

setzen diese in die Recursionsformel ein und erhalten daraus die Forderung

$$\int s^{-n-1}\,[B'' + B's + Bs^2 + n\,(a-s)\,(a'-s)]\,V\,ds = 0,$$

oder vermittelst partieller Integration diese

$$\int s^{-n-1}\left[(B'' + B's + Bs^2)\,V + \frac{s\,d\,(s-a)\,(s-a')\,V}{ds}\right]ds$$

$$+ [s^{-n} . (s-a) . (s-a') . V] = 0.$$

Damit der mit dem Integralzeichen behaftete Theil verschwinde, bestimmt man V aus der Differentialgleichung

$$\frac{d\,lg\,(s-a)\,(s-a')\,V}{ds} = -\frac{B'' + B's + Bs^2}{s.(s-a)\,(s-a')},$$

$$= -\frac{B''}{a\,.\,a'}\,\frac{d\,lg\,s}{ds} - \frac{B'' + aB' + a^2B}{a\,(a-a')}\,\frac{d\,lg\,s - a}{ds} - \frac{B'' + B'a' + Ba'^2}{a'\,(a'-a)}\,\frac{dl\,g\,s - a'}{ds},$$

woraus folgt

$$V = s^{-\frac{B''}{aa'}} . (1-s)^{-\frac{B'' + B'a + Ba^2}{a\,.\,(a-a')} - 1} . (1-as)^{-\frac{B'' + B'a' + Ba'^2}{a'(a'-a)} - 1}.$$

Damit aber der durch partielle Integration vom Integralzeichen befreite Theil

$$[s^{-n} . (s-a)\,(s-a') . V]$$

verschwinde, muss man zu Grenzen des Integrals eine der vier Grössen

$$0,\quad a,\quad a',\quad \infty$$

nehmen, und wenn die Integration bis an eine derselben nicht erstreckt werden kann, wieder die erwähnte Modification des Weges eintreten lassen. Unter Voraussetzung dieser Grenzen also liefert das Integral

$$66)\int s^{-n-\frac{B''}{aa'}+1} . (a-s)^{-\frac{B'' + aB' + a^2B}{a\,(a-a')} - 1} . (a-s)^{-\frac{B'' + a'B' + a'^2B}{a'(a'-a)} - 1} . ds,$$

oder wenn man $\frac{1}{s}$ statt s setzt, das Integral zwischen den Grenzen

$$0,\quad \frac{1}{a},\quad \frac{1}{a'},\quad \infty$$

$$67)\int s^{n+B-1} . (1-as)^{-\frac{B'' + aB' + a^2B}{a\,.\,a-a'} - 1} . (1-a's)^{-\frac{B'' + a'B' + a'^2B}{a'\,.\,a'-a} - 1} . ds$$

je sechs Lösungen der Recursionsformel 65). Die Form 67) eignet sich nun zu einem Grenzübergange, indem man $a' = 0$ setzt. Sie liefert dann das Integral

$$68)\qquad \int e^{-\frac{B''}{a}s} . s^{n+B-1} . (1-as)^{-B-\frac{B'}{a}-\frac{B''}{a^2}-1} . ds,$$

welches zwischen den Grenzen

$$0,\quad \frac{1}{a},\quad \infty$$

zu nehmen ist. Und dies ist die Lösung der Recursionsformel

$$B''\varphi\,(n+2) + (B' - an)\,\varphi\,(n+1) + (B+n)\,\varphi\,(n) = 0.$$

Um auch noch den Fall zu erledigen, in welchem $A=0$ ist, setzen wir in 68) $\frac{B''}{A}$ statt B'', $\frac{B'}{A}$ statt B', $\frac{B}{A}$ statt B, $\frac{a}{A}$ statt a, und erhalten so als Lösung der Recursionsformel

69) $$B''\varphi(n+2)+(B'-an)\varphi(n+1)+(B+An)\varphi(n)=0$$

das Integral

70) $$\int s^{n+\frac{B}{A}-1}.\left(1-\frac{a}{A}s\right)^{-\frac{B}{A}-\frac{B'}{a}-\frac{B''}{a^2}-1}.e^{-\frac{B''}{a}s}.ds$$

zwischen den Grenzen 0, $\frac{A}{a}$, ∞. Oder wenn wir s durch $\frac{1}{s}$ ersetzen.

71) $$\int s^{-n+\frac{B'}{a}+\frac{B''A}{a^2}}.\left(1-\frac{A}{a}s\right)^{-\frac{B}{A}-\frac{B'}{a}-\frac{B''A}{a^2}}.e^{-\frac{B''}{as}}.ds$$

zwischen den Grenzen 0, $\frac{a}{A}$, ∞. Gehen wir hier mit A zur Grenze 0 über, so finden wir als Lösung der Recursionsformel

72) $$B''\varphi(n+2)+(B'-an)\varphi(n+1)+B\varphi(n)=0$$

das Integral

73) $$\int_0^\infty s^{-n+\frac{B'}{a}}.e^{\frac{B}{a}s+\frac{B''}{as}}.ds,$$

wobei die Wahl des Integrationsweges so zu treffen ist, dass

$$\frac{B''}{as} \text{ für } s=0$$

sich dem Unendlichen in positiver Richtung, und für

$$s=\infty \text{ sich } -\frac{B}{a}s$$

dem Unendlichen in positiver Richtung nähert.

Auch aus dem Integrale 70) erhält man durch Grenzübergang eine Lösung der Recursionsformel 72), wenn man dasselbe in eine Reihe auflöst und dann A zur Grenze Null (am einfachsten $\frac{B}{A}$ als eine ganze positive Zahl zur Grenze Unendlich) übergehen lässt, und zwar findet man die Lösung

74) $$\left(\frac{B}{a}\right)^n\sum_0^\infty{}_{(\mu)}\frac{\left(\frac{BB''}{a^2}\right)^\mu}{\Pi(\mu)}\cdot\frac{1}{\Pi\left(n+\mu-1-\frac{B'}{a}\right)}.$$

§ 6.

Man kann nun leicht eine Function von x angeben, deren Entwickelung nach Potenzen von x Coefficienten besitzt, welche der Recursionsformel 1) Genüge leisten. Herr G. Cantor theilte mir eine Methode mit, durch

die man zu einer Differentialgleichung gelangt, deren nach Potenzen von x entwickelte Integrale Coefficienten besitzen, welche einer beliebig vorgegebenen Recursionsformel mit Coefficienten, die ganze Functionen von n sind, Genüge leisten. Dieser Methode folgen wir hier. Es sei $f(x)$ die gesuchte Function, ihre Coefficienten in der Entwickelung nach x seien

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2)\ldots\varphi(n)\ldots,$$

so dass

$$f(x)=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\ldots\varphi(n)x^n+\ldots$$

ist, so soll (wie wir die Recursionsformel bequemer einrichten)

$$1a)\qquad \left\{\begin{array}{l}(B+An)\,\varphi(n)+(B'-A'\,\overline{n+1})\,\varphi(n+1)\\ \quad+(B''+A''\,\overline{n+2})\,\varphi(n+2)=0\end{array}\right.$$

sein, also muss auch

$$\sum_0^\infty{}_{(n)}\Big\{x^n(B+An)\,\varphi(n)+\frac{1}{x}.x^{n+1}[B'-A'(n+1)]\,\varphi(n+1)$$
$$+\frac{1}{x^2}.[B''+A''(n+2)].\varphi(n+2).x^{n+2}=0\Big\},$$

oder

$$Bf(x)+A\frac{df(x)}{d\lg x}+\frac{1}{x}B'f(x)-\frac{1}{x}B'\varphi(0)-\frac{A'}{x}\frac{df(x)}{d\lg x}+\frac{1}{x^2}B''f(x)$$
$$-\frac{1}{x^2}B''[x\varphi(1)+\varphi(0)]+\frac{A''}{x^2}\frac{df(x)}{d\lg x}-\frac{A''}{x}\varphi(1)=0,$$

oder endlich

$$\frac{df(x)}{d\lg(x)}(Ax^2-A'x+A'')+f(x)(Bx^2+B'x+B'')=cx+c'$$

sein, wenn c, c' aus $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ zusammengesetzte und wie diese willkürliche Constante bezeichnen. Setzen wir nun

$$Ax^2-A'x+A''=A(x-\alpha)(x-\alpha')$$

und

$$X=x^{-\frac{B''}{A\alpha\alpha'}}.(x-\alpha)^{-\frac{B''+B'\alpha+B\alpha^2}{A\alpha.(\alpha-\alpha')}}.(x-\alpha')^{-\frac{B''+B'\alpha'+B\alpha'^2}{A\alpha'(\alpha'-\alpha)}},$$

so ist das Integral dieser Differentialgleichung

$$75)\qquad f(x)=X\int\frac{cx+c'.dx}{(Ax^2-A'x+A'').x.X}.$$

Die Differentialquotienten dieser Function nach x, dividirt durch die Facultät der Ordnungszahl, für $x=0$ also

$$\frac{1}{\Pi(n)}\frac{d^nf(x)}{dx^n}(x=0)$$

sind die zwei willkürliche Constante enthaltenden Lösungen der Recursionsformel $1a$), wenn die Integrationsconstante so genommen wird, dass jene Differentialquotienten endlich sind. Diese Differentialquotienten haben nur einen Sinn für die Werthreihe $n=0, 1, 2, 3\ldots$ Will man die Lö-

sungen der Formel 1*a*) durch Differentialquotienten für die Werthreihe $n = -1, -2 \ldots$ haben, so braucht man nur ebenso die Recursionsformel

$$[B - An]\,\psi(n+2) + [B' + A'(n-1)]\,\psi(n+1) + [B'' - A''(n-2)]\,\psi(n) = 0$$

zu behandeln, deren Lösungen $\psi(n)$ für positive ganze n, gleichzeitig die Lösungen $\varphi(-n+2)$ sind. Will man endlich die Lösungen der Recursionsformel 1*a*) durch Differentialquotienten für die Werthreihe

$$\mu,\quad \mu+1,\quad \mu+2,\quad \mu+3 \ldots$$

haben, wenn μ beliebig (complex) ist, so braucht man nur zu beachten, dass die Lösungen $\chi(n)$ der Recursionsformel

$$[B'' + \mu A'' + (n+2) A'']\,\chi(n+2) + [B' - \mu A' - (n+1) A']\,\chi(n+1) + (B + \mu A + nA)\,\chi(n) = 0$$

der Function $\varphi(n+\mu)$ gleich sind.

Da die Differentialquotienten der Function 75) ziemlich complicirt sind für grössere n, so kann man es umgekehrt als eine Anwendung der uns bekannten Auflösungen der Recursionsformel 1) ansehen, die Coefficienten der Reihenentwickelung der Function 75) durch hypergeometrische Reihen auszudrücken.

Halle, im Mai 1869.

XV.

Ueber eine leichte Construction der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen.

Von

Professor Dr. H. Durège in Prag.

Bekanntlich kann eine Curve dritter Ordnung dadurch erzeugt werden, dass man ein Kegelschnittbüschel mit einem Strahlbüschel in projectivische Beziehung setzt und die Durchschnitte jedes Strahles mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte aufsucht. Die Curve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort dieser Durchschnitte bildet, geht dann durch die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels und den Mittelpunkt des Strahlbüschels hindurch. So leicht sich diese Construction theoretisch aussprechen lässt, so mühevoll gestaltet sich aber ihre wirkliche Ausführung, so dass sie zu dem Zwecke, vorkommenden Falls eine Curve dritter Ordnung zu zeichnen, kaum anwendbar erscheint.

Wendet man sich zu speciellen Curven dritter Ordnung, so bieten sich zunächst diejenigen dar, welche einen Doppel- oder Rückkehrpunkt besitzen; allein bei diesen treten in Beziehung auf einige der wichtigsten Eigenschaften, insbesondere solche, welche die Polaren und die Wendepunkte betreffen, so wesentliche Modificationen ein, dass diese specielleren Curven zu dem Zwecke, der Vorstellung bei Betrachtung allgemeiner Curven dritter Ordnung zu Hilfe zu kommen, nicht geeignet sind. Viel besser eignet sich für diesen Zweck diejenige specielle Art der Curven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehen. Denn diese scheinen in Beziehung auf die oben genannten Eigenschaften nichts Wesentliches vor den allgemeinen Curven dritter Ordnung voraus zu haben, gerade wie auch der Kreis in Beziehung auf seine Polareigenschaften sich nicht wesentlich von den Kegelschnitten im Allgemeinen unterscheidet. Diese Curven dritter Ordnung lassen sich aber auf eine ungemein leichte Weise construiren.

Zunächst ist klar, dass man jedesmal eine Curve dieser Art erhält, wenn man zwei Basispunkte des erzeugenden Kegelschnittbüschels in die imaginären Kreispunkte hineinfallen lässt. Dadurch geht das Kegelschnittbüschel in ein System von Chordalkreisen über. Dies würde zwar schon einige Erleichterung gewähren, indessen immer noch keine beträchtliche, wenn es nicht möglich wäre, zu jedem Kreise den projectivisch entsprechenden Strahl auf eine leichte Weise zu construiren. Dies gelingt aber mit Hilfe zweier Sätze, welche Herr Eckardt in der Abhandlung: „Ueber die Curven dritter Ordnung, welche durch die zwei imaginären unendlich entfernten Kreispunkte gehen,"*) aufgestellt und bewiesen hat.

Der erste Satz lautet so: Zieht man aus den Punkten a_1, a_2, in welchen eine der reellen Asymptote parallele Gerade die Curve schneidet, zwei Gerade, welche die Curve aufs Neue resp. in b_1, b_2 und c_1, c_2 treffen, so liegen die letzteren vier Punkte jedesmal auf einem Kreise. Wir haben von diesem Satze einen speciellen Fall in Anwendung zu bringen. Lässt man nämlich die Gerade $a_1\,a_2$ die reelle Asymptote selbst sein, so wird der eine Punkt, etwa a_2, der Durchschnitt A der reellen Asymptote mit der Curve, der andere, a_1, aber rückt ins Unendliche. Daher wird jetzt die Gerade $b_1\,b_2$ der reellen Asymptote parallel, und man hat den Satz: Schneidet die Curve eine der reellen Asymptote parallele Gerade in b_1, b_2, und eine durch den Asymptotendurchschnitt A gehende Gerade in c_1, c_2, so liegen diese vier Punkte auf einem Kreise. Hält man die Punkte b_1, b_2 fest und legt durch dieselben beliebige Kreise, so geht die Verbindungslinie der beiden anderen Durchschnitte c_1, c_2 irgend eines dieser Kreise mit der Curve jedesmal durch A. Hieraus folgt: Wenn man zur Erzeugung der Curve ein System von Chordalkreisen so wählt, dass die Chordale der reellen Asymptote parallel ist, so ist der Mittelpunkt des zugehörigen Strahlbüschels der Asymptotendurchschnitt A.

Zur leichten Bestimmung desjenigen Strahles, der einem bestimmten Kreise entspricht, dient nun ferner Folgendes. Da die imaginären Asymptoten der Curve einander conjugirt sind, so ist ihr Durchschnitt reell. Diesen Punkt hat Herr Eckardt das Centrum C der Curve genannt und von ihm folgenden Satz bewiesen: Die Punkte c_1, c_2, in welchen eine durch den Asymptotendurchschnitt A gehende Gerade die Curve schneidet, liegen stets auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt C ist, so dass die die Sehne $c_1\,c_2$ senkrecht halbirende Gerade durch C geht. Verbindet man nun hiermit den vorigen Satz, wonach die Punkte c_1, c_2 auch immer mit den Punkten b_1, b_2, in welchen eine der reellen Asymptote parallele Gerade die Curve schneidet, auf einem Kreise liegen, so geht die die Sehne $c_1\,c_2$ senkrecht halbirende Gerade auch durch den Mittelpunkt M dieses letzteren

*) S. diese Zeitschrift Bd. 10. pag. 321.



Kreises; und daher steht der von A ausgehende Strahl, welcher den Kreis (M) in den Curvenpunkten c_1, c_2 schneidet, senkrecht auf CM.

Hiernach ist nun die Construction einer Curve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte geht, folgende: Man nimmt zwei Punkte b_1, b_2 beliebig an und setzt fest, dass die reelle Asymptote der Curve der Geraden $b_1 b_2$ parallel sei. Sodann nimmt man auch den Asymptotendurchschnitt A und das Centrum C beliebig an. Legt man dann durch b_1, b_2 einen beliebigen Kreis, verbindet den Mittelpunkt M desselben mit C und zieht aus A eine Gerade senkrecht auf CM, so sind die Durchschnitte c_1, c_2 dieser Senkrechten mit dem Kreise (M) zwei Curvenpunkte. Indem man durch b_1, b_2 beliebig viele Kreise legt und für jeden die Construction wiederholt, kann man sich so viele Curvenpunkte verschaffen als man will. Die Wahl des Punktes A ist nur dadurch beschränkt, dass er nicht auf der Chordale $b_1 b_2$ liegen darf, weil er dann nicht der Asymptotendurchschnitt sein könnte. Das Centrum C kann ebenfalls im Uebrigen willkürlich gewählt werden, nur darf es, wie sich weiter unten ergeben wird, nicht auf der Centrallinie der Chordalkreise (auf der die Strecke $b_1 b_2$, senkrecht halbirenden Geraden) liegen. Uebrigens leuchtet ein, dass es gleichgiltig ist, ob das System der Chordalkreise sich in zwei reellen Punkten schneidet oder nicht, indem auch in dem letzteren Falle die reelle Asymptote der Chordale parallel wird, nur ist dann die Ausführung der Construction etwas umständlicher.

Es bleibt noch die Frage zu erörtern, ob auch durch die gemachten Annahmen eine Curve dritter Ordnung eindeutig bestimmt sei. Sehen wir daher zu, wie viele Punkte der Curve dabei als gegeben zu betrachten sind. Da durch b_1, b_2 zugleich die Richtung der reellen Asymptote bestimmt ist, so involvirt der Punkt A drei Punkte, nämlich A selbst und die beiden in dem unendlich fernen Berührungspunkte zusammenliegenden Punkte. Da ferner in C die beiden imaginären Asymptoten sich schneiden, so sind mit C zugleich zwei Punktepaare gegeben, die in die beiden imaginären Kreispunkte hineinfallen. Der Punkt C involvirt also vier gegebene Curvenpunkte, und man hat somit die zur Bestimmung einer Curve dritter Ordnung erforderlichen neun Punkte. Es fragt sich aber, ob diese neun Punkte nicht so liegen, dass sie die Durchschnitte von zwei Curven dritter Ordnung bilden und dass daher unendlich viele Curven dritter Ordnung durch sie hindurch gelegt werden können. Nun besteht aber der Satz: Wenn neun Punkte die Durchschnitte von zwei Curven dritter Ordnung bilden, und drei derselben in gerader Linie liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitt, und umgekehrt: liegen von neun Punkten einer Curve dritter Ordnung drei in einer Geraden und die sechs übrigen auf einem Kegelschnitt, so gehen unendlich viele Curven dritter Ordnung durch die neun Punkte hindurch. Nun liegen von unseren neun Punkten in der That drei in gerader Linie, nämlich A und die beiden im Berührungspunkte der

reellen Asymptote zusammenliegenden Punkte; daher müssten, wenn die Curve nicht eindeutig bestimmt wäre, die Punkte b_1, b_2 und die vier durch C bestimmten Punkte auf einem Kegelschnitte liegen. Unter den letzteren befinden sich aber die beiden imaginären Kreispunkte, also müsste der Kegelschnitt ein Kreis sein, und da ferner in jedem imaginären Kreispunkte zwei Punkte zusammenfallen, so müssten die imaginären Asymptoten der Curve zugleich Asymptoten des Kreises, d. h. C müsste der Mittelpunkt des Kreises sein. Aber die Mittelpunkte aller Kreise, die durch b_1, b_2 hindurchgehen, liegen auf der Geraden, welche die Strecke $b_1 b_2$ senkrecht halbirt. Daher tritt die Unbestimmtheit dann und nur dann ein, wenn C auf dieser Centrallinie liegt. Wenn man also, wie oben verlangt wurde, Sorge trägt, dass dieser Fall nicht eintritt, so kann man sicher sein, dass die Curve eindeutig bestimmt ist.

Prag, 7. Mai 1869.

XVI.

Ueber das an Volumen grösseste einem dreiachsigen Ellipsoid einbeschriebene Tetraeder*).

Von

Professor F. Grelle.

Werden die rechtwinkligen Coordinaten der vier Eckpunkte 0, 1, 2, 3 des Tetraeders, bezogen auf die Hauptachsen $2a$, $2b$, $2c$ des Ellipsoides, mit: x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 bezeichnet, so ist bekanntlich unter den Bedingungen:

$$1)\quad \begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0, \\ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1=0, \\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}-1=0, \\ \frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}-1=0, \end{cases}$$

der sechsfache Inhalt des Tetraeders durch die Determinante:

$$2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & x_0, & y_0, & z_0 \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

dargestellt. Die gesuchten Werthe von x_0, y_0, z_0 u. s. w. müssen also die zwölf partiellen Abgeleiteten von:

$$3)\quad \begin{cases} \Delta + k_0\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)+k_1\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right) \\ +k_2\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}-1\right)+k_3\left(\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}-1\right) \end{cases}$$

zu Null machen, so dass man zur Bestimmung dieser Coordinaten und der Constanten k_0, k_1, k_2, k_3 ausser den vier Gleichungen 1) noch die zwölf Gleichungen erhält:

---

*) Während einige Schriftsteller mit Tetraeder nur den regelmässigen Vierflächner bezeichnen, verstehen andere darunter, wie es auch hier geschehen, jede dreiseitige Pyramide.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_0} + 2k_0 \frac{x_0}{a^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + 2k_1 \frac{x_1}{a^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_0} + 2k_0 \frac{y_0}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} + 2k_1 \frac{y_1}{b^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial z_0} + 2k_0 \frac{z_0}{c^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z_1} + 2k_1 \frac{z_1}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + 2k_2 \frac{x_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} + 2k_3 \frac{x_3}{a^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_2} + 2k_2 \frac{y_2}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y_3} + 2k_3 \frac{y_3}{b^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial z_2} + 2k_2 \frac{z_2}{c^2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial z_3} + 2k_3 \frac{z_3}{c^2} = 0,$$

woraus sich weiter durch Elimination von k_0, k_1, k_2, k_3 ergiebt:

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{y_0}{b^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_0} = \frac{x_0}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_0}, & \frac{z_0}{c^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_0} = \frac{x_0}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial z_0}, \\ \frac{y_1}{b^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \frac{x_1}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_1}, & \frac{z_1}{c^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = \frac{x_1}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial z_1}, \\ \frac{y_2}{b^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \frac{x_2}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_2}, & \frac{z_2}{c^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = \frac{x_2}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial z_2}, \\ \frac{y_3}{b^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = \frac{x_3}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial y_3}, & \frac{z_3}{c^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = \frac{x_3}{a^2} \frac{\partial \Delta}{\partial z_3}. \end{array} \right.$$

Nach einem bekannten Satze der Determinanten-Theorie ist aber:

$$y_0 \frac{\partial \Delta}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = 0,$$
$$x_0 \frac{\partial \Delta}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial \Delta}{\partial y_3} = 0,$$
$$z_0 \frac{\partial \Delta}{\partial x_0} + z_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = 0,$$
$$x_0 \frac{\partial \Delta}{\partial z_0} + x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial \Delta}{\partial z_2} + x_3 \frac{\partial \Delta}{\partial z_3} = 0,$$

von den unter einander stehenden Gleichungen 4) ist demnach die Summe von irgend dreien identisch mit der vierten Gleichung derselben Gruppe. Die Anzahl der Bestimmungsgleichungen für die zwölf Coordinaten x_0, y_0, z_0 u. s. w. reducirt sich also auf zehn, womit zunächst bewiesen ist, dass es unendlich viele, ihrer Lage nach verschiedene, grösseste Ellipsoiden-Tetraeder giebt.

Die Gleichung einer durch die drei Punkte 1, 2, 3 gelegten Ebene ist:

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ x, & x_1, & x_2, & x_3 \\ y, & y_1, & y_2, & y_3 \\ z, & z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man den linken Theil entwickelt und der Kürze halber:

$$\begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = \nabla$$

setzt:

$$5)\qquad x\frac{\partial \Delta}{\partial x_0} + y\frac{\partial \Delta}{\partial y_0} + z\frac{\partial \Delta}{\partial z_0} + \nabla = 0.$$

Wegen der beiden ersten der Gleichungen 4) lässt sich aber 5) **auf** die Form bringen:

$$6)\qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} + \frac{x_0}{a^2}\frac{\nabla}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_0}\right)} = 0,$$

woraus hervorgeht, dass **jede der Seitenflächen des fraglichen Tetraeders der Berührungsebene des Ellipsoides in dem der Fläche gegenüberliegenden Eckpunkt parallel ist.**

Aus 6) erhält man weiter für die Entfernung E des Punktes 0 und für die Entfernung e des Mittelpunktes des Ellipsoides von der Ebene dieser Gleichung:

$$7)\qquad E = \frac{1 + \frac{x_0}{a^2}\frac{\nabla}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_0}\right)}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}},\quad e = \frac{\frac{x_0}{a^2}\frac{\nabla}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_0}\right)}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}},$$

wo der Wurzelausdruck im Nenner mit solchem Vorzeichen in Anrechnung zu bringen ist, dass e positiv ausfällt. **Demnach ist stets $E > e$.**

Verlängert man den Halbmesser des Punktes 0, dessen Länge δ_1 sein möge, bis zum Durchschnitt mit der Ebene 1 2 3, und bezeichnet die Länge der Verlängerung mit δ, so ist wegen 7):

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{x_0}{a^2}\frac{\nabla}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_0}\right)},$$

weshalb aus 6) wird:

$$8)\qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0.$$

Durch ganz ähnliche Betrachtungen erhält man als Gleichungen der drei anderen Seitenflächen des Tetraeders:

$$9)\qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = 0,$$

$$10)\qquad \frac{xx_2}{a^2} + \frac{yy_2}{b^2} + \frac{zz_2}{c^2} + \frac{\eta}{\eta_1} = 0,$$

$$11)\qquad \frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} + \frac{zz_3}{c^2} + \frac{\vartheta}{\vartheta_1} = 0,$$

wo ε, ε_1, η, η_1, ϑ, ϑ_1 ganz ähnliche, leicht zu erkennende Bedeutung haben, wie δ und δ_1.

Berücksichtigt man endlich, dass Gleichung 8) für die Coordinaten der Punkte 1, 2, 3; Gleichung 9) für die der Punkte 0, 1, 3 u. s. w. stattfinden muss, so kommt man zu dem Resultat:

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\vartheta}{\vartheta_1}, \tag{12}$$

aus welchem durch geometrische Betrachtungen abgeleitet werden kann, dass die verlängerten Radien δ_1, ε_1, η_1, ϑ_1 die Seitenflächen 123, 023, 013, 012 in den Schwerpunkten dieser Dreiecke schneiden, dass demnach der Mittelpunkt des Ellipsoides der Schwerpunkt des gesuchten Tetraeders sein muss, jeder der Quotienten in 12) folglich den Werth $\frac{1}{3}$ hat.

Hiernach ist es leicht, die Ebene 123 festzulegen, nachdem der Punkt 0 irgendwo auf dem Ellipsoid angenommen ist. Die Punkte 1, 2, 3 sind die Ecken eines der Ellipse, worin die Ebene 123 das Ellipsoid schneidet, einbeschriebenen grössesten Dreiecks. Das Volumen eines so construirten Tetraeders ist $\frac{3}{27}\sqrt{3}.\, abc$.

Es verdient noch erwähnt zu werden, dass die vier elliptischen Kegel, deren gemeinsame Spitze im Schwerpunkt des besprochenen Tetraeders liegt, deren Basen die Ellipsen sind, worin die Flächen des Tetraeders das Ellipsoid schneiden, gleiches Volumen haben.

Da nämlich ein grössestes einer Ellipse der Hauptachsen $2A$ und $2B$ einbeschriebenes Dreieck den Flächeninhalt $\frac{3}{4}\sqrt{3}\; AB$ hat, wegen der vorhin entwickelten Werthe aber:

$$\triangle\, 123 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\, abc \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}$$

ist, so erhält man für den Inhalt der Ellipse, worin die Ebene 123 das Ellipsoid schneidet:

$$\frac{8}{9}\pi abc \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}},$$

woraus in Verbindung mit der aus 8) folgenden Höhe des zugehörigen Kegels

$$\frac{1}{3\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}$$

sich als Volumen desselben die Constante $\frac{8}{81}abc\pi$ ergiebt.

Hannover, im April 1869.

XVII.

Ueber die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven.

Von

Dr. Emil Weyr in Prag.

(Hierzu Tafel VII, Fig. 1 bis 4).

1.

Wenn die von einem leuchtenden Punkte O ausgehenden Lichtstrahlen von einer ebenen Curve C reflectirt werden, so umhüllen sie die Brennlinie B der Curve C. Dabei wird selbstverständlich vorausgesetzt, dass O und C in einer und derselben Ebene liegen.

Fällt man vom Punkte O auf die Tangenten von C Perpendikel, so erfüllen deren Fusspunkte eine Curve F, die Fusspunktcurve von C (bezüglich O als Pol), deren Evolute wir kurz mit E bezeichnen wollen. Die Aufgabe: „Punkte der Brennlinie B zu construiren", wurde bereits mehrfach behandelt und gelöst. Wir wollen sie in aller Kürze geometrisch lösen, um aus der Lösung einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen der Brennlinie B und der Evolute E von F abzuleiten.

2.

Wenn der leuchtende Punkt O sich in einem der beiden Brennpunkte eines Kegelschnittes S befindet, so schneiden sich alle von S reflectirten Strahlen in dem andern Brennpunkte von S. Es folgt dies unmittelbar aus einer bekannten Brennpunkteigenschaft der Kegelschnitte.

Denkt man sich nun drei unendlich nahe aufeinanderfolgende Punkte m, m', m'' der Curve C (Tafel VII, Fig. 1), so bilden die von ihnen begrenzten Curvenelemente $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ zwei unendlich kleine in m' zusammenstossende ebene Spiegel.

Aus O fällt auf das Element $\overline{mm'}$ ein Lichtstrahl σ, welcher nach s, und auf $\overline{m'm''}$ ein Lichtstrahl σ', welcher nach s' reflectirt wird. Die beiden

Strahlen s und s' schneiden sich als zwei aufeinanderfolgende Tangenten der Brennlinie B in einem Punkte p derselben.

Stellt man sich nun einen Kegelschnitt S vor, welcher O zum Brennpunkte und mit der Curve C die zwei Elemente $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ gemein hat, d. h. sie an dieser Stelle osculirt, so kann man diese Stelle der Curve C durch jene des Kegelschnittes S ersetzen. Die Strahlen s und s' schneiden sich jedoch im zweiten Brennpunkte des verwendeten Kegelschnittes S und somit ist der Punkt p der zweite Brennpunkt des Kegelschnittes S.

Wir erhalten folgenden Satz:

> Bleibt der eine Brennpunkt eines Kegelschnittes fest, während der Kegelschnitt die feste Curve C nach und nach in den aufeinanderfolgenden Punkten einfach osculirt, so beschreibt der zweite Brennpunkt die Brennlinie B die Curve C.

Mir ist nicht bekannt, ob dieses jedenfalls schon lange bekannte Resultat in der Form eines Satzes ausgesprochen wurde oder nicht. Wie ich aus dem Journale von Liouville entnehme (Band 1, S. 191) finden sich diesbezügliche Entwickelungen in Smith's *Traité d'optique liv.* 2 *chap.* 9 und in *l'Analyse des infiniments petits de l'Hôpital section VI.*

In dem angeführten Journale stützt Abel Transon auf folgende Formel eine Construction der Krümmungshalbmesser der Kegelschnitte. Ist C die reflectirende Curve, O der leuchtende Punkt und m ein Punkt von C, also Om ein auffallender Strahl mit dem Einfallswinkel i, sowie mp der reflectirte Strahl und p der Berührungspunkt des letzteren mit der Brennlinie, ferner r der Krümmungsradius von C im Punkte m und bezeichnet man kurz Om mit ϱ und mp mit ϱ', so ist nach Smith:

$$\varrho\varrho' = \frac{r}{2}(\varrho + \varrho') \cos i.$$

Wenn der Kegelschnitt S eine Parabel wird, so rückt sein zweiter Brennpunkt p ins Unendliche und liefert einen unendlich weiten Punkt der Brennlinie. Der zugehörige reflectirte Strahl ist eine Asymptote derselben.

> Die Brennlinie B besitzt so viele Asymptoten als es Parabeln giebt, welche die reflectirende Curve C einfach osculiren und den leuchtenden Punkt O zum Brennpunkte besitzen.

3.

Die wirkliche constructive Bestimmung von Punkten der Brennlinie gestaltet sich am einfachsten, wenn man den Krümmungskreis der reflectirenden Curve C in jedem ihrer Punkte zu finden weiss.

Sei in Fig. 2, Taf. VII m ein Punkt der reflectirenden Curve C und K der Krümmungskreis derselben in diesem Punkte. Ist nun O der leuch-

tende Punkt, so wird der Strahl Om in die Lage mn reflectirt, welche man erhält, wenn man den Radius mc des Krümmungskreises zieht und

$$\sphericalangle Omc = \sphericalangle cmn$$

macht. Dieser reflectirte Strahl mn ist nun eine Tangente der Brennlinie und man erhält den Berührungspunkt derselben als den zweiten Brennpunkt des Kegelschnittes S, welcher O zu einem Brennpunkte hat und den Krümmungskreis K im Punkte m osculirt; denn dieser Kegelschnitt osculirt selbstverständlich auch die Curve C im Punkte m. Für ihn ist somit K der Krümmungskreis.

Fällt man vom Mittelpunkte c des Krümmungskreises K auf den Strahl Om das Perpendikel ca und von dessen Fusspunkte a auf die Curvennormale mc das Perpendikel ab, dessen Fusspunkt b ist, so liefert die Verbindungslinie von O und b die Axe A des besagten Kegelschnittes S und schneidet den reflectirten Strahl mn in dessen Berührungspunkte p mit der Brennlinie. In dieser Art kann man nach und nach beliebig viele Punkte der Brennlinie construiren.

4.

Ich erlaube mir in diesem Artikel eine auf harmonische Strahlenbüschel gestützte Betrachtung derselben Sache vorzunehmen, welche, wie ich hiernach zeigen werde, auf dieselbe Construction führt, wie die in Art. 3 ist.

Zu dem Ende betrachten wir zwei unmittelbar aufeinanderfolgende unendlich nahe Punkte m und m' der reflectirenden Curve C; T und T' seien die Tangenten und N und N' die Normalen der beiden Punkte (Fig. 3).

Befindet sich nun in O die Lichtquelle, so werden die zwei von O ausgehenden und in m und m' auffallenden Strahlen Om und Om' nach mn und $m'n'$ resp. reflectirt; ihr Durchschnitt p nach der Reflexion ist ein Punkt der Brennlinie B.

In der Figur befinden sich nun zwei harmonische Strahlenbüschel mit den Scheiteln m und m'. Erstlich am Scheitel m das Büschel mO, mn, T, N; und zweitens am Scheitel m' das Büschel $m'O$, $m'n'$, T', N'. Diese zwei Strahlenbüschel haben also gleiches Doppelverhältniss und schneiden sich daher in vier Punkten eines Kegelschnittes, welcher auch durch die beiden Büschelscheitel m und m' hindurchgeht. Es liegen demnach folgende sechs Punkte in einem und demselben Kegelschnitte: 1) m; 2) m'; 3) der Schnittpunkt q der beiden Tangenten T und T'; 4) der Krümmungsmittelpunkt c der reflectirenden Curve C als Durchschnitt der beiden unendlich nahen Normalen N und N'; 5) die Lichtquelle O und 6) der Punkt p der Brennlinie. Diesen durch die sechs Punkte m, m', q, c, O, p gehenden Kegelschnitt wollen wir mit s benennen, und es ist klar, dass wenn wir fünf Punkte von ihm kennen, wir immer die anderen zu construiren im Stande sind. Da der Kegelschnitt s durch zwei unendlich nahe Punkte (m, m') der

Curve C geht, so wird er diese Curve berühren. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass er an der Berührungsstelle eine doppelt so grosse Krümmung besitzt als die Curve C.

Der Beweis ist sehr einfach. Wir haben vom Kegelschnitte s an der Berührungsstelle die drei Punkte m, m' und q. Der durch diese drei Punkte gehende Kreis ist der Krümmungskreis des Kegelschnittes s. Man findet seinen Mittelpunkt c' dadurch, dass man in den Halbirungspunkten der Elemente mq, $m'q$ auf diese Elemente Perpendikel errichtet oder, was dasselbe ist, zu den beiden Normalen N, N' Parallele zieht. Aus dieser Construction fliesst jedoch unmittelbar, dass $qc' = \frac{1}{2} . qc$ ist. Nun ist qc' der Krümmungsradius des Kegelschnittes s und qc bis auf eine unendlich kleine Grösse jener der Curve B. Der erstere ist halb so gross als der letztere, und somit ist die Krümmung des Kegelschnittes s doppelt so gross als jene der reflectirenden Curve C. Will man also den Berührungspunkt eines reflectirten Strahles mn, welcher in m von der Curve C reflectirt wurde, construiren, so erhält man ihn als Schnittpunkt des reflectirten Strahles mit einem Kegelschnitte s, welcher durch die Lichtquelle O, durch den Krümmungsmittelpunkt c des Punktes m geht, welcher die Curve C in m berührt und daselbst eine doppelt so grosse Krümmung besitzt als diese Curve selbst.

Durch diese Daten ist der Kegelschnitt s vollkommen bestimmt.

Weil das Viereck $(mqm'c)$ ein Kreisviereck ist, so folgt nebenbei, dass die Axen des Kegelschnittes s parallel sind zu den Halbirungslinien des von der Tangente T und der Normale N in m gebildeten Winkels.

Die sich aus der angestellten Betrachtung ergebende Construction des Punktes p ist identisch mit jener in Art. 3, was wir jetzt noch beweisen wollen.

Sei abermals m Fig. 4, Tafel VII, ein Punkt der reflectirenden Curve C, c sei sein Krümmungsmittelpunkt und folglich K der Krümmungskreis der Curve C im Punkte m. O stelle die Lichtquelle vor. Der Strahl Om wird nach mn reflectirt, so dass $\sphericalangle\, Omc = \sphericalangle\, cmn$ ist. Beschreibt man über dem Radius cm als Durchmesser einen Kreis k, so ist dieser nach Bewiesenem der Krümmungskreis des Kegelschnittes s. Von diesem Kegelschnitte wissen wir, dass er durch O, c und m geht und in m den Kreis k zum Krümmungskreise besitzt. Dadurch ist er vollkommen bestimmt. Sein Schnittpunkt mit dem reflectirten Strahle mn ist der Berührungspunkt des letzteren mit der Brennlinie. Diesen Schnittpunkt p kann man leicht dadurch bestimmen, dass man den Kegelschnitt s als Collinearverwandte des Kreises k betrachtet.

Dabei spielt der Punkt m die Rolle des Collineationscentrums und die Gerade mc die Rolle der Collineationsaxe. Dem Punkte O von s entspricht perspectivisch der Punkt a von k, in welchem k vom Projectionsstrahle mO geschnitten wird. Dem Schnitte p' von mn mit k wird auf s der gesuchte Punkt p entsprechen. Es entspricht also der Linie ap' die Linie Op, welche

wir leicht finden, wenn wir O mit dem Schnitte b von ap' und der Collineationsaxe mc verbinden. Die erhaltene Verbindungslinie trifft den reflectirten Strahl im Punkte p.

Vergleicht man die Fig. 3 mit der Fig. 4 (Tafel VII), so erkennt man unmittelbar, dass beide im Wesentlichen identisch seien. Nur ist in Fig. 3 der Kreis k und in Fig. 4 die Linie ca nicht gezogen.

5.

Die Punkte O und p, welche dem Kegelschnitte s angehören, sind nach Art. 3 die Brennpunkte jenes Kegelschnittes S, welcher C in m einfach osculirt. Da nun C und S in m dieselbe Krümmung besitzen, so hat s in m eine doppelt so grosse Krümmung als S. Dies giebt folgenden Satz:

Legt man durch die Brennpunkte eines Kegelschnittes S so einen zweiten Kegelschnitt s, dass er den ersten in einem Punkte m berührt und überdies durch das Krümmungscentrum c des Punktes m hindurchgeht, so besitzt er im Berührungspunkte m eine doppelt so grosse Krümmung, als der Kegelschnitt S.

6.

Der in Art. 2 ausgesprochene Satz liefert die Grundlage zu einer merkwürdigen Beziehung zwischen der Brennlinie einer Curve und der Evolute der Fusspunktcurve derselben Curve.

Das in dem erwähnten Satze Ausgesprochene besteht wesentlich in Folgendem:

Liegt eine reflectirende Curve C und eine Lichtquelle O vor und man construirt einen Kegelschnitt S, welcher O zu einem Brennpunkte hat und die Curve C in einem Punkte m einfach osculirt, so ist sein zweiter Brennpunkt p ein Punkt der Brennlinie B.

Nun habe ich in der am 21. Januar dieses Jahres in der kaiserlichen Akademie zu Wien vorgelegten Arbeit: „Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven" gezeigt, dass der Mittelpunkt M desselben Kegelschnittes S der Krümmungsmittelpunkt der Fusspunktcurve F von C in Bezug auf O als Pol ist. Fällt man nämlich von O auf die Tangente der Curve C im Punkte m ein Perpendikel, so ist dessen Fusspunkt P ein Punkt der Fusspunktlinie F, und M ist dann das zugehörige Krümmungscentrum. (Siehe Fig. 1, Taf. VII.)

Weil O und p die Brennpunkte eines Kegelschnittes S sind, dessen Mittelpunkt M ist, so liegen erstlich die drei Punkte O, M, p in einer und derselben Geraden und zweitens ist M der Mittelpunkt der Strecke Op.

Wir gelangen daher zu folgendem merkwürdigen Satze:

Construirt man die Evolute E der Fusspunktlinie F einer gegebenen Curve C bezüglich des Punktes O

als Pol und verlängert man die von O aus nach den Punkten der Evolute gehenden Radienvectoren um ihre eigene Länge, so erhält man Punkte der Brennlinie B der Curve C für O als Lichtquelle.

Oder in anderer Fassung:

Die Evolute der Fusspunktcurve und die Brennlinie einer gegebenen Curve bezüglich eines und desselben Punktes als Pol und Lichtquelle sind zwei ähnliche und ähnlich gelegene Curven bezüglich dieses Punktes als Aehnlichkeitscentrum, und zwar ist das Aehnlichkeitsverhältniss gleich 1 zu 2.

Daraus geht hervor, dass:

die Evoluten der Fusspunktcurven und die Brennlinien ihrer Natur nach identisch seien;

denn die Einen sind ja nur Verjüngungen der Anderen.

XVIII.

Tautochronische Curven bei Reibungswiderstand.

Von

R. Hoppe.

Die Curve, auf welcher sich ein Punkt unter dem Einfluss gegebener Kräfte ohne Anfangsgeschwindigkeit in constanter Zeit $\frac{1}{2}T$ nach einem festen Endpunkte hin bewegt, ist, wofern ein Potential $(-v)$ existirt, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$v = \frac{\pi^2}{T^2} s^2,$$

wo s den vom Endpunkt an gerechneten Bogen bezeichnet. Im Endpunkt muss die Kraft stets normal zur Bahn sein. Ist eine Fläche gegeben, auf der der Punkt sich bewegen soll, so tritt deren Gleichung einfach zur Bestimmung der Curve hinzu. Es ist daher völlig ausreichend, nur ebene Bewegung in Betracht zu ziehen. Dieselbe Curve, welche die Curve der constanten Fallzeit heissen kann, der Gleichung gemäss über $s = 0$ hinaus verlängert, entspricht auch einer constanten Steigzeit und Oscillationsdauer, und zwar kann man die Oscillation von jedem Punkte an rechnen. In den zwei ersten Beziehungen ist sie durch den Tautochronismus bestimmt; die Oscillationsdauer hingegen lässt einen Arm der Curve willkürlich und macht nur den zweiten davon abhängig.

Giebt es kein Potential, so genügt nicht mehr dieselbe Curve in allen jenen Beziehungen; vielmehr ist die Aufgabe jedesmal eine andere, wenn die Bewegung anders begrenzt wird.

Als ein Beispiel soll hier der Fall betrachtet werden, wo ausser einer Kraft, die ein Potential $(-v)$ hat, ein dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand wirksam ist. Hier bleiben folgende Umstände in unveränderter Geltung:

1. In einem festen Endpunkte für einseitige Bewegung muss die Kraft zur Bahn normal sein.

2. Die Curven der constanten Fall- und Steigzeit sind durch diese ihre Eigenschaft bestimmt.

3. Deren Gleichungen lassen sich in geschlossener Form darstellen.

4. Die Relation zwischen v und s wird durch keine hinzutretende Zwangsgleichung alterirt.

Dagegen treten folgende Eigenthümlichkeiten ein:

1. Betrachtet man ausser den zwei genannten die Curven für constante Oscillationsdauer, einmal mit Begrenzung durch die Umkehrpunkte, das anderemal durch den Indifferenzpunkt der äusseren Kraft, und bezeichnet μ den Widerstandscoefficienten, so ist in allen vier Fällen

$$2v = \frac{\pi^2}{T^2} s^2 \{1 + a_1 \mu s + a_2 (\mu s)^2 + \ldots\},$$

wo die Coefficienten für jeden derselben andere, in sämmtlichen rein numerische, in den drei ersten rationale, im letzten mit steigenden Potenzen von $\frac{1}{\pi}$ behaftete Werthe haben, und in den zwei letzten die ungeradstelligen Null sind.

2. Der Tautochronismus der Oscillation bestimmt die Curve vollständig, während die constante Dauer der einseitigen Bewegung die Hälfte der Coefficienten unbestimmt lässt.

Setzt man

$$1) \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\pi^2}{T^2} s \varphi(\mu s),$$

so lautet die Differentialgleichung der Bewegung längs der festen Bahn s:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\pi^2}{T^2} s \varphi(\mu s) \mp \mu \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2,$$

wo das obere Zeichen für wachsendes, das untere für abnehmendes s gilt. Sei

$$2) \qquad f'(q) = 2 e^{\pm 2q} q \varphi(q),$$

dann giebt die erste Integration:

$$\mu^2 \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{\pi^2}{T^2} e^{\mp 2\mu s} \{f(\mu b) - f(\mu s)\},$$

wenn die Geschwindigkeit bei $s = b$ Null wird. Nach zweiter Integration erhält man:

$$\frac{t}{T} = \frac{1}{\pi} \int \frac{e^{\pm \mu s} \mu \partial s}{\sqrt{f(\mu b) - f(\mu s)}}.$$

In den zwei ersten Fällen ist nun die Bewegung begrenzt durch $s = 0$ und $s = b$; das obere Zeichen entspricht dem Steigen von 0 bis b, das untere dem Fallen von b bis 0; jedesmal wird $t = \frac{1}{2} T$, also

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^b \frac{e^{\pm \mu r} \mu \partial r}{\sqrt{f(\mu b) - f(\mu r)}}.$$

Dieser Bedingung genügt nun der Werth

$$f(q)=(e^{\pm q}-1)^2,$$

denn hieraus erhält man:

$$e^{\pm\mu r}\mu\partial r=\pm\partial\sqrt{f(\mu r)}.$$

Nach Gleichung 2) ist dann

$$\varphi(q)=\frac{1-e^{\mp q}}{\pm q}.$$

Dies in Gleichung 1) eingeführt giebt nach Integration als Gleichungen der zwei Curven für constante Steig- und Fallzeit:

$$\nu=\pi^2\frac{e^{\mp\mu s}-1\pm\mu s}{T^2\mu^2}.$$

Um sie für constante Schwerkraft, wo $\nu=gx$ wird, in rechtwinkligen Coordinaten darzustellen, setze man

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\cos\tau;\quad \frac{\partial y}{\partial s}=\sin\tau;\quad \pm\frac{\mu g T^2}{\pi^2}=\sin\alpha,$$

dann wird

$$\pm\mu\partial s=\frac{\sin\alpha\sin\tau\,\partial\tau}{1-\sin\alpha\cos\tau}$$

und nach Multiplication mit $\cos\tau$ und $\sin\tau$ und Integration findet man:

$$\pm\mu x=\cos\tau+\frac{1}{\sin\alpha}\log(1-\sin\alpha\cos\tau),$$

$$\pm\mu y=\sin\alpha\sin\tau+\tau-2\cos\alpha\,\mathrm{arc}\,tg\left[tg\frac{\tau}{2}tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Es soll ferner die Bewegung, durch die zwei Punkte der Nullgeschwindigkeit $s=-a$ und $s=b$ begrenzt, in constanter Zeit T erfolgen. Dann ist die Bedingung:

$$\pi=\int_{-a}^{b}\frac{e^{\mu r}\mu\partial r}{\sqrt{f(\mu b)-f(\mu r)}}, \tag{3}$$

$$f'(q)=2e^{2q}\varphi(q)q \tag{4}$$

und a und b sind durch die Relation

$$f(-\mu a)=f(\mu b)$$

von einander abhängig. Ihr zufolge ist die Differenz

$$f(\mu b)-f(\mu r)=f(-\mu a)-f(\mu r)$$

divisibel durch $(a+r)(b-r)$ und der Quotient, der durch $\mu^2 R$ bezeichnet sein mag, durchgängig stetig und einer gleichen Entwickelung wie die Function $f(q)$ fähig. Setzt man

$$r=\frac{a+b}{2}\sin\zeta-\frac{a-b}{2},$$

so wird

$$\frac{\partial r}{\sqrt{(a+r)(b-r)}} = \partial \zeta$$

und die Gleichung 3) geht über in

$$5)\qquad \pi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mu r} R^{-\frac{1}{2}} \partial \zeta.$$

Bis zur sechsten Potenz entwickelt sei

$$6)\qquad f(q) = (1 + p_1 q + p_2 q^2 + p_3 q^3 + p_4 q^4)\, q^2.$$

Nimmt man für a gleichfalls eine Reihe nach Potenzen von μb an und entwickelt den Quotienten

$$7)\qquad \mu^2 R = \frac{f(\mu b) - f(\mu r)}{(a+r)(b-r)}$$

nach Potenzen von μ, so ergeben sich zugleich mit den einzelnen Termen von R die Werthe der Coefficienten der Reihe a bedingt durch die Ausführbarkeit der Division, und man findet:

$$a = b\,\{1 + p_1 \mu b + p_1^2 (\mu b)^2 + (p_3 - 2p_1 p_2 + 2p_1^3)(\mu b)^3 + p_1 (3p_3 - 6p_1 p_2 + 4p_1^3)(\mu b)^4\}.$$

Nachdem man die zur Rechten der Gleichung 5) angedeuteten Operationen in der Reihenform vollzogen hat, wobei nur Potenzen von r nach ζ zu integriren sind, müssen, damit die Gleichung unabhängig von b erfüllt wird, die Coefficienten aller Potenzen von μb verschwinden, woraus sich eine gleiche Anzahl recurrirender Gleichungen zur Bestimmung der p ergeben. Hier tritt jedoch der Umstand ein, dass die Coefficienten von μ^{2k} und μ^{2k+1} nur die Elemente $p_1, p_2, \ldots p_{2k}$ enthalten, dass folglich p_{2k+1} unbestimmt bleibt. Es lässt sich nämlich bemerken, dass $p_{2k+1}\mu^{2k+1}$ in R nur mit ungeraden Potenzen von r verbunden ist. Denn im Verlaufe der Division 7) tritt das Element p_{2k+1} zuerst ein bei der $(2k+1)^{\text{ten}}$ Potenz, und das von μ unabhängige Glied des Divisors $b^2 - r^2$ enthält keine ungerade Potenz von r. Ferner erkennt man, dass die Integrale der ungeraden Potenzen von r den Factor μ haben, weil sie für $a = b$ verschwinden. Folglich kommt p_{2k+1} nur in Coefficienten höherer Potenzen von μb vor. Dieser Umstand hat aber zur Folge, dass die ungeradstelligen Coefficienten zur Verfügung bleiben, um einer neuen Bedingung zu genügen. Die Rechnung ergiebt:

$$p_2 = \frac{1}{3} - p_1 + \frac{5}{4} p_1^2,$$

$$p_4 = \frac{2}{45} + \frac{1}{3} p_1 - \frac{8}{3} p_1^2 + \frac{21}{4} p_1^3 - \frac{7}{2} p_1^4 - \left(1 - \frac{7}{2} p_1\right) p_3.$$

Nach Einsetzung dieser Werthe in den Ausdruck (6) von fq findet man zufolge der Gleichung 4) folgende Entwickelung der gesuchten Function:

$$\varphi(q) = 1 + \left(\frac{3}{2}p_1 - 2\right)q + \left(\frac{8}{3} - 5p_1 + \frac{5}{2}p_1^2\right)q^2$$
$$+ \left(\frac{5}{2}p_3 - \frac{8}{3} + 7p_1 - 5p_1^2\right)q^3$$
$$+ \left\{\frac{32}{15} - 5p_1 - 3p_1^2 + \frac{63}{4}p_1^3 - \frac{21}{2}p_1^4 - \left(8 - \frac{21}{2}p_1\right)p_3\right\}q^4.$$

Die Curve für constante Dauer der rückgängigen Bewegung würde man hieraus durch Substitution von $\varphi(-q)$ für $\varphi(q)$ erhalten. Soll also dieselbe Curve nach beiden Seiten hin tautochronisch sein, so darf die Reihe für $\varphi(q)$ keine ungeraden Potenzen von q enthalten. Hieraus folgen die Werthe:

$$p_1 = \frac{4}{3}; \quad p_2 = \frac{11}{9}; \quad p_3 = \frac{8}{9}; \quad p_4 = \frac{158}{405},$$

nach deren Einsetzung man findet:

$$\varphi(q) = 1 + \frac{4}{9}q^2 - \frac{52}{135}q^4.$$

Hiernach hat die Curve der tautochronischen durch die Umkehrpunkte begrenzten Oscillation folgende Gleichung:

$$2v = \frac{\pi^2}{T^2}s^2\left(1 + \frac{2}{9}\mu^2 s^2 - \frac{52}{405}\mu^4 s^4 + \dots\right).$$

Rechnet man statt dessen die Zeit vom Indifferenzpunkt der äusseren Kraft bis zur nächsten Rückkehr in denselben, so kann man jeden Arm der Curve für sich die Bedingung erfüllen lassen, welche lautet:

$$8)\quad \pi = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^b \left\{\frac{e^{\mu r}\partial r}{\sqrt{\int_r^b e^{2\mu q}\varphi(\mu q)\,q\,\partial q}} + \frac{e^{-\mu r}\partial r}{\sqrt{\int_r^b e^{-2\mu q}\varphi(\mu q)\,q\,\partial q}}\right\}.$$

Die Function $\varphi(q)$, die sich, wie ersichtlich, bei Vorzeichenwechsel von q nicht ändert, hat demnach die Form:

$$\varphi(q) = 1 + \varphi_1 q^2 + \varphi_2 q^4 + \dots$$

Die ersten Integrale stellen sich in der Form dar:

$$2\int_r^b e^{\pm 2\mu q}\varphi(\mu q)\,q\,\partial q = (b^2 - r^2)\left\{1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} l_k(\pm\mu)^k r_{k+2}\right\},$$

wo die Grösse

$$r_k = \frac{2}{k}\,\frac{b^k - r^k}{b^2 - r^2}$$

den Werth b^{k-2} nie übersteigt, so dass die $(-\frac{1}{2})^{te}$ Potenz des Integrals sich wieder nach Potenzen von μ entwickeln lässt. Die Bestandtheile des zweiten Integrals sind alsdann von der Form

$$\int_0^b R \frac{\partial r}{\sqrt{b^2 - r^2}},$$

wo R ein Product von Factoren r und r_k ist. Führt man die Integration aus und erfüllt durch $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Gleichung 8) unabhängig von b, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\pi^2}{T^2} s \left\{1 + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)\mu^2 s^2 - \frac{4}{135}\left(13 - \frac{176}{\pi} + \frac{19088}{45\pi^2}\right)\mu^4 s^4 + \ldots\right\}.$$

Dieselbe Gleichung muss auch für den negativen Arm der Curve gelten, und diese entspricht daher der tautochronischen durch den Indifferenzpunkt begrenzten Oscillation.

Zur Darstellung beider Curven in rechtwinkligen Coordinaten sei für den Fall constanter Schwerkraft ihre gemeinsame Form

$$2\varkappa x = s^2(1 + \alpha s^2 + \beta s^4 + \ldots); \quad \varkappa = \frac{g T^2}{\pi^2}$$

zu Grunde gelegt. Durch umgekehrte Entwickelung und Differentiation ergiebt sich daraus:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = \frac{\varkappa}{2x}\left\{1 - 6\alpha\varkappa x + 4(11\alpha^2 - 5\beta)(\varkappa x)^2\right\}.$$

Ist nun $x = h$ der Werth, für welchen $\frac{\partial y}{\partial x}$ verschwindet, so erhält man:

$$h = \frac{\varkappa}{2}\left\{1 - 3\alpha\varkappa^2 + 5(4\alpha^2 - \beta)\varkappa^4 + \ldots\right\},$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{h - x}{x}\left\{1 + 3\alpha\varkappa^2 - (11\alpha^2 - 5\beta)\varkappa^3(2x + \varkappa) + \ldots\right\}.$$

Setzt man

$$x = h \sin^2\vartheta,$$

so findet man:

$$y = h\left\{1 + \frac{3}{2}\alpha\varkappa^2 - \left(8\alpha^2 - \frac{25}{8}\beta\right)\varkappa^4\right\}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta)$$
$$+ \frac{1}{4} h (11\alpha^2 - 5\beta)\varkappa^4 \sin\vartheta \cos^3\vartheta.$$

Sieht man von der vierten und den höheren Potenzen von $\varkappa$ ab, so erweist sich die Curve als eine im Verhältniss $1 : 1 - 3\alpha\varkappa^2$ vertical und im Verhältniss $1 : 1 - \frac{3}{2}\alpha\varkappa^2$ horizontal contrahirte Cykloide, von derjenigen ausgehend, welche der widerstandslosen Bewegung entspricht. Bei Begrenzung im Umkehrpunkte ist $\alpha = 0{,}222222$; bei Begrenzung im Indifferenzpunkte $\alpha = 0{,}033594$; daher im letztern Falle die Abweichung der Curve weit geringer als im erstern.

XIX.

Ueber ein geometrisches Kennzeichen der Art des durch fünf gegebene Tangenten, durch fünf gegebene Punkte u. s. w. bestimmten Kegelschnittes.

Von

Dr. Fr. Grelle,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Hannover.

(Hierzu Tafel VII, Fig. 5.)

Sind:

1) $$a=0, \quad b=0, \quad c=0$$

die Gleichungen der Eckpunkte eines Coordinatendreiecks in der Normalform, so ist bekanntlich die Gleichung zwischen den Dreieckcoordinaten der Tangenten eines dem Coordinatendreieck einbeschriebenen Kegelschnittes:

2) $$ab+Pac+Qbc=0,$$

wo P und Q beliebige Constante bedeuten. Soll der Kegelschnitt noch eine vierte Gerade, welche irgend einen Punkt a_1 der Seite ab des Coordinatendreiecks mit irgend einem Punkte b_1 der Seite bc desselben Dreiecks verbindet, berühren, so muss, wenn die Gleichungen der Punkte a_1 und b_1:

3) $$\begin{cases} a_1 \equiv A_0 a + B_0 b = 0, \\ b_1 \equiv B_1 b + C_1 c = 0 \end{cases}$$

sind, zwischen den Constanten P und Q die Bedingung:

4) $$B_0 C_1 - P B_0 B_1 + Q A_0 B_1 = 0$$

stattfinden, durch deren Einführung in 3) sich als Gleichung eines dem Viereck $a a_1 b_1 c$ einbeschriebenen Kegelschnittes ergiebt:

5) $$B_1 ab + (C_1 + k A_0)\, ac + k B_0\, bc \equiv a b_1 + k a_1 c = 0,$$

wenn der Kürze halber:

$$Q \frac{B_1}{B_0} = k$$

gesetzt wird. Aus 5) erhält man leicht als Gleichungen der vier Berührungspunkte: t_1 in der $b_1 c$, t_2 in der ca, t_3 in der $a a_1$, t_4 in der $a_1 b_1$:

6) $t_1 \equiv B_1 b + (C_1 + k A_0) c \equiv b_1 + k A_0 c = 0,$

7) $t_2 \equiv B_1 a + k B_0 c = 0,$

8) $t_3 \equiv (C_1 + k A_0) a + k B_0 b \equiv C_1 a + k a_1 = 0,$

9) $t_4 \equiv C_1 B_0 b_1 + k A_0 B_1 a_1 = 0$

und hieraus als Gleichung des Mittelpunktes m des Kegelschnittes:

10) $$m \equiv b'_1 + a + k \frac{A_0 + B_0}{B_1 + C_1} (a'_1 + c) = 0,$$

wenn $a'_1 = 0$ und $b'_1 = 0$ die Gleichungen der Punkte a' und b' in der Normalform bedeuten, während wegen 3) die Gleichungen der Pole $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ der drei Diagonalen des vervollständigten Vierecks $a c b_1 a_1$ unter der Form erscheinen:

11) $\varDelta_1 \equiv A_0 B_1 a - B_0 B_1 b - B_0 C_1 c \equiv A_0 B_1 a - B_0 b_1 = 0,$

12) $\varDelta_2 \equiv A_0 B_1 a + B_0 B_1 b - B_0 C_1 c \equiv B_1 a_1 - B_0 C_1 c = 0,$

13) $\varDelta_3 \equiv A_0 B_1 a + B_0 B_1 b + B_0 B_1 c \equiv B_1 a_1 + B_0 C_1 c \equiv A_0 B_1 a + B_0 b_1 = 0.$

Aus den Gleichungen 6) bis 9) und 11) bis 13) ergiebt sich sofort:

14) $C_1 \varDelta_1 \equiv A_0 B_1 t_3 - t_4 \equiv A_0 C_1 t_2 - B_0 C_1 t_1,$

15) $k A_0 \varDelta_2 \equiv - B_0 C_1 t_1 + t_4 \equiv - A_0 C_1 t_2 + A_0 B_1 t_3,$

16) $(C_1 + k A_0) \varDelta_3 \equiv B_0 C_1 t_1 + A_0 B_1 t_3 \equiv A_0 C_1 t_2 + t_4,$

womit bewiesen ist, dass die Verbindungsgeraden je zweier der vier Berührungspunkte sich in dem einen, oder dem zweiten oder dem dritten der Pole schneiden müssen: $t_1 t_2$ und $t_3 t_4$ in $\varDelta_1$, $t_1 t_4$ und $t_2 t_3$ in $\varDelta_2$, $t_1 t_3$ und $t_2 t_4$ in $\varDelta_3$. Aus der Lage eines der vier Berührungspunkte folgt also die der drei anderen von selbst.

Dass 5) noch eine willkürliche Constante — k — enthält, beweiset die bekannten Sätze: Es giebt unendlich viele Kegelschnitte, welche gleichzeitig vier gegebene Gerade berühren; ein Kegelschnitt ist im Allgemeinen durch fünf gegebene Tangenten bestimmt.

Um die Kegelschnitte des ersten dieser Sätze, deren Mittelpunkte wegen 10) auf der Geraden liegen, welche die Halbirungspunkte der Diagonalen $\overline{ab_1}$ und $\overline{ca_1}$ verbindet, zu individualisiren, muss man k das Intervall von $\pm \infty$ bis $\mp \infty$, oder einen der Berührungspunkte, etwa t_2, seine nach beiden Richtungen hin ins Unendliche verlängerte Tangente ac durchlaufen, oder auch etwa die Gerade $\varDelta_2 t_2 t_3$ eine vollständige Umdrehung um den Punkt $\varDelta_2$ beschreiben lassen und dabei die Vorzeichen bez. das Verschwinden der Ausdrücke:

$$\Sigma = B_1 + C_1 + k (A_0 + B_0),$$
$$\Sigma_1 = - B_0 B_1 k (C_1 + k A_0)$$

(siehe Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 1. Auflage, Seite 343—345) ins Auge fassen.

Für $k = \infty$ löset sich Gleichung 5) auf in: $a_1 = 0$, $c = 0$; die Punkte t_1 und t_2 fallen auf c, die Punkte t_3 und t_4 auf a_1; m fällt mit dem Halbi-

rungspunkte der ca_1 zusammen; der Kegelschnitt reducirt sich auf die Gerade $\overline{ca_1}$.

Für alle Lagen des Punktes t_2 zwischen c und a, des Punktes t_3 zwischen a_1 und a muss wegen 7) und 8):

$$\frac{kB_0}{B_1} > 0, \quad \frac{kB_0}{C_1 + kA_0} > 0$$

sein, müssen also:

$$B_1, \quad kB_0, \quad C_1 + kA_0$$

gleichzeitig dasselbe Vorzeichen haben. Je nachdem diese drei Ausdrücke $\gtrless 0$ sind, ist $\Sigma \gtrless 0$, $\Sigma_1 \lessgtr 0$. Es haben also für alle Kegelschnitte dieser Art Σ und Σ_1 entgegengesetzte Zeichen; die berührenden Curven sind demnach Ellipsen.

Für $k = 0$ wird aus 5): $a = 0$, $b_1 = 0$; t_1 und t_4 fallen auf b_1, t_2 und t_3 auf a; m fällt mit dem Halbirungspunkt der ab_1 zusammen; der Kegelschnitt reducirt sich auf die Gerade ab_1.

Für $k = 0$ verschwindet auch Σ_1, und da $\Sigma_1 = 0$ nur einmal die Wurzel $k = 0$ hat, so muss Σ_1 jetzt das Zeichen wechseln, während Σ das frühere Zeichen bis zu der Lage des Berührungspunktes t_2, welche dem Werthe

$$k = -\frac{B_1 + C_1}{A_0 + B_0} \tag{17}$$

entspricht, beibehält. Bis hierhin sind die berührenden Curven demnach Hyperbeln.

Für

$$k = -\frac{B_1 + C_1}{A_0 + B_0}$$

verschwindet Σ, ist der fragliche Kegelschnitt also eine Parabel, was auch aus 10) deshalb folgt, weil diese Gleichung für jenen Werth des k einen Punkt im Unendlichen repräsentirt.

Beim Durchgang des k durch den Werth 17) wechselt Σ das Zeichen: die berührenden Curven sind also Ellipsen, bis Σ_1 zum zweiten und letzten Male verschwindet für:

$$k = -\frac{C_1}{A_0}. \tag{18}$$

Für diesen Werth löst sich 5) auf in $b = 0$ und $A_0 B_1 a - B_0 C_1 c = 0$ — die Gleichung des Punktes d —; t_1 und t_3 fallen mit b, t_2 und t_4 mit d zusammen und m wird der Halbirungspunkt der $\overline{db}$; der Kegelschnitt reducirt sich also wieder auf eine Gerade, die $\overline{db}$.

Jetzt wechselt endlich Σ_1 zum letzten Male sein Zeichen, während das von Σ — ein nach k linearer Ausdruck — unverändert bleibt. Für alle Lagen des Punktes t_2 zwischen d und a sind demnach die berührenden Kegelschnitte Hyperbeln, womit der Cyklus geschlossen ist.

Wegen 7) und 17) ist die Gleichung des Punktes p, worin die durch die vier gegebenen Tangenten ac, cb_1, b_1a_1, a_1a bestimmte Parabel die ac berührt:

$$a - \frac{B_0}{B_1}\frac{B_1+C_1}{A_0+B_0}c = 0,$$

woraus die Proportion:

$$\frac{\overline{ap}}{\overline{cp}} = \frac{B_0}{B_1}\frac{B_1+C_1}{A_0+B_0}$$

also auch:

$$\text{19)} \qquad \frac{\overline{ac}}{\overline{cp}} = \frac{B_0C_1 - A_0B_1}{B_1(A_0+B_0)}$$

folgt. Ferner giebt die Gleichung:

$$a - \frac{B_0C_1}{A_0B_1}c = 0$$

des Punktes d:

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{cd}} = \frac{B_0C_1}{A_0B_1},$$

also auch:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{cd}} = \frac{B_0C_1 - A_0B_1}{A_0B_1},$$

woraus man endlich in Verbindung mit 19) und in Rücksicht auf die erste der Gleichungen 3) die Proportion:

$$\frac{\overline{dp}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{aa_1}}{\overline{a_1b}}$$

erhält, welche eine einfache Art der Construction des Punktes p zeigt.

Es seien nun die fünf Tangenten ac, cb_1, b_1a_1, a_1a und ef gegeben, welche entweder eine Ellipse oder eine Hyperbel bestimmen und dann nur eine Parabel, wenn die durch irgend vier dieser Tangenten bestimmte Parabel auch die fünfte Tangente berührt. Um zu erkennen, welcher dieser drei Fälle im Gegebenen eintritt, construire man zuerst den Punkt p und darauf die fünf Punkte, worin der fragliche Kegelschnitt die gegebenen Tangenten berührt. Dieses geschieht am einfachsten in Rücksicht auf die Relationen 15) und 16). Da nämlich einerseits die Verbindungsgerade der Berührungspunkte in der ac und aa_1 durch Δ_2 gehen muss (wegen 15), indem acb_1a_1 ein umschriebenes Viereck bildet, und andererseits durch g (wegen 16), den Schnittpunkt der Diagonalen des ebenfalls umschriebenen Vierecks $cbfe$, so ist $\Delta_2 g$ die Verbindungsgerade selbst. Diese schneidet die ac und aa_1 in den betreffenden Berührungspunkten, nach deren Festlegung es sehr leicht ist, auch die drei übrigen Berührungspunkte zu bestimmen. Aus der Lage des Berührungspunktes der ac erkennt man nach vorhergehenden Ausführungen sofort die Art des Kegelschnittes.

Sind statt der Tangenten fünf Punkte gegeben, so construire man mit Hilfe des Pascal'schen Sechsecks zunächst einen sechsten Punkt und darauf unter Benutzung der bekannten Sätze über Pol und Polare die Tangenten, welche in jenen sechs Punkten den fraglichen Kegelschnitt berühren. Die gegenseitige Lage von irgend vier dieser Tangenten und ihrer Berührungspunkte giebt alsdann wieder wie vorhin den gewünschten Aufschluss darüber, ob die gegebenen fünf Punkte eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel bestimmen.

XX.

Die cyklischen Flächen.

Von

Dr. A. Enneper.

§ 1.

Ein Kreis im Raume kann als der Durchschnitt einer Ebene mit einer Kugelfläche angesehen werden, so dass der Kreis und die Kugelfläche denselben Mittelpunkt haben. Bezeichnet man durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Mittelpunktes und durch R den Radius der Kugelfläche, sind ferner l, m, n die Winkel, welche die Normale zur Ebene des Kreises mit den Coordinatenaxen bildet, so sind:

1) $$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$

2) $$(x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n=0$$

die allgemeinen Gleichungen eines Kreises im Raume. Zwischen den Cosinus der Winkel l, m, n findet die Relation statt:

3) $$\cos^2 l+\cos^2 m+\cos^2 n=1.$$

Die Gleichungen 1) und 2) enthalten, in Verbindung mit der Gleichung 3), sechs beliebige Parameter, welche sich immer so bestimmen lassen, dass der Kreis gewisse Bedingungen zu erfüllen hat. Soll der Kreis z. B. mit einer Curve doppelter Krümmung, bestimmt durch die Gleichungen:

4) $$F(x,y,z)=0,\quad F_1(x,y,z)=0,$$

einen Punkt gemein haben, so giebt die Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen 1), 2) und 4) ein Resultat von der Form:

5) $$\Phi(\xi,\eta,\zeta,R,\cos l,\cos m,\cos n)=0.$$

Durch sechs Gleichungen, wie die vorstehende und die Gleichung 3) sind die Parameter der Gleichungen 1) und 2) vollständig bestimmt; man kann also im Allgemeinen einen Kreis bestimmen, welcher sechs gegebene Curven schneidet. Nimmt man fünf Gleichungen von der Art wie 5) an, so giebt die Elimination von ξ, η, ζ, R, $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ zwischen diesen fünf Gleichungen und den Gleichungen 1), 2), 3) eine Relation zwischen x, y, z, d. h. die Gleichung einer Fläche, welche der Kreis erzeugt. Die fünf Be-

dingungsgleichungen und die Gleichung 3) gestatten in diesem Falle je sechs der Parameter ξ, η, ζ, R, $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ als Functionen des siebenten anzusehen, oder besser, man kann die sämmtlichen Parameter als Functionen einer Variabeln u nehmen, so dass die Elimination von u zwischen den Gleichungen 1) und 2) die allgemeinste Gleichung einer Fläche giebt, welche durch einen Kreis erzeugt werden kann. Der Einfachheit halber möge eine solche Fläche cyklische Fläche und der erzeugende Kreis derselben Generatrix heissen.

Ein sehr einfaches Beispiel einer cyklischen Fläche ist die Fläche, gebildet aus den Krümmungskreisen der Normalschnitte in einem Punkte einer beliebigen Fläche. Im Punkte (x_0, y_0, z_0) einer Fläche seien r', r'' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser, ferner L, M, N die Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bildet. Die Winkel, welche die Tangenten zu den Hauptschnitten mit den Coordinatenaxen bilden, deren Krümmungsradien r' und r'' sind, seien respective L', M', N' und L'', M'', N''. Die Ebene eines beliebigen Normalschnittes im Punkte (x_0, y_0, z_0) schneidet die berührende Ebene in einer Geraden, welche den Winkel u bilden möge mit der Tangente des Hauptschnittes, dessen Krümmungshalbmesser r' ist. Sind l, m, n die Winkel, welche die Normale des bemerkten Normalschnittes mit den Coordinatenaxen bildet, so hat man für die Cosinus derselben folgende Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} \cos l = \cos L'' \,.\, \cos u - \cos L' \,.\, \sin u, \\ \cos m = \cos M'' \,.\, \cos u - \cos M' \,.\, \sin u, \\ \cos n = \cos N'' \,.\, \cos u - \cos N' \,.\, \sin u. \end{cases}$$

Die Coordinaten ξ, η, ζ des Mittelpunktes und der Radius R des Krümmungskreises des obigen Normalschnittes sind, nach einem bekannten Theoreme Euler's, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$7)\quad \xi = x_0 + R\cos L,\quad \eta = y_0 + R\cos M,\quad \zeta = z_0 + R\cos N,$$

$$8)\quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 u}{r'} + \frac{\sin^2 u}{r''}.$$

Mittelst der Gleichungen 6) und 7) ergeben sich für den Krümmungskreis folgende Gleichungen:

$$9)\quad \begin{cases} (x - x_0 - R\cos L)^2 + (y - y_0 - R\cos M)^2 + (z - z_0 - R\cos N)^2 = R^2, \\ [(x - x_0)\cos L'' + (y - y_0)\cos M'' + (z - z_0)\cos N''] \cos u \\ = [(x - x_0)\cos L' + (y - y_0)\cos M' + (z - z_0)\cos N'] \sin u. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung setze man:

$$10)\quad \begin{cases} (x - x_0)\cos L' + (y - y_0)\cos M' + (z - z_0)\cos N' = X, \\ (x - x_0)\cos L'' + (y - y_0)\cos M'' + (z - z_0)\cos N'' = Y, \\ (x - x_0)\cos L + (y - y_0)\cos M + (z - z_0)\cos N = Z, \end{cases}$$

also

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Substituirt man für R seinen Werth aus 8), so gehen die Gleichungen 9) mittelst 10) über in:

$$(X^2+Y^2+Z^2)\left(\frac{\cos^2 u}{r'}+\frac{\sin^2 u}{r''}\right)=2Z,\quad Y\cos u=X\sin u.$$

Die Elimination von u zwischen diesen Gleichungen giebt:

$$11)\qquad (X^2+Y^2+Z^2)\left(\frac{X^2}{r'}+\frac{Y^2}{r''}\right)=2Z(X^2+Y^2).$$

Aus den Gleichungen 10) folgt, dass X, Y, Z als die orthogonalen Coordinaten eines Punktes angesehen werden können, wenn man den Punkt (x_0, y_0, z_0) zum Anfangspunkt der Coordinaten, ferner die Normale und die Tangenten zu den Hauptschnitten zu Coordinatenaxen nimmt. Im Punkte (x_0, y_0, z_0) hat die cyklische Fläche 11) mit der gegebenen Fläche dieselbe Normale, alle ebenen Schnitte, welche durch diese Normale gehen, haben für beide Flächen im Punkte (x_0, y_0, z_0) dieselben Krümmungshalbmesser, weshalb es nicht ungeeignet scheint, die cyklische Fläche, bestimmt durch die Gleichung 11), als die osculatorische Fläche einer gegebenen Fläche im Punkte (x_0, y_0, z_0) anzusehen. Die Gleichung 11) folgt auch durch Elimination von ψ zwischen den Gleichungen:

$$X^2+Y^2=Z^2\cot^2\psi,\quad \frac{X^2}{r''}+\frac{Y^2}{r'}=2Z\cdot\cos^2\psi.$$

Hieraus folgt, dass die osculatorische Fläche der Ort der Schnittcurven einer Reihe von Kreiskegeln mit Paraboloiden ist. Für einen Umbilic ist $r'=r''$, in diesem Falle geht die Gleichung 11) in die einer Kugelfläche über. Setzt man in der Gleichung 11) $2X$, $2Y$, $2Z$ statt X, Y, Z, so ergiebt sich die Gleichung einer Fläche, auf welcher die Mittelpunkte der osculatorischen Kreise aller möglichen ebenen Schnitte liegen, welche durch den Punkt (x_0, y_0, z_0) einer Fläche gehen.

Bewegt sich der Mittelpunkt der Generatrix einer cyklischen Fläche auf der Geraden:

$$\frac{x-x_0}{\cos l_0}=\frac{y-y_0}{\cos m_0}=\frac{z-z_0}{\cos n_0},$$

so hat man die Gleichungen:

$$12)\qquad \xi=x_0+t\cos l_0,\quad \eta=y_0+t\cos m_0,\quad \zeta=z_0+t\cos n_0,$$

wo t eine Unbestimmte bedeutet. Setzt man zur Abkürzung:

$$13)\qquad \cos\delta=\cos l\cos l_0+\cos m\cos m_0+\cos n\cos n_0,$$

so gehen die Gleichungen 1) und 2) nach einigen einfachen Reductionen über in:

$$14)\qquad \left\{\begin{array}{c} (x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n=t\cos\delta,\\ [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\cos^2\delta\\ +[(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n]^2\\ -2[(x-x_0)\cos l_0+(y-y_0)\cos m_0+(z-z_0)\cos n_0]+\\ [(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n]\cos\delta\\ =(R\cos\delta)^2. \end{array}\right.$$

Nimmt man in den Gleichungen 14) l, m, n constant und unterwirft die Generatrix der Bedingung, eine gegebene Curve zu schneiden, so ergiebt sich zwischen $t\cos\delta$ und $R\cos\delta$ eine Relation. Die Gleichung der resultirenden Fläche ist dann:

$$\begin{aligned}
&-2\left[(x-x_0)\cos l_0+(y-y_0)\cos m_0+(z-z_0)\cos n_0\right]\\
&\qquad\left[(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n\right]\cos\delta\\
&+\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]\cos^2\delta\\
&=F\left[(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n\right].
\end{aligned}$$

Bezeichnet man diese Gleichung einfach durch $f=0$, so ist

$$15)\quad \begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \cos l & \cos m & \cos n\\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix}(\cos l\cos l_0+\cos m\cos m_0+\cos n\cos n_0)\\
=&\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \cos l & \cos m & \cos n\\ \cos l_0 & \cos m_0 & \cos n_0 \end{vmatrix}\left[(x-x_0)\cos l+(y-y_0)\cos m+(z-z_0)\cos n\right]
\end{aligned}$$

die partielle Differentialgleichung der cyklischen Flächen, für welche die Ebene der Generatrix einer festen Ebene parallel bleibt, wänrend ihr Mittelpunkt eine Gerade durchläuft. Die Gleichung 15) lässt sich leicht auf die Flächen zweiten Grades anwenden.

§ 2.

Die Winkel:

$$\begin{gathered} l,\ m,\ n;\\ l',\ m',\ n';\\ l'',\ m'',\ n''; \end{gathered}$$

seien zu drei, gegenseitig orthogonalen Richtungen gehörig, so dass zwischen den Cosinus derselben die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^2 l+\cos^2 m+\cos^2 n&=1,\\ \cos^2 l'+\cos^2 m'+\cos^2 n'&=1,\\ \cos^2 l''+\cos^2 m''+\cos^2 n''&=1, \end{aligned}\right.$$

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} \cos l'\cos l''+\cos m'\cos m''+\cos n'\cos n''&=0,\\ \cos l\cos l''+\cos m\cos m''+\cos n\cos n''&=0,\\ \cos l\cos l'+\cos m\cos m'+\cos n\cos n'&=0. \end{aligned}\right.$$

Die Winkel l, m, n seien Functionen einer Variabeln u; zur Abkürzung werde gesetzt:

$$3)\quad p=\sqrt{\left[\left(\frac{\partial\cos l}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos m}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos n}{\partial u}\right)^2\right]},$$

$$4)\quad q=\frac{1}{p^2}\cdot\begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n\\ \frac{\partial\cos l}{\partial u} & \frac{\partial\cos m}{\partial u} & \frac{\partial\cos n}{\partial u}\\ \frac{\partial^2\cos l}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\cos m}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\cos n}{\partial u^2} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung $\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1$ nach u differentiirt giebt:

$$\cos l \frac{\partial \cos l}{\partial u} + \cos m \frac{\partial \cos m}{\partial u} + \cos n \frac{\partial \cos n}{\partial u} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) bis 3) kann man setzen:

$$5) \qquad \frac{\partial \cos l}{\partial u} = p \cos l', \quad \frac{\partial \cos m}{\partial u} = p \cos m', \quad \frac{\partial \cos n}{\partial u} = p \cos n'.$$

$$6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos n \frac{\partial \cos m}{\partial u} - \cos m \frac{\partial \cos n}{\partial u} &= p \cos l'', \\ \cos l \frac{\partial \cos n}{\partial u} - \cos n \frac{\partial \cos l}{\partial u} &= p \cos m'', \\ \cos m \frac{\partial \cos l}{\partial u} - \cos l \frac{\partial \cos m}{\partial u} &= p \cos n''. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen 6) nach u differentiirt geben:

$$\cos n \frac{\partial^2 \cos m}{\partial u^2} - \cos m \frac{\partial^2 \cos n}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos l'' + p \frac{\partial \cos l''}{\partial u},$$

$$\cos l \frac{\partial^2 \cos n}{\partial u^2} - \cos n \frac{\partial^2 \cos l}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos m'' + p \frac{\partial \cos m''}{\partial u},$$

$$\cos m \frac{\partial^2 \cos l}{\partial u^2} - \cos l \frac{\partial^2 \cos m}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos n'' + p \frac{\partial \cos n''}{\partial u}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den Gleichungen 5), bildet die Summe der Producte, so folgt:

$$\begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \frac{\partial \cos l}{\partial u} & \frac{\partial \cos m}{\partial u} & \frac{\partial \cos n}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 \cos l}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \cos m}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \cos n}{\partial u^2} \end{vmatrix} = p^2 \left(\cos l' \frac{\partial \cos l''}{\partial u} + \cos m' \frac{\partial \cos m''}{\partial u} + \cos n' \frac{\partial \cos n''}{\partial u} \right),$$

d. i. nach 4):

$$7) \qquad \cos l' \frac{\partial \cos l''}{\partial u} + \cos m' \frac{\partial \cos m''}{\partial u} + \cos n' \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = q.$$

Die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \cos l \,.\, \cos l' + \cos m \,.\, \cos m' + \cos n \,.\, \cos n' &= 0, \\ \cos l' \,.\, \cos l' + \cos m' \,.\, \cos m' + \cos n' \,.\, \cos n' &= 1, \\ \cos l'' \,.\, \cos l' + \cos m'' \,.\, \cos m' + \cos n'' \,.\, \cos n' &= 0, \end{aligned}$$

nach u differentiirt geben mit Rücksicht auf 5) und 7):

$$\cos l \frac{\partial \cos l'}{\partial u} + \cos m \frac{\partial \cos m'}{\partial u} + \cos n \frac{\partial \cos n'}{\partial u} = -p,$$

$$\cos l' \frac{\partial \cos l'}{\partial u} + \cos m' \frac{\partial \cos m'}{\partial u} + \cos n' \frac{\partial \cos n'}{\partial u} = 0,$$

$$\cos l'' \frac{\partial \cos l'}{\partial u} + \cos m'' \frac{\partial \cos m'}{\partial u} + \cos n'' \frac{\partial \cos n'}{\partial u} = -q,$$

folglich:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos l'}{\partial u} = -p \cos l - q \cos l'', \\ \dfrac{\partial \cos m'}{\partial u} = -p \cos m - q \cos m'', \\ \dfrac{\partial \cos n'}{\partial u} = -p \cos n - q \cos n''. \end{cases}$$

Differentiirt man die Gleichungen:

$$\cos l \cos l'' + \cos m \cos m'' + \cos n \cos n'' = 0,$$
$$\cos l' \cos l'' + \cos m' \cos m'' + \cos n' \cos n'' = 0,$$
$$\cos l'' \cos l'' + \cos m'' \cos m'' + \cos n'' \cos n'' = 1,$$

nach u, berücksichtigt die Gleichungen 5), 7) und 8), so folgt:

$$\cos l \frac{\partial \cos l''}{\partial u} + \cos m \frac{\partial \cos m''}{\partial u} + \cos n \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = 0,$$
$$\cos l' \frac{\partial \cos l''}{\partial u} + \cos m' \frac{\partial \cos m''}{\partial u} + \cos n' \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = q,$$
$$\cos l'' \frac{\partial \cos l''}{\partial u} + \cos m'' \frac{\partial \cos m''}{\partial u} + \cos n'' \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = 0,$$

also:

$$9)\quad \frac{\partial \cos l''}{\partial u} = q \cos l', \quad \frac{\partial \cos m''}{\partial u} = q \cos m', \quad \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = q \cos n'.$$

Aus den Gleichungen 5) und 8) findet man durch Differentiation nach u:

$$\frac{\partial^2 \cos l}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos l' - p(p \cos l + q \cos l''),$$
$$\frac{\partial^2 \cos m}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos m' - p(p \cos m + q \cos m''),$$
$$\frac{\partial^2 \cos n}{\partial u^2} = \frac{\partial p}{\partial u} \cos n' - p(p \cos n + q \cos n'').$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen und 5) geht die Gleichung 4) über in:

$$10)\quad \begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \\ \cos l'' & \cos m'' & \cos n'' \end{vmatrix} = -1.$$

Die Gleichung 3) zeigt, dass für $p = 0$ die Winkel l, m, n constant sind. In diesem Falle kann man setzen:

$$11)\quad \begin{cases} \cos l = 0, & \cos m = 0, & \cos n = 1, \\ \cos l' = 0, & \cos m' = 1, & \cos n' = 0, \\ \cos l'' = 1, & \cos m'' = 0, & \cos n'' = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man $\cos l'$, $\cos m'$, $\cos n'$ zwischen den Gleichungen 5) und 9), so folgt:

$$q \frac{\partial \cos l}{\partial u} - p \frac{\partial \cos l''}{\partial u} = 0, \quad q \frac{\partial \cos m}{\partial u} - p \frac{\partial \cos m''}{\partial u}, \quad q \frac{\partial \cos n}{\partial u} - p \frac{\partial \cos n''}{\partial u} = 0.$$

Ist nun $\frac{q}{p} = \cot\delta$, wo δ eine Constante bedeutet, so geben die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos\delta\cos l - \sin\delta\cos l''\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u}\left(\cos\delta\cos m - \sin\delta\cos n''\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\cos\delta\cos n - \sin\delta\cos n''\right) = 0,$$

oder integrirt:

$$12)\ \begin{cases} \cos\delta\cos l - \sin\delta\cos l'' = \cos l_0,\ \cos\delta\cos m - \sin\delta\cos m'' = \cos m_0, \\ \cos\delta\cos n - \sin\delta\cos n'' = \cos n_0, \end{cases}$$

wo l_0, m_0, n_0 constante Winkel sind, welche der Bedingung genügen $\cos^2 l_0 + \cos^2 m_0 + \cos^2 n_0 = 1$. Die Gleichungen 12) respective mit $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ multiplicirt und addirt geben:

$$13)\qquad \cos\delta = \cos l\,.\,\cos l_0 + \cos m\,.\,\cos m_0 + \cos n\,.\,\cos n_0\,.$$

Diese Gleichung zeigt, dass für $\frac{q}{p}$ constant, die durch l, m, n bestimmte Richtung den Kanten eines Kreiskegels parallel ist. Nimmt man die Axe des Kegels zur Axe der z, so hat man $\cos l_0 = 0$, $\cos m_0 = 0$, $\cos n = 1$. Die Gleichungen 12) und 13) geben dann:

$$\cos\delta\cos l = \sin\delta\cos l'',\ \cos\delta\cos m = \sin\delta\cos m'',$$
$$\cos n = \cos\delta,\ \cos n'' = -\sin\delta.$$

Bezeichnet θ eine beliebige Function von u, so kann man setzen:

$$14)\ \begin{cases} \cos l = \sin\delta\,.\,\cos\theta,\quad \cos l' = -\sin\theta,\quad \cos l'' = \cos\delta\cos\theta, \\ \cos m = \sin\delta\,.\,\sin\theta,\quad \cos m' = \cos\theta,\quad \cos m'' = \cos\delta\sin\theta, \\ \cos n = \cos\delta,\quad \cos n' = 0,\quad \cos n'' = -\sin\delta. \\ p = \sin\delta\frac{\partial\theta}{\partial u},\quad q = \cos\delta\frac{\partial\theta}{\partial u}. \end{cases}$$

Ist $q = 0$, so hat man in den Gleichungen 14) nur $\delta = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, um unmittelbar $\cos l \ldots$ in Function eines variabeln Winkels θ zu erhalten.

§ 3.

Mit Hilfe der in § 2 entwickelten Gleichungen lassen sich die Coordinaten eines Punktes einer cyklischen Fläche sehr einfach in Function zweier Variabeln u und v darstellen. Zu den beiden Gleichungen:

$$1)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = R^2,$$
$$2)\qquad (x-\xi)\cos l + (y-\eta)\cos m + (z-\zeta)\cos n = 0,$$

nehme man die Gleichung der Ebene einer successiven Generatrix. Der Durchschnitt der Ebene 2) mit der eines successiven Kreises ist durch die Gleichung 2) und:

$$(x-\xi)\frac{\partial\cos l}{\partial u} + (y-\eta)\frac{\partial\cos m}{\partial u} + (z-\zeta)\frac{\partial\cos n}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial\xi}{\partial u}\cos l + \frac{\partial\eta}{\partial u}\cos m + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\cos n,$$

oder:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-\xi)\cos l' + (y-\eta)\cos m' + (z-\zeta)\cos n \\ &= \frac{1}{p}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\cos l + \frac{\partial \eta}{\partial u}\cos m + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cos n\right)\end{aligned}\right.$$

bestimmt. Fällt man vom Punkte (ξ, η, ζ) ein Perpendikel auf den Durchschnitt der Ebenen 2) und 3), so sind die Gleichungen desselben:

$$\frac{x-\xi}{\cos l''} = \frac{y-\eta}{\cos m''} = \frac{z-\zeta}{\cos n''}.$$

Dieses Perpendikel schneidet den durch die Gleichungen 1), 2) bestimmten Kreis in zwei Punkten, deren Coordinaten

$$\xi \pm R\cos l', \quad \eta \pm R\cos m', \quad \zeta \pm R\cos n'$$

sind. Nimmt man in den vorstehenden Gleichungen das untere Zeichen, verbindet die beiden Punkte (x, y, z) und $(\xi - R\cos l', \eta - R\cos m', \zeta - R\cos n')$ mit dem Punkte (ξ, η, ζ) durch Gerade, bezeichnet durch v den Winkel, welchen diese Geraden mit einander bilden, so lassen sich die Gleichungen 1) und 2) durch folgende ersetzen:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \xi + R(-\cos l' \cos v + \cos l'' \sin v), \\ y &= \eta + R(-\cos m' \cos v + \cos m'' \sin v), \\ z &= \zeta + R(-\cos n' \cos v + \cos n'' \sin v).\end{aligned}\right.$$

Zur Vereinfachung des Folgenden sei:

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial u}\cos l + \frac{\partial \eta}{\partial u}\cos m + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cos n = P, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial u}\cos l' + \frac{\partial \eta}{\partial u}\cos m' + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cos n' = P', \\ &\frac{\partial \xi}{\partial u}\cos l'' + \frac{\partial \eta}{\partial u}\cos m'' + \frac{\partial \zeta}{\partial u}\cos n'' = P'',\end{aligned}\right.$$

oder:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= P\cos l + P'\cos l' + P''\cos l'', \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} &= P\cos m + P'\cos m' + P''\cos m'', \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} &= P\cos n + P'\cos n' + P''\cos n''.\end{aligned}\right.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichungen und die Gleichungen des § 2 giebt die erste Gleichung 4):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = (P + pR\cos v)\cos l + \left(P' - \frac{\partial R}{\partial u}\cos v + qR\sin v\right)\cos l'$$
$$+ \left(P'' + \frac{\partial R}{\partial u}\sin v + qR\cos v\right)\cos l'',$$

$$7)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=&\left[\frac{\partial P}{\partial u}-pP'+\left(R\frac{\partial p}{\partial u}+2p\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos v-pqR\sin v\right]\cos l\\&+\left[\frac{\partial P'}{\partial u}+pP+qP''+\left(p^2R+q^2R-\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}\right)\cos v\right.\\&\qquad\left.+\left(R\frac{\partial q}{\partial u}+2q\frac{\partial R}{\partial u}\right)\sin v\right]\cos l'\\&+\left[\frac{\partial P''}{\partial u}-qP'+\left(R\frac{\partial q}{\partial u}+2q\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos v-\left(q^2R-\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}\right)\sin v\right]\cos l'',\end{aligned}\right.$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}=R\,(\cos l'\sin v+\cos l''\cos v),\quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=R\,(\cos l'\cos v-\cos l''\sin v),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=-pR\sin v.\cos l+qR\,(\cos l'\cos v-\cos l''\sin v)$$
$$+\frac{\partial R}{\partial u}(\cos l'\sin v+\cos l''\cos v).$$

Durch Vertauschung von l mit m und n erhält man aus den vorstehenden Gleichungen unmittelbar die entsprechenden Differentialquotienten von y und z. Wegen der Gleichung (§ 2, 10) ist:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos l & \cos m & \cos n\\ \cos l' & \cos m' & \cos n'\\ \cos l'' & \cos m'' & \cos n''\end{vmatrix}.$$

Durch Ausführung der Multiplication der beiden Determinanten auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung folgt:

$$8)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right)=&\left(P''\sin v-P'\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos l\\&+(P+pR\cos v)(\cos l'\cos v-\cos l''\sin v).\end{aligned}\right.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung successive l mit m und n, so ergeben sich die entsprechenden Gleichungen für:

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)$$

und

$$\frac{1}{R}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Mittelst der Gleichungen 7) und 8) lassen sich ohne Schwierigkeit die folgenden Quantitäten berechnen:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E,\quad \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=F,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = B,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = C.$$

Man findet:

$$9) \left\{ \begin{aligned} & E = (P + pR\cos v)^2 + \left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 + (P''\cos v + P'\sin v + qR)^2, \\ & \qquad G = R^2, \quad F = R\,(P''\cos v + P'\sin v + qR). \end{aligned} \right.$$

$$10) \left\{ \begin{aligned} & \frac{A}{R} = \left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right). \\ & \qquad \left[\frac{\partial P}{\partial u} - pP' + \left(R\frac{\partial p}{\partial u} + 2p\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos v - pqR\sin v\right] \\ & \qquad + (P + pR\cos v). \\ & \qquad \left[q^2 R - \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial P'}{\partial u} + qP''\right)\cos v - \left(\frac{\partial P''}{\partial u} - qP'\right)\sin v\right] \\ & \qquad + p\cos v\,(P + pR\cos v)^2, \\ & \frac{B}{R^2} = P + pR\cos v, \\ & \frac{C}{R^2} = q\,(P + pR\cos v) - p\left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right)\sin v. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man durch r', r'' die Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche im Punkte (x, y, z), so finden für dieselben die Gleichungen statt:

$$\frac{AG + BE - 2CF}{(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}, \quad \frac{AB - C^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{1}{r'r''}.$$

Substituirt man hierin für A, B, C, E, F, G ihre Werthe aus 9) und 10), so ergeben sich für eine cyklische Fläche folgende Gleichungen:

$$11) \left\{ \begin{aligned} & R\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)\left[(P + pR\cos v)^2 + \left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ & = 2pR\cos v\left[(P + pR\cos v)^2 + \left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right] \\ & + R\left(P''\sin v - P'\cos v + \frac{\partial R}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial u} + pP' + R\frac{\partial p}{\partial u}\cos v + pqR\sin v\right) \\ & + (P + pR\cos v)\left[P^2 + P'^2 + P''^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 - R\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} + R\left(\frac{\partial P'}{\partial u} + pP + qP''\right)\cos v \right. \\ & \qquad \left. - R\left(\frac{\partial P''}{\partial u} - qP'\right)\sin v + 2\left(P''\sin v - P'\cos v\right)\frac{\partial R}{\partial u}\right]. \end{aligned} \right.$$

$$
12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{R}{r'r''}\left[(P+pR\cos v)^2+\left(P''\sin v-P'\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]^2\\
&=Rp^2\cos^2 v\left[(P+pR\cos v)^2+\left(P''\sin v-P'\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]\\
&+(P+pR\cos v)^2\left[\left(\frac{\partial P'}{\partial u}+pP+qP''\right)\cos v\right.\\
&\qquad\left.-\left(\frac{\partial P''}{\partial u}-qP'\right)\sin v-\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}\right]\\
&+(P+pR\cos v)\left(P''\sin v-P'\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right).\\
&\quad\left[\frac{\partial P}{\partial u}-pP'+\left(R\frac{\partial p}{\partial u}+2p\frac{\partial R}{\partial u}\right)\cos v+pqR\sin v\right]\\
&-p^2R\left(P''\sin v-P'\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Sind die Generatricen einer festen Ebene parallel, wird dieselbe zur Ebene der x und y genommen, so hat man, mit Rücksicht auf § 2, 11):

$$
p=0,\quad q=0,\quad P=\frac{\partial \zeta}{\partial u},\quad P'=\frac{\partial \eta}{\partial u},\quad P''=\frac{\partial \xi}{\partial u}.
$$

Die Gleichung 11) wird in diesem Falle:

$$
13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&R\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\sin v-\frac{\partial \eta}{\partial u}\cos v+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\\
&=-R\sin v\left[\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}-\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}-\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]\\
&\quad+R\cos v\left[\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}-\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}-\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial u}\right]\\
&\quad+\frac{\partial \zeta}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]\\
&\quad-R\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

§ 4.

Die Gleichungen 11) und 13) von § 3 geben mit Leichtigkeit die Lösung des folgenden Problems:

> Welche Fläche kann durch einen Kreis erzeugt werden, für welche in jedem ihrer Punkte die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser verschwindet?

Setzt man $r'+r''=0$, so muss in der Gleichung 11) von § 2 die rechte Seite identisch verschwinden, welchen Werth auch v haben möge. Dieses giebt zuerst $p=0$. Setzt man in der Gleichung (§ 2, 13) die Factoren von $\sin v$, $\cos v$ und den von v unabhängigen Term einzeln gleich Null, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}-\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}=\frac{2}{R}\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u},\end{cases}$$

$$2)\quad \left\{ \frac{\partial\zeta}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right]=R\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial^2R}{\partial u^2}-\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}\right).\right.$$

Die beiden ersten Gleichungen integrirt geben:

$$3)\quad \left\{\frac{\partial\xi}{\partial u}=g\,R^2\frac{\partial\zeta}{\partial u},\quad \frac{\partial\eta}{\partial u}=g_1\,R^2\frac{\partial\zeta}{\partial u},\right.$$

wo g, g_1 beliebige Constanten sind. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt durch Elimination von $R^2\frac{\partial\zeta}{\partial u}$ die Gleichung:

$$g_1\frac{\partial\xi}{\partial u}-g\frac{\partial\eta}{\partial u}=0,$$

folglich

$$g_1\xi-g\,\eta=g_2,$$

wo g_2 eine Constante ist. Diese Gleichung zeigt, dass die Curve, welche der Mittelpunkt der Generatrix beschreibt, in einer Ebene liegt, welche senkrecht auf der xy-Ebene steht. Nimmt man der Einfachheit halber diese Ebene zur Ebene der x, z, so hat man $g_1=0$, $g_2=0$, $\eta=0$. Von den Quantitäten ξ, ζ, R kann eine als unabhängige Variabele genommen werden. Setzt man $R^2=u$, also:

$$4)\quad \left\{\frac{\partial\xi}{\partial u}=g\,u\frac{\partial\zeta}{\partial u},\right.$$

so geht die Gleichung 2) über in:

$$u\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}+2u(1+g^2u^2)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^3=0,$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)+2\left(\frac{1}{u^2}+g^2\right)\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^3=0.$$

Diese Gleichung integrirt giebt:

$$\frac{1}{\left(u\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2}=4\left(g^2u+2f-\frac{1}{u}\right),$$

wo f eine Constante ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt, in Verbindung mit 4):

$$5)\quad \begin{cases} \zeta=\frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}\frac{\partial u}{\sqrt{u}\sqrt{(g^2u^2+2fu-1)}},\\ \xi=\frac{1}{2}\int_{u_0}^{u}\frac{g\,u\,\partial u}{\sqrt{u}\sqrt{(g^2u^2+2fu-1)}}\end{cases}$$

In den Gleichungen 5) setze man:

$$g = \tfrac{1}{2} a^2 \sin\delta, \quad f = \tfrac{1}{2} a^2 \cos\delta, \quad \tfrac{1}{2} a^2 u = \frac{1-\cos\delta}{\sin^2\delta}\,\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

und nehme für u_0 die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} a^2 u_0 = \frac{1-\cos\delta}{\sin^2\delta}.$$

Die Gleichungen 5) gehen dann über in:

$$6)\quad \begin{cases} a\zeta = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\cos^2\frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi)}}, \\ a\xi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\delta \displaystyle\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{(1-\cos^2\frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi)}}. \end{cases}$$

Die Gleichung der gesuchten Fläche folgt durch Elimination von φ zwischen den Gleichungen:

$$z = \zeta, \quad (x-\xi)^2 + y^2 = R^2.$$

Da nun

$$R^2 = u = \frac{1}{(a\cos\frac{1}{2}\delta\cos\varphi)^2},$$

so hat man mit 6) die Gleichungen $z = \zeta$ und

$$7)\quad x = \xi \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{(a\cos\frac{1}{2}\delta\cos\varphi)^2} - y^2\right\}}.$$

Setzt man in der ersten Gleichung 6) $\zeta = z$, so folgt: $\varphi = am\, az$. Die zweite Gleichung 6) wird für $\varphi = am\, az$:

$$\xi = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \int_0^z \frac{\partial z}{\cos^2 am\, az}.$$

Für diesen Werth von ξ und $\varphi = am\, az$ wird die Gleichung 7):

$$8)\quad x = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\delta \int_0^z \frac{\partial z}{\cos^2 am\, az} \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{(a\cos\frac{1}{2}\delta\cos am\, az)^2} - y^2\right\}}.$$

Setzt man mit Jacobi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\cos^2\frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi)}} = K, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{2}\delta\sin^2\varphi)}} = K',$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos^2\tfrac{1}{2}\delta\sin^2\varphi)}\,\partial\varphi = E, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

so giebt die Gleichung 8) vollständig entwickelt:

$$x = \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{(a\cos\frac{1}{2}\delta\cos am\, a z)^2} - y^2\right\}} + \left(tang\,\tfrac{1}{2}\delta - \frac{2E}{K\sin\delta}\right)z$$

$$+ \frac{\pi}{aK\sin\delta}\,tang\,\frac{a\pi z}{2K} + \frac{4\pi}{aK\sin\delta}\sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{q^{2s}}{1-q^{2s}}\sin\frac{a s\pi z}{K}.$$

Ist $\delta = 0$, so findet man mittelst der Gleichung $\cos am\,(az, \cos\frac{1}{2}\delta)\cos am\,(az\sqrt{-1}, \sin\frac{1}{2}\delta) = 1$:

$$\cos am\,(az, 1) = \frac{1}{\cos am\,(az\sqrt{-1}, 0)} = \frac{1}{\cos az\sqrt{-1}} = \frac{2}{e^{az} + e^{-az}}.$$

Die Gleichung 8) giebt in diesem Falle:

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{1}{2a}(e^{az} + e^{-az}),$$

was die bekannte Gleichung der Rotationsfläche einer Kettenlinie ist. Die vorstehende Gleichung ergiebt sich auch leicht direct aus den Gleichungen 5) für $g = 0$, $2f = a^2$. Man hat dann φ zwischen den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{(a\cos\varphi)^2}, \quad az = \int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$$

zu eliminiren.

§ 5.

Bewegt sich der Mittelpunkt einer Kugelfläche von variabelem Radius auf einer beliebigen Curve, so wird die Kugelfläche von einer Fläche eingehüllt, deren allgemeine Gleichung das Resultat der Elimination von u zwischen den folgenden Gleichungen ist:

$$1)\quad \begin{cases} (x-\xi_1)^2 + (y-\eta_1)^2 + (z-\zeta_1)^2 = R_1^2, \\ (x-\xi_1)\dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} + (y-\eta_1)\dfrac{\partial\eta_1}{\partial u} + (z-\zeta_1)\dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u} = -R_1\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, \end{cases}$$

wo ξ_1, η_1, ζ_1, R_1 Functionen von u sind. Die Fläche, repräsentirt durch die Gleichungen 1), ist offenbar eine cyklische Fläche. Setzt man in die Gleichungen 1) für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen 4) §. 2, so müssen die Gleichungen 1) identisch werden, was folgende Relationen giebt:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u}\cos l' + \dfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\cos m' + \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u}\cos n' = 0, \\ \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u}\cos l'' + \dfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\cos m'' + \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u}\cos n'' = 0, \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} (\xi-\xi_1)\cos l' + (\eta-\eta_1)\cos m' + (\zeta-\zeta_1)\cos n' = 0, \\ (\xi-\xi_1)\cos l'' + (\eta-\eta_1)\cos m'' + (\zeta-\zeta_1)\cos n'' = 0, \end{cases}$$

$$4)\quad (\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\zeta-\zeta_1)^2 = R_1^2 - R^2,$$

$$5)\quad (\xi-\xi_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial u} + (\eta-\eta_1)\frac{\partial\eta_1}{\partial u} + (\zeta-\zeta_1)\frac{\partial\zeta_1}{\partial u} = -R_1\frac{\partial R_1}{\partial u}.$$

Die Gleichung 4) nach u differentiirt giebt mit Rücksicht auf 2), 3), 5):

$$6)\qquad (\xi-\xi_1)\cos l+(\eta-\eta_1)\cos m+(\zeta-\zeta_1)\cos n=-\frac{R}{P}\frac{\partial R}{\partial u}.$$

Die beiden Gleichungen 3) nach u differentiirt geben wegen 2) bis 6):

$$7)\qquad PP'+pR\frac{\partial R}{\partial u}=0,\quad P''=0.$$

Dieses sind die Bedingungsgleichungen, welche stattfinden müssen, wenn die cyklische Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche sein soll. Finden die Gleichungen 7) statt, so erhält man aus den Gleichungen 11) und 12) von § 3 für einen der Hauptkrümmungshalbmesser den Ausdruck:

$$\sqrt{\left\{R^2+\left(\frac{R}{P}\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right\}},$$

welcher unabhängig von v ist. Hieraus folgt:

Ist eine cyklische Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelm Radius, deren Mittelpunkt eine beliebige Curve beschreibt, so ist in jedem Punkte einer Generatrix einer der Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche constant.

Es lässt sich leicht zeigen, dass die Gleichungen 7) umgekehrt auf die Gleichungen 1) führen. Da $P''=0$ und $\cos l'=\frac{1}{p}\frac{\partial\cos l}{\partial u}$, so ist:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}=P\cos l+P'\cos l'=P\cos l+\frac{P'}{p}\frac{\partial\cos l}{\partial u},$$

folglich:

$$8)\qquad \xi=\frac{P'}{p}\cos l+\int\left\{P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}\right\}\cos l\,\partial u.$$

Analoge Gleichungen erhält man für η und ζ. Setzt man:

$$9)\qquad \begin{cases}\left(P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}\right)\cos l=\frac{\partial\xi_1}{\partial u},\quad \left(P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}\right)\cos m=\frac{\partial\eta_1}{\partial u},\\ \left(P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}\right)\cos n=\frac{\partial\zeta_1}{\partial u},\end{cases}$$

$$10)\qquad P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}=\frac{\partial s_1}{\partial u},$$

so geben die Gleichungen 9)

$$11)\qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial s_1}=\cos l,\quad \frac{\partial\eta_1}{\partial s_1}=\cos m,\quad \frac{\partial\zeta_1}{\partial s_1}=\cos n.$$

Die Gleichungen 8) und die beiden analogen für η, ζ werden nach 9), 10) und 11):

$$\xi=\xi_1+\frac{P'}{p}\frac{\partial\xi_1}{\partial s_1},\quad \eta=\eta_1+\frac{P'}{p}\frac{\partial\eta_1}{\partial s_1},\quad \zeta=\zeta_1+\frac{P'}{p}\frac{\partial\zeta_1}{\partial s_1}.$$

Substituirt man diese Werthe ξ, η, ζ und von $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$ aus 11) in die beiden Gleichungen:

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$
$$(x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n=0,$$

so gehen dieselben, nach einer leichten Transformation, über in:

$$12)\quad \begin{cases} (x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2+(z-\zeta_1)^2=R^2+\left(\frac{P'}{p}\right)^2, \\ (x-\xi_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial s_1}+(y-\eta_1)\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1}+(z-\zeta_1)\frac{\partial \zeta_1}{\partial s_1}=\frac{P'}{p}. \end{cases}$$

Setzt man:

$$R_1^2=R^2+\left(\frac{P'}{p}\right)^2,$$

so ist:

$$R_1\frac{\partial R_1}{\partial u}=R\frac{\partial R}{\partial u}+\frac{P'}{p}\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p},$$

oder, da nach 7):

$$R\frac{\partial R}{\partial u}=-\frac{PP'}{p},$$

so ist auch:

$$R_1\frac{\partial R_1}{\partial u}=-\frac{P'}{p}\left(P-\frac{\partial}{\partial u}\frac{P'}{p}\right),$$

d. i. nach 10):

$$R_1\frac{\partial R_1}{\partial u}=-\frac{P'}{p}\frac{\partial s_1}{\partial u}\quad\text{oder}\quad\frac{P'}{p}=-R_1\frac{\partial R_1}{\partial u_1}.$$

Die zweite Gleichung 12) folgt also einfach durch Differentiation der ersten nach s_1. Nimmt man wieder u als unabhängige Variabele, so erhält man die Gleichungen 1).

Die Ebenen der Generatricen einer cyklischen Fläche seien die Krümmungsebenen einer Curve, welche auf der Fläche liegt und die Tangente der Generatrix gleichzeitig Tangente der Curve. Ist (ξ_1, η_1, ζ_1) ein Punkt der Curve, welche auf der Fläche liegt, so finden die Gleichungen statt:

$$13)\quad (\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2=R^2,$$

$$14)\quad (\xi_1-\xi)\cos l+(\eta_1-\eta)\cos m+(\zeta_1-\zeta)\cos n=0.$$

Ist die Ebene der Generatrix Krümmungsebene der Curve, so finden die Gleichungen statt:

$$15)\quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\cos l+\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\cos m+\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\cos n=0,$$

$$16)\quad \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}\cos l+\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial u^2}\cos m+\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial u^2}\cos n=0.$$

Hat die Curve im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) mit der Generatrix dieselbe Tangente, so steht dieselbe senkrecht auf der Verbindungslinie der Punkte (ξ, η, ζ) und (ξ_1, η_1, ζ_1), was durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$17)\quad (\xi_1(\xi-\frac{\partial \xi_1}{\partial u}+(\eta_1-\eta)\frac{\partial \eta_1}{\partial u}+(\zeta_1-\zeta)\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}=0.$$

Die Gleichung 15) nach u differentiirt giebt mit Rücksicht auf 16):

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\cos l'+\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\cos m'+\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\cos n'=0.$$

Aus dieser Gleichung und 15) folgt:

$$18)\qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{1}{\cos l''}=\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\frac{1}{\cos m''}=\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\frac{1}{\cos n''}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen lässt sich die Gleichung 17) auch schreiben:

$$19)\qquad (\xi_1-\xi)\cos l''+(\eta_1-\eta)\cos m''+(\zeta_1-\zeta)\cos n''=0.$$

Da $\frac{\partial \xi}{\partial u}=P\cos l+P'\cos l'+P''\cos l''$, so geben die Gleichungen 13), 14) nach u differentiirt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 14) bis 19):

$$20)\qquad \begin{cases} (\xi_1-\xi)\cos l'+(\eta_1-\eta)\cos m'+(\zeta_1-\zeta)\cos n'=-\dfrac{R\dfrac{\partial R}{\partial u}}{P'}, \\ (\xi_1-\xi)\cos l'+(\eta_1-\eta)\cos m'+(\zeta_1-\zeta)\cos n'=\dfrac{P}{p}. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen geben:

$$PP'+pR\frac{\partial R}{\partial u}=0.$$

Bildet man die Summe der Quadrate 14), 19) und der zweiten Gleichung 20), so ist diese Summe nach 13) gleich R^2. Hieraus folgt $P^2=p^2R^2$. Die beiden gesuchten Bedingungsgleichungen sind also:

$$P^2=p^2R^2,\quad PP'+pR\frac{\partial R}{\partial u}=0,$$

oder:

$$21)\qquad P=\pm pR,\quad P'=\mp\frac{\partial R}{\partial u}.$$

Es lässt sich leicht umgekehrt zeigen, dass, wenn die Gleichungen 21) stattfinden, die Ebene der Generatrix Krümmungsebene und ihre Tangente ebenfalls Tangente einer Curve im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) ist, wo ξ_1, η_1, ζ_1 durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

$$22)\qquad \xi_1=\xi\pm R\cos l',\quad \eta_1=\eta\pm R\cos m',\quad \zeta_1=\zeta\pm R\cos n'.$$

Enthält die Ebene der Generatrix die Tangente der Curve, auf welcher sich ihr Mittelpunkt bewegt und hat die Generatrix im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) dieselbe Tangente mit einer Curve, welche auf der Fläche liegt, so finden die Gleichungen statt: $P=0$

$$23)\qquad (\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2+(\zeta_1-\zeta)^2=R^2,$$

$$24)\qquad (\xi_1-\xi)\cos l+(\eta_1-\eta)\cos m+(\zeta_1-\zeta)\cos n=0,$$

$$25)\qquad (\xi_1-\xi)\frac{\partial \xi}{\partial \xi_1}+(\eta_1-\eta)\frac{\partial \eta_1}{\partial u}+(\zeta_1-\zeta)\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}=0,$$

$$26)\qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial u}\cos l+\frac{\partial \eta_1}{\partial u}\cos m+\frac{\partial \zeta_1}{\partial u}\cos n=0.$$

Wegen 26) und $P=0$ giebt die Gleichung 24) nach u differentiirt:

$$27)\qquad (\xi_1-\xi)\cos l'+(\eta_1-\eta)\cos m'+(\zeta_1-\zeta)\cos n'=0.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung, die Gleichung 25) und $P=0$ giebt die Gleichung 23) nach u differentiirt:

$$28)\quad (\xi_1-\xi)\cos l''+(\eta_1-\eta)\cos m''+(\zeta_1-\zeta)\cos n''=-R\frac{\partial R}{\partial u}\cdot\frac{1}{P''}.$$

Bildet man endlich die Summe der Quadrate der Gleichungen 24), 27) und 28), so ist dieselbe nach 23) gleich R^2. Hieraus folgt

$$P''^2=\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2.$$

Es hat keine Schwierigkeit, direct zu zeigen, dass die Tangente im Punkte (ξ_1, η_1, ζ_1) einer Curve, bestimmt durch die Gleichungen:

$$29)\quad \xi_1=\xi\pm R\cos l'',\quad \eta_1=\eta\pm R\cos m'',\quad \zeta_1=\zeta\pm R\cos n'',$$

die Generatrix berührt, wenn die Bedingungen stattfinden:

$$P=0,\quad P'=\mp\frac{\partial R}{\partial u}.$$

§ 6.

Die successiven Generatricen einer cyklischen Fläche schneiden sich im Allgemeinen nicht, da die Gleichungen:

$$1)\quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$

$$2)\quad (x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n=0$$

und zwei weitere Gleichungen, welche sich durch Differentiation nach u aus 1) und 2) ergeben, durch Elimination von x, y, z eine Relation geben, welche nicht identisch verschwindet. Die Gleichungen 1) und 2) nach u differentiirt geben:

$$(x-\xi)\frac{\partial\xi}{\partial u}+(y-\eta)\frac{\partial\eta}{\partial u}+(z-\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial u}=-R\frac{\partial R}{\partial u},$$

$$(x-\xi)\cos l'+(y-\eta)\cos m'+(z-\zeta)\cos n'=\frac{P}{p}.$$

Sollen die vorstehenden Gleichungen gleichzeitig mit den Gleichungen 1) und 2) bestehen, so lassen sich dieselben durch folgende ersetzen:

$$3)\quad P'\{(x-\xi)\cos l''+(y-\eta)\cos m''+(z-\zeta)\cos n''\}=-\left(\frac{PP'}{p}+R\frac{\partial R}{\partial u}\right),$$

$$4)\quad (x-\xi)\cos l'+(y-\eta)\cos m'+(z-\zeta)\cos n'=\frac{P}{p}.$$

Die drei Ebenen 2) bis 4) schneiden sich in einem Punkte, soll derselbe auf der Kugelfläche 1) liegen, so erhält man:

$$5)\quad (p^2R^2-P^2)P''^2=\left(PP'+pR\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2.$$

Schneiden sich also zwei successive Generatricen in einem Punkt, so findet die Gleichung 5) statt. Die drei Ebenen 2) bis 4) können sich nicht in derselben Geraden schneiden, weil sonst die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \\ \cos l'' & \cos m'' & \cos n'' \end{vmatrix}$$

verschwinden müsste, was nicht möglich ist. Sollen zwei successive Generatricen sich in zwei Punkten schneiden, so kann dieses nur geschehen, wenn von den Gleichungen 3) und 4) eine identisch verschwindet, oder eine der Ebenen, welche durch diese Gleichungen bestimmt sind, die Kugelfläche berührt, die andere durch den Mittelpunkt derselben geht. Dieses giebt folgende Annahmen:

$$6) \qquad P' = 0, \quad PP' + pR\frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

$$7) \quad (x-\xi)\cos l'' + (y-\eta)\cos m'' + (z-\zeta)\cos n'' = 0, \quad PP' + pR\frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

$$8) \qquad (x-\xi)\cos l' + (y-\eta)\cos m' + (z-\zeta)\cos n' = 0, \quad P = 0.$$

Die Gleichungen 1), 2), 4) und 7) geben $P^2 = p^2 R^2$. Hierdurch werden die Gleichungen 7) einfacher:

$$9) \qquad P = \pm pR, \quad P' = \mp \frac{\partial R}{\partial u}.$$

Auf ähnliche Art gehen die Gleichungen 8) über in:

$$10) \qquad P = 0, \quad P''P = \pm \frac{\partial R}{\partial u}.$$

Die Gleichung 5) wird durch jede der Annahmen 6), 9), 10) identisch, was selbstverständlich ist. Mit Rücksicht auf die in § 5 gemachten Bemerkungen führen die Gleichungen 6), 8), 9) zu folgendem Resultat:

> Schneiden sich die successiven Generatricen einer cyklischen Fläche in zwei Punkten, so ist die Fläche die Enveloppe einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt eine beliebige Curve beschreibt. Fallen die beiden Schnittpunkte zusammen, so ist die Tangente zur Generatrix gleichzeitig Tangente einer Curve, welche auf der Fläche liegt, ihre Ebene ist dann entweder die Krümmungsebene dieser Curve, oder dieselbe geht durch die Tangente der Curve, welche ihr Mittelpunkt beschreibt.

§ 7.

Da die successiven Generatricen einer cyklischen Fläche sich nicht allgemein schneiden und die Distanz zweier Punkte derselben nicht allgemein constant ist, so entsteht die Frage nach solchen correspondirenden Punkten derselben, für welche die Distanz ein Maximum oder Minimum ist. Die Lösung dieser Frage ergiebt sich am einfachsten, wenn man von zwei beliebigen Kreisen im Raume ausgeht und dieselben nachher mit zwei successiven Generatricen identificirt.

Die Gleichungen zweier Kreise im Raume seien:

$$1)\quad \begin{cases} (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2, \\ (x-\xi)\cos f+(y-\eta)\cos g+(z-\zeta)\cos h=0. \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} (x-\xi')^2+(y-\eta')^2+(z-\zeta')^2=R'^2, \\ (x-\xi')\cos f'+(y-\eta')\cos g'+(z-\zeta')\cos h'=0. \end{cases}$$

Bezeichnet man durch (x, y, z) einen Punkt des Kreises 1), durch (x', y', z') einen Punkt des Kreises 2), so lassen sich für dieselben folgende Gleichungen aufstellen:

$$3)\quad \begin{cases} x=\xi+R\left\{-\dfrac{\cos f'-\cos f\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi+\dfrac{\cos h\cos g'-\cos h'\cos g}{\sin\delta}\sin\psi\right\}, \\ y=\eta+R\left\{-\dfrac{\cos g'-\cos g\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi+\dfrac{\cos f\cos h'-\cos f'\cos h}{\sin\delta}\sin\psi\right\}, \\ z=\zeta+R\left\{-\dfrac{\cos h'-\cos h\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi+\dfrac{\cos g\cos f'-\cos g'\cos f}{\sin\delta}\sin\psi\right\}. \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} x'=\xi'+R'\left\{-\dfrac{\cos f-\cos f'\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi'+\dfrac{\cos h\cos g'-\cos h'\cos g}{\sin\delta}\sin\psi'\right\}, \\ y'=\eta'+R'\left\{-\dfrac{\cos g-\cos g'\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi'+\dfrac{\cos f\cos h'-\cos f'\cos h}{\sin\delta}\sin\psi'\right\}, \\ z'=\zeta'+R'\left\{-\dfrac{\cos h-\cos h'\cos\delta}{\sin\delta}\cos\psi'+\dfrac{\cos g\cos f'-\cos g'\cos f}{\sin\delta}\sin\psi'\right\}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 3) und 4) sind ψ, ψ' beliebige Winkel und

$$5)\quad \cos\delta=\cos f\,.\,\cos f'+\cos g\,.\,\cos g'+\cos h\,.\,\cos h'.$$

Man setze zur Abkürzung:

$$6)\quad \begin{cases} \sqrt{\{(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2+(\zeta'-\zeta)^2\}}=D, \\ (\xi'-\xi)\cos f+(\eta'-\eta)\cos g+(\zeta'-\zeta)\cos h=D\,.\,H, \\ (\xi'-\xi)\cos f'+(\eta'-\eta)\cos g'+(\zeta'-\zeta)\cos h'=D(H\cos\delta+H'\sin\delta), \\ \begin{vmatrix} \xi'-\xi & \eta'-\eta & \zeta'-\zeta \\ \cos f' & \cos g' & \cos h' \\ \cos f & \cos g & \cos h \end{vmatrix}=D\,.\,H''\sin\delta. \end{cases}$$

Das Quadrat der letzten Gleichung giebt:

$$\begin{vmatrix} D^2 & D(H\cos\delta+H'\sin\delta) & DH \\ D(H\cos\delta+H'\sin\delta) & 1 & \cos\delta \\ DH & \cos\delta & 1 \end{vmatrix}=(DH''\sin\delta)^2,$$

oder einfach:

$$7)\quad 1=H^2+H'^2+H''^2.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 6) geben die Gleichungen 3) und 4):

$$8)\quad \begin{cases} (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2 \\ =D^2+R^2+R'^2+2RR'(\cos\delta\cos\psi\cos\psi'-\sin\psi\sin\psi') \\ +2DR'\{-(H\sin\delta-H'\cos\delta)\cos\psi'+H''\sin\psi'\} \\ +2DR(H'\cos\psi-H''\sin\psi). \end{cases}$$

Soll die Distanz der beiden Punkte (x, y, z), (x', y', z') ein Maximum oder Minimum sein, so müssen die beiden Differentialquotienten nach ψ und ψ' der rechten Seite derGleichung 8) einzeln verschwinden. Hierdurch ergeben sich für ψ und ψ' folgende Gleichungen:

$$\{DH''-R\sin\psi\}\cos\psi'+\{D(H\sin\delta-H'\cos\delta)-R\cos\delta\cos\psi\}=0,$$
$$D(H'\sin\psi+H''\cos\psi)+R'(\cos\delta\sin\psi\cos\psi'+\cos\psi\sin\psi')=0.$$

Diese Gleichungen enthalten, geometrisch interpretirt, die bekannte Bedingung, dass für ein Maximum oder Minimum der Distanz der beiden Punkte (x, y, z), (x', y', z') ihre Verbindungslinie gleichzeitig senkrecht steht auf den Tangenten zu den Kreisen 1) und 2) in den bemerkten Punkten. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$9)\left\{\begin{aligned}&R'\{D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)\\&\qquad-\sin\delta\sin\psi(DH\cos\delta+R\cos\psi\sin\delta+DH'\sin\delta)\}\cos\psi'\\&\qquad=D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)\{D(H\sin\delta-H'\cos\delta)-R\cos\delta\cos\psi\},\\&R'\{D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)\\&\qquad-\sin\delta\sin\psi(DH\cos\delta+R\cos\psi\sin\delta+DH'\sin\delta)\}\sin\psi'\\&\qquad=-D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)\{DH''-R\sin\psi\}.\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen quadrirt und addirt geben für ψ folgende Gleichung:

$$10)\left\{\begin{aligned}&R'^2\{D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)\\&\quad-\sin\delta\sin\psi(DH\cos\delta+R\cos\psi\sin\delta+DH'\sin\delta)\}^2\\&\quad=D^2(H''\cos\psi+H'\sin\psi)^2\{D(H\sin\delta-H'\cos\delta)-R\cos\delta\cos\psi\}^2\\&\quad+D^2(H''\cos\psi+H'\sin\psi)^2(DH''-R\sin\psi)^2.\end{aligned}\right.$$

Mit Rücksicht auf die in 7) aufgestellte Gleichung lässt sich die vorstehende Gleichung auf folgende Form bringen:

$$11)\left\{\begin{aligned}&R^2-R'^2+2DR(H'\cos\psi+H''\sin\psi)+D^2\\&+\frac{2R'^2\sin\delta\sin\psi}{D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)}(DH\cos\delta+R\cos\psi\sin\delta+DH'\sin\delta)\\&=(DH\cos\delta+DH'\sin\delta+R\cos\psi\sin\delta)^2\left\{1+\left(\frac{R'\sin\psi\sin\delta}{DH''\cos\psi+DH'\sin\psi}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

Substituirt man in die Gleichung 8) für $\cos\psi'$, $\sin\psi'$ ihre Werthe aus 9), so folgt, mit Rücksicht auf 10):

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2=R^2-R'^2+2DR(H'\cos\psi+H''\sin\psi)+D^2$$
$$+\frac{2R'^2\sin\delta\sin\psi}{D(H''\cos\psi+H'\sin\psi)}(DH\cos\delta+R\cos\psi\sin\delta+DH'\sin\delta).$$

Nach 11) wird diese Gleichung einfacher:

$$12)\left\{\begin{aligned}&(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\\&=(DH\cos\delta+DH'\sin\delta+R\cos\psi\sin\delta)^2\left\{1+\left(\frac{R'\sin\psi\sin\delta}{DH''\cos\psi+H'\sin\psi}\right)^2\right\}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man nun:

$$13)\left\{\begin{aligned}&\cos f=\cos l,\quad \cos g=\cos m,\quad \cos h=\cos n,\\&\cos f'=\frac{\cos l+p\varepsilon\cos l'}{\sqrt{(1+\varepsilon^2p^2)}},\quad \cos g'=\frac{\cos m+\varepsilon p\cos m'}{\sqrt{(1+\varepsilon^2p^2)}},\quad \cos h'=\frac{\cos n+\varepsilon p\cos n'}{\sqrt{(1+\varepsilon^2p^2)}},\\&\xi'=\xi+\varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial u},\quad \eta'=\eta+\varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial u},\quad \zeta'=\zeta+\varepsilon\frac{\partial\zeta}{\partial u},\\&R'=R+\varepsilon\frac{\partial R}{\partial u},\end{aligned}\right.$$

so geben die Gleichungen 5) und 6):

$$DH=\varepsilon P,\quad DH'=\varepsilon P',\quad DH''=\varepsilon P'',$$

$$\cos\delta=\frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon^2p^2)}},\quad \sin\delta=\frac{p\varepsilon}{\sqrt{(1+\varepsilon^2p^2)}},\quad D=\varepsilon\sqrt{(P^2+P'^2+P''^2)}.$$

Die Gleichungen 11) und 12) werden hierdurch:

$$14)\left\{\begin{aligned} &-R\left(P''\sin\psi-P'\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}\right)\\ &+p\sin\psi\left(R+\varepsilon\frac{\partial R}{\partial u}\right)\frac{P+pR\cos\psi+\varepsilon pP'}{(1+\varepsilon^2p^2)(P''\cos\psi+P'\sin\psi)}\\ &+\tfrac{1}{2}\varepsilon\left\{P^2+P'^2+P''^2-\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right\}\\ &=\tfrac{1}{2}\varepsilon(P+pR\cos\psi+\varepsilon pP')^2\left\{1+\frac{p^2\sin^2\psi\left(R+\varepsilon\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2}{(P''\cos\psi+P'\sin\psi)^2}\right\},\end{aligned}\right.$$

$$15)\left\{\begin{aligned} &\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{\varepsilon^2}\\ &=(P+pR\cos\psi+\varepsilon pP')^2\left\{1+\frac{p^2\sin^2\psi\left(R+\varepsilon\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2}{(P''\cos\psi+P'\sin\psi)^2}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Substituirt man die Werthe von $\cos f$, $\cos f'$... aus 13) in die Gleichungen 1) und 2), so ist leicht ersichtlich, dass dieselben für ein unendlich kleines ε zwei successive Generatricen repräsentiren. Lässt man in den Gleichungen 14) und 15) ε unbegrenzt abnehmen, bezeichnet durch ∂S die Distanz der beiden Punkte (x, y, z), (x', y', z'), so folgt:

$$16)\left\{\begin{aligned} &(P''\cos\psi+P'\sin\psi)\left(P''\sin\psi-P'\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}\right)=pR\sin\psi(P+pR\cos\psi),\\ &\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2=(P+pR\cos\psi)^2+\left\{\frac{pR\sin\psi(P+pR\cos\psi)}{P''\cos\psi+P'\sin\psi}\right\}^2.\end{aligned}\right.$$

Die zweite der vorstehenden Gleichungen lässt sich nach 16) einfacher auf folgende Weise schreiben:

$$17)\quad \left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2=(P+pR\cos\psi)^2+\left(P''\sin\psi-P'\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2.$$

Setzt man in den Gleichungen 3) x_1, y_1, z_1 statt x, y, z, so erhält man mittelst der Gleichungen 13):

$$18)\left\{\begin{aligned} x_1&=\xi+R(-\cos l'\cos\psi+\cos l''\sin\psi),\\ y_1&=\eta+R(-\cos m'\cos\psi+\cos m''\sin\psi),\\ z_1&=\zeta+R(-\cos n'\cos\psi+\cos n''\sin\psi).\end{aligned}\right.$$

Der Punkt (x_1, y_1, z_1) gehört einer Curve der cyklischen Fläche an, für deren successive Punkte die Distanz zweier successiven Generatricen ein Maximum oder Minimum ist. Für den Fall eines Maximums möge die Curve Elongationslinie, für den Fall eines Minimums Strictionslinie der cyklischen Fläche heissen. Setzt man in der Gleichung 16) $\tan g\,\tfrac{1}{2}\psi=w$, so ergiebt sich für w die Gleichung:

$$P''\left(P'+\frac{\partial R}{\partial u}\right)w^4+2\left(P''^2-P'^2-p^2R^2+pRP-P'\frac{\partial R}{\partial u}\right)w^3-6P'P''w^2$$
$$+2\left(-P''^2+P'^2+p^2R^2+pRP-P'\frac{\partial R}{\partial u}\right)w+P''\left(P'-\frac{\partial R}{\partial u}\right)=0.$$

Mittelst dieser Gleichung ergeben sich für $\sin\psi$ und $\cos\psi$ vier Werthe, so dass also allgemein auf einer cyklischen Fläche vier Curven existiren, welche die Eigenschaft haben, eine Strictions- oder Elongationslinie zu sein. Schneiden sich zwei successive Generatricen, so muss in 17) die rechte Seite verschwinden; d. h. es ist:

$$P+pR\cos\psi=0,\quad P''\sin\psi-P'\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}=0.$$

Durch Elimination von ψ zwischen diesen Gleichungen erhält man wieder die Gleichung 5) von § 6.

Sind die Generatricen einer festen Ebene — der xy-Ebene — parallel, so lassen sich die betreffenden Gleichungen entweder leicht direct finden oder einfacher aus den Gleichungen 16) und 17) für $p=0$ ableiten. Setzt man in diesen Gleichungen

$$p=0,\quad P=\frac{\partial\zeta}{\partial u},\quad P'=\frac{\partial\eta}{\partial u},\quad P''=\frac{\partial\xi}{\partial u},$$

so folgt:

$$19)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\sin\psi-\frac{\partial\eta}{\partial u}\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2,$$

$$20)\qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\cos\psi+\frac{\partial\eta}{\partial u}\sin\psi\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\sin\psi-\frac{\partial\eta}{\partial u}\cos\psi+\frac{\partial R}{\partial u}\right)=0.$$

In der Gleichung 20) kann der zweite Factor nicht verschwinden, weil sonst nach 19) $\frac{\partial S}{\partial u}$ constant sein müsste, was offenbar nicht allgemein der Fall ist. Man hat also:

$$21)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\cos\psi+\frac{\partial\eta}{\partial u}\sin\psi=0.$$

Durch diese Gleichung und:

$$22)\qquad x_1=\xi+R\sin\psi,\quad y_1=\eta-R\cos\psi,\quad z_1=\zeta,$$

ist die Strictions- und Elongationslinie einer cyklischen Fläche mit parallelen Generatricen bestimmt. Der Einfachheit halber soll im Folgenden nur der Ausdruck Strictionslinie allein gebraucht werden.

§ 8.

Ist (x_1, y_1, z_1) der Punkt einer Strictionslinie, welcher auf der Generatrix:

$$1)\qquad \begin{cases}(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,\\ (x-\xi)\cos l+(y-\eta)\cos m+(z-\zeta)\cos n=0\end{cases}$$

liegt, so hat man nach § 7 für denselben folgende Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} x_1 = \xi + R(-\cos l' \cos\psi + \cos l'' \sin\psi), \\ y_1 = \eta + R(-\cos m' \cos\psi + \cos m'' \sin\psi), \\ z_1 = \zeta + R(-\cos n' \cos\psi + \cos n'' \sin\psi). \end{cases}$$

Der Winkel ψ ist durch die Gleichung bestimmt:

$$3)\quad (P'' \cos\psi + P' \sin\psi)\left(P'' \sin\psi - P' \cos\psi + \frac{\partial R}{\partial u}\right) = p\, R \sin\psi (P + p\, R \cos\psi).$$

Bezeichnet man durch l_1, m_1, n_1 die Winkel, welche die Tangente zur Generatrix im Punkte (x_1, y_1, z_1) mit den Coordinatenaxen bildet, so hat man für die Cosinus derselben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} R \cos l_1 &= \cos m\,(z_1 - \zeta) - \cos n\,(y_1 - \eta), \\ R \cos m_1 &= \cos n\,(x_1 - \xi) - \cos l\,(z_1 - \zeta), \\ R \cos n_1 &= \cos l\,(y_1 - \eta) - \cos m\,(x_1 - \xi), \end{aligned}$$

oder nach 1):

$$4)\quad \begin{cases} \cos l_1 = \cos l' \sin\psi + \cos l'' \cos\psi, \\ \cos m_1 = \cos m' \sin\psi + \cos m'' \cos\psi, \\ \cos n_1 = \cos n' \sin\psi + \cos n'' \cos\psi. \end{cases}$$

Die Gleichungen 2) und 4) nach u differentiirt geben:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = (P + p\, R \cos\psi) \cos l + \left(P'' \sin\psi - P' \cos\psi + \dfrac{\partial R}{\partial u}\right) \\ \qquad (-\cos l' \cos\psi + \cos l'' \sin\psi) \\ \quad + \left\{P'' \cos\psi + P' \sin\psi + R\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right\} (\cos l' \sin\psi + \cos l'' \cos\psi), \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = (P + p\, R \cos\psi) \cos m + \left(P'' \sin\psi - P' \cos\psi + \dfrac{\partial R}{\partial u}\right) \\ \qquad (-\cos m' \cos\psi + \cos m'' \sin\psi) \\ \quad + \left\{P'' \cos\psi + P' \sin\psi + R\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right\} (\cos m' \sin\psi + \cos m'' \cos\psi), \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = (P + p\, R \cos\psi) \cos n + \left(P'' \sin\psi - P' \cos\psi + \dfrac{\partial R}{\partial u}\right) \\ \qquad (-\cos n' \cos\psi + \cos n'' \sin\psi) \\ \quad + \left\{P'' \cos\psi + P' \sin\psi + R\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right\} (\cos n' \sin\psi + \cos n'' \cos\psi). \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \cos l_1}{\partial u} = -p \sin\psi \cos l + (\cos l' \cos\psi - \cos l'' \sin\psi)\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial \cos m_1}{\partial u} = -p \sin\psi \cos m + (\cos m' \cos\psi - \cos m'' \sin\psi)\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial \cos n_1}{\partial u} = -p \sin\psi \cos n + (\cos n' \cos\psi - \cos n'' \sin\psi)\left(q + \dfrac{\partial \psi}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 5) und 6) ergeben sich leicht die folgenden:

$$7)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \cos l_1 & \cos m_1 & \cos n_1 \\ \frac{\partial \cos l_1}{\partial u} & \frac{\partial \cos m_1}{\partial u} & \frac{\partial \cos n_1}{\partial u} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \\ \cos l'' & \cos m'' & \cos n'' \end{vmatrix}$$

$$= p \sin \psi \left(P'' \sin \psi - P' \cos \psi + \frac{\partial R}{\partial u}\right) - (P + p R \cos \psi)\left(q + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right).$$

$$8)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \\ \frac{x_1 - \xi}{R} & \frac{y_1 - \eta}{R} & \frac{z_1 - \zeta}{R} \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{x_1 - \xi}{R} & \frac{\partial}{\partial u}\frac{y_1 - \eta}{R} & \frac{\partial}{\partial u}\frac{z_1 - \zeta}{R} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos l & \cos m & \cos n \\ \cos l' & \cos m' & \cos n' \\ \cos l'' & \cos m'' & \cos n'' \end{vmatrix}$$

$$= - P\left(q + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) + p \cos \psi\, (P' \sin \psi + P'' \cos \psi).$$

In den beiden vorstehenden Gleichungen verschwinden die rechten Seiten nicht, woraus folgt, dass die Tangenten zu den Generatricen längs einer Strictionslinie eine windschiefe Fläche bilden, ebenso bilden die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Generatricen mit den correspondirenden Punkten der Strictionslinie eine windschiefe Fläche.

Die Gleichungen 2—6) geben:

$$9)\quad \begin{cases} \cos l_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + \cos m_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + \cos n_1 \frac{\partial z_1}{\partial u} = P'' \cos \psi + P' \sin \psi + R\left(q + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right), \\ \frac{x_1 - \xi}{R}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{y_1 - \eta}{R}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{z_1 - \zeta}{R}\frac{\partial z_1}{\partial u} = P'' \sin \psi - P' \cos \psi + \frac{\partial R}{\partial u}, \\ \frac{\partial \cos l_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \cos m_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial \cos n_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u} = - p \sin \psi (P + p R \cos \psi) \\ \qquad - \left(P'' \sin \psi - P' \cos \psi + \frac{\partial R}{\partial u}\right)\left(q + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right). \end{cases}$$

Wegen der Gleichung 3) lässt sich die letzte der vorstehenden Gleichungen auch schreiben:

$$- R\left(\frac{\partial \cos l_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial \cos m_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{\partial \cos n_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial u}\right)$$

$$= \left(P'' \sin \psi - P' \cos \psi + \frac{\partial R}{\partial u}\right)\left\{P'' \cos \psi + P' \sin \psi + R\left(q + \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right\}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich dem Product der rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen 9), hieraus folgt:

$$10)\quad \begin{cases} \frac{1}{R}\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\cos l_1 + \frac{\partial y_1}{\partial u}\cos m_1 + \frac{\partial z_1}{\partial u}\cos n_1\right) \\ \left(\frac{x_1 - \xi}{R}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{y_1 - \eta}{R}\frac{\partial y_1}{\partial u} + \frac{z_1 - \zeta}{R}\frac{\partial z_1}{\partial u}\right) \\ + \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \cos l_1}{\partial u} + \frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial \cos m_1}{\partial u} + \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial \cos n_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Durch die vorstehende Gleichung ist eine Strictionslinie einer cyklischen Fläche charakterisirt. Die Gleichung 10) ist der analog, durch welche die Strictionslinie einer windschiefen Fläche bestimmt ist. Ist (x_1, y_1, z_1) ein Punkt einer windschiefen Fläche, sind l_1, m_1, n_1 die Winkel, welche die Generatrix mit den Coordinatenaxen bildet, welche den Punkt (x_1, y_1, z_1) enthält, so hat man die Gleichung:

$$11)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial \cos l_1}{\partial u}+\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial \cos m_1}{\partial u}+\frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial \cos n_1}{\partial u}=0.$$

Diese Gleichung folgt auch unmittelbar aus 10). Bezeichnet man durch l_2, m_2, n_2 die Winkel, welche die Verbindungslinie der Punkte (ξ, η, ζ) und (x_1, y_1, z_1) mit den Coordinatenaxen bilden, so finden für dieselben die Gleichungen statt:

$$12)\qquad \frac{x_1-\xi}{R}=\cos l_2,\quad \frac{y_1-\eta}{R}=\cos m_2,\quad \frac{z_1-\zeta}{R}=\cos n_2.$$

Da nun $\cos l_2$, $\cos m_2$, $\cos n_2$ immer endliche Werthe haben, so verschwindet für ein unbegrenzt wachsendes R die linke Seite der Gleichung 10), es ergiebt sich dann unmittelbar die Gleichung 11).

Soll die Strictionslinie einer cyklischen Fläche gleichzeitig Strictionslinie der windschiefen Fläche sein, gebildet aus den Tangenten zu den Generatricen längs der ersten Curve, so müssen die Gleichungen 10) und 11) gleichzeitig stattfinden. Man hat dann entweder:

$$\cos l_1\frac{\partial x_1}{\partial u}+\cos m_1\frac{\partial y_1}{\partial u}+\cos n_1\frac{\partial z_1}{\partial u}=0,$$

oder

$$\frac{x_1-\xi}{R}\frac{\partial x_1}{\partial u}+\frac{y_1-\eta}{R}\frac{\partial y_1}{\partial u}+\frac{z_1-\zeta}{R}\frac{\partial z_1}{\partial u}=0.$$

Hieraus folgt:

> Wenn eine Strictionslinie einer cyklischen Fläche gleichzeitig die Strictionslinie der windschiefen Fläche ist, gebildet aus den Tangenten zu den Generatricen der cyklischen Fläche längs der ersten Curve, so schneidet dieselbe entweder die Tangenten orthogonal, oder sie ist eine orthogonale Trajectorie der Verbindungslinien ihrer Punkte mit den entsprechenden Mittelpunkten der Generatricen.

Die Winkel, welche die Tangente, Hauptnormale und Binormale im Punkte (x_1, y_1, z_1) einer Strictionslinie mit den Coordinatenaxen bilden, seien respective α, β, γ; λ, μ, ν; a, b, c, ferner ∂s_1 das Bogenelement, ϱ der Krümmungshalbmesser. Nimmt man $u=s_1$ und bezeichnet durch σ den Winkel, welchen die Strictionslinie im Punkte (x_1, y_1, z_1) mit der Tangente zur Generatrix bildet, so ist:

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\cos l_1+\frac{\partial y_1}{\partial s_1}\cos m_1+\frac{\partial z_1}{\partial s_1}\cos n_1=\cos\sigma,$$

oder

$$\cos\alpha\cos l_1+\cos\beta\cos m_1+\cos\gamma\cos n_1=\cos\sigma.$$

Wegen dieser Gleichung kann man setzen:

$$13)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos l_1 \cos\alpha + \cos m_1 \cos\beta + \cos n_1 \cos\gamma = \cos\sigma, \\ \cos l_1 \cos\lambda + \cos m_1 \cos\mu + \cos n_1 \cos\nu = \sin\sigma \,.\, \cos\varphi, \\ \cos l_1 \cos a + \cos m_1 \cos b + \cos n_1 \cos c = \sin\sigma \sin\varphi, \end{array}\right.$$

wo φ ein beliebiger Winkel ist. Ist ferner τ der Winkel, welchen eine Strictionslinie mit der Verbindungslinie der beiden Punkte (x_1, y_1, z_1) und (ξ, η, ζ) bildet, so hat man:

$$14)\quad \frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{x_1-\xi}{R} + \frac{\partial y_1}{\partial s_1}\frac{y_1-\eta}{R} + \frac{\partial z_1}{\partial s_1}\frac{z_1-\zeta}{R} = \cos\tau.$$

Mittelst der Gleichungen 13) und 14) geht die Gleichung 10) über in:

$$15)\quad \cos\sigma \cos\tau = R\sin\sigma\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s_1} + \frac{\cos\varphi}{\varrho}\right).$$

Für den Fall, dass $\sigma = \frac{\pi}{2}$, giebt die Gleichung 15) $\frac{\cos\varphi}{\varrho} = 0$, also entweder $\varrho = \infty$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ist $\sigma = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man aus 13):

$$\cos l_1 = \cos a,\ \cos m_1 = \cos b,\ \cos n_1 = \cos c.$$

Hieraus folgt:

Schneidet eine Strictionslinie einer cyklischen Fläche die Tangenten zu den Generatricen orthogonal, so sind diese Tangenten entweder die Binormalen der Strictionslinie oder die Strictionslinie ist eine Gerade.

Schneiden sich zwei successive Generatricen einer cyklischen Fläche in einem Punkte, so finden nach § 7 die Gleichungen statt:

$$16)\quad P + pR\cos\psi = 0,\ P''\sin\psi - P'\cos\psi + \frac{\partial R}{\partial u} = 0.$$

Wegen der vorstehenden Gleichungen verschwindet die linke Seite der Gleichung 7), d. h. die Tangenten zu den Generatricen in den Schnittpunkten bilden eine developpabele Fläche. Die zweite Gleichung 16) in Verbindung mit 9) und 14) giebt $\tau = \frac{\pi}{2}$, die Curve gebildet aus den Schnittpunkten der successiven Generatricen schneidet also die Verbindungslinien ihrer Punkte mit den Mittelpunkten der Generatricen orthogonal. Diese Verbindungslinien bilden eine windschiefe Fläche, da die rechte Seite der Gleichung 8) nicht allgemein in Folge der Gleichungen 16) verschwindet. Die Gleichungen 5) geben, wegen $P + pR\cos\psi = 0$:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u}\cos l + \frac{\partial y_1}{\partial u}\cos m + \frac{\partial z_1}{\partial u}\cos n = 0,$$

d. h. die Tangente zur obigen Curve im Punkte (x_1, y_1, z_1) liegt in der Ebene der Generatrix. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Auf einer windschiefen Fläche werde eine beliebige Curve Γ und eine orthogonale Trajectorie Γ_1 der Generatrix angenommen.

Seien Π, Π_1 zwei Punkte von Γ, Γ_1, welche auf derselben Generatrix liegen. Legt man durch den Punkt Π und die Tangente zur Curve Γ_1 im Punkte Π_1 eine Ebene, beschreibt in derselben um Π einen Kreis mit dem Radius $\Pi\,\Pi_1$, so giebt die Gesammtheit aller dieser Kreise für die beiden Curven Γ und Γ_1 die allgemeinste cyklische Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass sich zwei successive Kreise derselben in einem Punkte schneiden.

Sind die Generatricen der cyklischen Fläche einer festen Ebene — der xy-Ebene — parallel, so hat man nach § 7 folgende Gleichungen:

$$17)\qquad x_1 = \xi + R\sin\psi,\quad y_1 = \eta - R\cos\psi,\quad z_1 = \zeta,$$

$$18)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\cos\psi + \frac{\partial\eta}{\partial u}\sin\psi = 0.$$

Sind wieder l_1, m_1, n_1 die Winkel, welche die Tangente zur Generatrix im Punkte (x_1, y_1, z_1) mit den Coordinatenaxen bildet, so finden die Gleichungen statt:

$$19)\qquad \cos l_1 = \cos\psi,\quad \cos m_1 = \sin\psi,\quad \cos n_1 = 0.$$

Setzt man

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2\right\}} = \frac{\partial\sigma}{\partial u},$$

so giebt die Gleichung 18)

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = -\sin\psi\frac{\partial\sigma}{\partial u},\quad \frac{\partial\eta}{\partial u} = \cos\psi\frac{\partial\sigma}{\partial u}.$$

Mittelst dieser Gleichungen erhält man aus 18 bis 19):

$$20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\cos l_1 + \dfrac{\partial y_1}{\partial u}\cos m_1 = R\dfrac{\partial\psi}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{x_1-\xi}{R}\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \dfrac{y_1-\eta}{R}\dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial R}{\partial u} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\dfrac{\partial\cos l_1}{\partial u} + \dfrac{\partial y_1}{\partial u}\dfrac{\partial\cos m_1}{\partial u} = -\left(\dfrac{\partial R}{\partial u} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial u}\right)\dfrac{\partial\psi}{\partial u}. \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man wieder die Gleichung 10) für den besonderen Fall, dass $z_1 = \zeta$, $\cos n_1 = 0$ ist. Verschwindet die linke Seite der Gleichung 20), so ist entweder $\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}$ oder $\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0$. Für $\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0$ ist ψ constant, die Gleichung 18) giebt dann $\xi\cos\psi + \eta\sin\psi = k$, wo k eine Constante bedeutet. Die Projection der Mittelpunkte der Generatricen auf die xy-Ebene ist eine Gerade, die Mittelpunkte liegen also in einer Ebene, welche auf der xy-Ebene senkrecht steht. Findet die Gleichung $\frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial\sigma}{\partial u}$ statt, so folgt $R - R_0 = \sigma - \sigma_0$, wo $\sigma - \sigma_0$ die Projection des Bogens der Curve der Mittelpunkte der Generatricen auf die xy-Ebene ist. Aus dem Vorstehenden schliesst man:

Ist eine Strictionslinie einer cyklischen Fläche mit parallelen Generatricen gleichzeitig Strictionslinie der windschiefen Fläche, gebildet aus den Tangenten zu den Generatricen längs der ersten Curve, so liegen die Mittelpunkte der Generatricen entweder in einer Ebene, welche die Ebenen der Generatricen orthogonal schneidet, oder die Projection des Bogens der Mittelpunktscurve zwischen zwei Generatricen auf die Ebene einer derselben ist gleich der Differenz der Radien dieser Generatricen.

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Ueber drei Integrationen innerhalb des Gebildes:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots=1.$$

Von Dr. R. Most in Stettin.

1. Bezieht sich das Integral:

$$\int x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}u^{\delta-1}\ldots$$

$$\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^q-\left(\frac{z}{c}\right)^r-\left(\frac{u}{d}\right)^s\right]^{\alpha_1-1}\left[1-\left(\frac{z}{c}\right)^r-\left(\frac{u}{d}\right)^s\right]^{\beta_1-1}\left[1-\left(\frac{u}{d}\right)^s\right]^{\gamma_1-1}$$

$$dx\,dy\,dz\,du$$

auf alle Werthe von $x, y, z, u\ldots$, die der Bedingung genügen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots<1,$$

so ist dasselbe gleich:

$$\frac{p}{\alpha}\,\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma d}{p\,.\,q\,.\,r\,.\,s}\,\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{s}\right)$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\alpha_1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\alpha_1+\beta_1-1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\alpha_1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+\alpha_1+\beta_1-1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+\frac{\delta}{s}+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-2\right)};$$

für $\alpha_1=\beta_1=\gamma_1=1$ geht dies Integral in das bekannte Dirichlet'sche über.

Folgende Methode scheint bei dieser und allen ähnlichen Integrationen am schnellsten zum Ziele zu führen:

Es ist

$$\int x^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-y)^{\alpha_1-1}\,dx\,dy=\frac{1}{\alpha}\,\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\alpha_1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha_1)}$$

für

$$x+y<1;$$

also wird das Integral:

$$1) \quad \int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left(1-\frac{y}{b}\right)^{\alpha_1-1} dx\, dy = \frac{a^\alpha b^\beta}{\alpha} \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\alpha_1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha_1)}$$

für

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}<1.$$

Geht man nun über auf das Integral:

$$J=\int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \left[1-\frac{y}{b(1-z)}\right]^{\alpha_1-1} z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha_1+\beta_1-2}\, dx\, dy\, dz$$

für

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+z<1,$$

d. h. für

$$\frac{x}{a(1-z)}+\frac{y}{b(1-z)}<1,$$

so lässt sich die Integration für x und y nach Gleichung 1) ausführen; der Werth $z=1$ veranlasst kein Bedenken, da für denselben x und y, also auch das darauf bezügliche Integralstück nach x und y der Null gleich sind. Man erhält also:

$$J=\frac{a^\alpha b^\beta}{\alpha} \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\alpha_1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha_1)} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha+\beta+\alpha_1+\beta_1-2}\, dz;$$

führt man die Integration nach z aus und setzt dann $\frac{z}{c}$ für z ein, so erhält man:

$$2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \left[1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right]^{\alpha_1-1} \left[1-\frac{z}{c}\right]^{\beta_1-1} dx\, dy\, dz \\ &=\frac{1}{\alpha} a^\alpha b^\beta c^\gamma\, \Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma) \frac{\Gamma(\alpha+\alpha_1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\alpha_1+\beta_1-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha_1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\alpha_1+\beta_1-1)} \end{aligned} \right.$$

für

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}<1.$$

In derselben Weise schreitet man zur Bedingung:

$$\frac{x}{a(1-u)}+\frac{y}{b(1-u)}+\frac{z}{c(1-u)}<1$$

vor und gewinnt schliesslich den allgemeineren Ausdruck durch bekannte Substitutionen.

2. Ist

$$\int f(x, y, z \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots = F(a, b, c \ldots)$$

für

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \ldots < 1,$$

so ist:

$$\int f(x, y, z \ldots)\, \varphi\left(\frac{1-\alpha x - \beta y - \gamma z \ldots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \gamma_1 z \ldots}\right) dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} F'\left(\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\gamma - \gamma_1 u} \ldots\right) \varphi(u)\, du,$$

wo das erste Integral in dem Gebiet:

$$u_2 > \frac{1-\alpha x - \beta y - \gamma z \ldots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \gamma_1 z \ldots} > u_1$$

genommen ist; für

$$\varrho = \alpha = \beta = \gamma = 1$$

geht dieser Ausdruck in einen von Schlömilch aufgestellten über*).

Man setze:

$$\frac{1-\alpha x - \beta y - \gamma z \ldots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \gamma_1 z \ldots} = u,$$

so wird:

$$3) \qquad \frac{\alpha - \alpha_1 u}{1-\varrho u} x + \frac{\beta - \beta_1 u}{1-\varrho u} y + \frac{\gamma - \gamma_1 u}{1-\varrho u} + \ldots = 1;$$

denkt man sich u, also auch $\varphi(u)$ constant, so kann für das durch 3) angedeutete Gebiet das Integral

$$\int f(x, y, z \ldots)\, dx\, dy\, dz \ldots$$

durch:

$$F\left(\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\gamma - \gamma_1 u} \ldots\right)$$

integrirt werden.

Es ist also in dem allgemeineren Integral J jedes $\varphi(u)$ mit dem zugehörigen Increment

$$\frac{dF}{du} du$$

zu multipliciren, also:

$$J = \int_{u_1}^{u_2} \frac{dF}{du} \varphi(u)\, du.$$

---

*) Vergl. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Theil II, p. 480.

3. Die Gleichung unter 2) gestattet noch folgende Erweiterung:

Ist

$$\int f(x, y, z \dots k)\, dx\, dy\, dz \dots = \Phi(a, b, c \dots k)$$

für

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \dots < 1,$$

so ist:

$$\int f\left(x, y, z \dots \frac{1 - \alpha x - \beta y - \gamma z \dots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \gamma_1 z \dots}\right) dx\, dy\, dz \dots$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \Phi'\left[\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\gamma - \gamma_1 u} \dots k\right]_{k=u} du,$$

wo im zweiten Integral nach dem Differentiiren $k = u$ gesetzt wird und das erste Integral in dem Gebiet:

$$u_2 > \frac{1 - \alpha x - \beta y - \gamma z \dots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \gamma_1 z \dots} > u_1$$

genommen ist.

Nach der Gleichung 3) wird, wenn

$$\frac{1 - \alpha x - \beta y - \dots}{\varrho - \alpha_1 x - \beta_1 y - \dots} = u$$

constant gedacht wird:

$$\int f(x, y, z \dots k) = \Phi\left(\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\gamma - \gamma_1 u} \dots k\right);$$

das zu $u = k$ gehörige Increment ist also:

$$\frac{d\Phi}{du}\left[\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u} \dots k\right] du,$$

also ist das allgemeine Integral gleich:

$$\int_{u_1}^{u_2} \Phi'\left[\frac{1-\varrho u}{\alpha - \alpha_1 u}, \frac{1-\varrho u}{\beta - \beta_1 u} \dots k\right]_{k=u} du.$$

Setzt man

$$f(x, y, z \dots k) = \chi(x, y, z \dots)\, \varphi(k),$$

so geht die allgemeine Gleichung in die unter 2) entwickelte über.

XV. Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear.

Zweiter Artikel.

Nachdem im ersten Artikel die Bemerkung gemacht worden ist, dass der gemeinschaftliche Nenner der Ausdrücke für die Unbekannten durch

$$a = \Sigma a'_{oi} \Sigma A_{ik} a'_{ok}$$

angegeben wird, erhebt sich die Frage, wie sich die Auflösung gestaltet, wenn dieser Nenner verschwindet. Man findet in diesem Umstand das Kennzeichen dafür, dass die Gleichungen 1) und 2) abhängig von einander und also zur Bestimmung der Unbekannten untauglich werden. Es zeigt sich nun aber, dass in diesem Falle anstatt der Gleichung 1) eine andere von jeder zweideutigen Wurzelgrösse freie lineare Gleichung in x aufgestellt werden kann, welche mit den Gleichungen 2) in Verbindung zu bringen ist und mit denselben nur ein Werthsystem der Unbekannten, und nur dann ein unbestimmtes oder gar kein endliches liefert, wenn dies wirklich in der Natur der Aufgabe liegt. Denkt man sich nämlich für einen Augenblick, es verschwinden sämmtliche y, so geben die Gleichungen 2)

$$\frac{x_0}{a'_{00}} = \frac{x_1}{a'_{01}} = \ldots = \frac{x_n}{a'_{on}},$$

wenn daher die fragliche Bedingung erfüllt ist, so verschwindet mit den y auch

$$F = \Sigma x_i \Sigma A_{ik} x_k.$$

Treten daher die y wieder auf, so muss sich eine Gleichung von folgender Form aufstellen lassen:

$$F = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \ldots + y_n z_n, \tag{19}$$

wo die Factoren z Ausdrücke des ersten Grades bedeuten, welche die y selbst, jedenfalls aber, wenn die Aufgabe nicht unbestimmt oder unmöglich sein soll, wenigstens Eine der Unbekannten x enthalten müssen. Wir werden die sicherste Vorbereitung zur Herstellung dieser Gleichung treffen, wenn wir darauf ausgehen, vermittelst 2) alle x in einem derselben, etwa x_m, und den y auszudrücken. Wir machen zu diesem Zwecke die Bemerkung, dass die Summe

$$\sum_1^n {}_r\, a_{ri} \begin{vmatrix} a_{om} & a_{ok} \\ a_{rm} & a_{rk} \end{vmatrix}' \text{ oder } \sum_1^n {}_r\, a_{ri} \frac{\partial a'_{om}}{\partial a_{rk}}$$

entweder den Werth a'_{om} oder $-a'_{ok}$ oder Null annimmt, je nachdem i mit k oder mit m, oder mit keinem von beiden identisch ist. Es werden nämlich die mit a_{om} und a_{ok} behafteten Glieder der Determinante a, in welcher jetzt die Glieder der ersten Horizontalreihe ganz beliebige Werthe haben können, durch die beiden Seiten der folgenden Gleichung angegeben:

$$a_{om}\,.\,a'_{om}+a_{ok}\,.\,a'_{ok}=\sum_1^n{}^r\begin{vmatrix}a_{om}&a_{ok}\\a_{rm}&a_{rk}\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}a_{om}&a_{ok}\\a_{rm}&a_{rk}\end{vmatrix}'$$

$$=a_{om}\sum{}^r\left(a_{rk}\begin{vmatrix}a_{om}&a_{ok}\\a_{rm}&a_{rk}\end{vmatrix}'\right)-a_{ok}\sum{}^r\left(a_{rm}\begin{vmatrix}a_{om}&a_{ok}\\a_{rm}&a_{rk}\end{vmatrix}'\right).$$

Der erste und der zweite Theil der Behauptung rechtfertigt sich aus dieser Gleichung unmittelbar; da ferner a'_{om} in eine Determinante mit zwei gleichen Verticalreihen übergeht, wenn, unter i eine von m und k verschiedene Zahl verstanden, $a_{rk}=a_{ri}$ gesetzt wird, so ist auch der dritte Theil erwiesen.

Addirt man daher die Gleichungen 2), nachdem sie der Reihe nach mit den im nachfolgenden Resultat ersichtlichen Factoren multiplicirt worden sind, so erhält man unter gleichzeitiger Einführung einer Abkürzung:

$$20)\qquad Y_{mk}=\sum_1^n{}^r\left(Y_r\begin{vmatrix}a_{om}&a_{ok}\\a_{rm}&a_{rk}\end{vmatrix}'\right)=-a'_{ok}\,.\,x_m+a'_{om}\,x_k.$$

Es hätte nun keine Schwierigkeit, alle x in x_m ausgedrückt in F einzusetzen, das Ergebniss wäre eine unreine quadratische Gleichung nach x_m, in welcher aber der Coefficient von x^2_m der Voraussetzung gemäss verschwindet, es würde sich also auch auf diesem Wege zeigen, dass der wesentliche Charakter des vorliegenden Falles in der Identität der zwei Werthsysteme der Unbekannten liegt, durch welche im Allgemeinen die Aufgabe befriedigt wird. Wenn nun der oben angezeigte Weg für den Zweck der Bestimmung der Unbekannten insofern der kürzere wäre, als er keine Elimination mehr erfordert, so werden wir doch aus anderen Gründen die Gleichung 20) in der Weise benützen, dass die Factoren z der sich herausstellenden Gleichung 19) keine y, sondern nur die x enthalten. Die Addition sämmtlicher Gleichungen, welche aus 20) nach Multiplication mit A_{ik} dadurch entspringen, dass k alle Werthe von 0 bis n durchläuft, liefert:

$$21)\qquad \sum{}^k A_{ik}\,Y_{mk}=-x_m\sum{}^k A_{ik}\,a'_{ok}+a'_{om}\sum{}^k A_{ik}\,x_k.$$

Desgleichen giebt die Addition sämmtlicher Gleichungen, welche aus 21) nach Multiplication mit a'_{oi} entspringen, wenn i alle Werthe von 0 bis n durchläuft:

$$22)\left\{\begin{aligned}&\sum{}^i\left(a'_{oi}\sum{}^k A_{ik}\,Y_{mk}\right)\\&=-x_m\sum{}^i\left(a'_{oi}\sum{}^k A_{ik}\,a'_{ok}\right)+a'_{om}\sum{}^i\left(a'_{oi}\sum{}^k A_{ik}\,x_k\right).\end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung verschwindet der Voraussetzung gemäss das erste Glied rechts. Multiplicirt man noch 21) mit x_i und lässt wieder i alle Werthe durchlaufen, so giebt die Addition:

$$23)\left\{\begin{aligned}&\sum{}^i\left(x_i\sum{}^k A_{ik}\,Y_{mk}\right)\\&=-x_m\sum{}^i\left(x_i\sum{}^k A_{ik}\,a'_{ok}\right)+a'_{om}\sum{}^i\left(x_i\sum{}^k A_{ik}\,x_k\right).\end{aligned}\right.$$

Hier ist die letzte Doppelsumme nichts anderes als F, die vorletzte unterscheidet sich von der letzten in 22) nur durch die Schreibart, die Elimination derselben zwischen 22) und 23) giebt daher:

$$24)\quad a'^2_{om} F = x_m \sum\nolimits^i \Big(a'_{oi} \sum\nolimits^k A_{ik} Y_{mk}\Big) + a'_{om} \sum\nolimits^i \Big(x_i \sum\nolimits^k A_{ik} Y_{mk}\Big).$$

Lässt man jetzt alle y ausser y_r verschwinden, so reducirt sich F auf $y_r z_r$, setzt man daher auch für Y_{mk} den Werth, auf den es sich vermöge 20) reducirt, so erhält man nach Absonderung des Factors y_r:

$$25)\quad z_r a'^2_{om} = \sum\nolimits^i \left[(x_m a'_{oi} + x_i a'_{om}) \sum\nolimits^k A_{ik} \begin{vmatrix} a_{om} & a_{ok} \\ a_{rm} & a_{rk} \end{vmatrix}'\right].$$

Wünscht man dieser Formel in Beziehung auf das Vorkommen der x die sonst obwaltende Symmetrie zu geben, so lässt man auch m alle Werthe von 0 bis n durchlaufen und addirt, das Ergebniss lässt sich dann so schreiben:

$$26)\quad \left\{ \begin{aligned} & z_r \sum\nolimits^m a'^2_{om} \\ & = \sum\nolimits^m \left\{ x_m \sum\nolimits^i \left[a'_{oi} \sum\nolimits^k \left(A_{ik} \begin{vmatrix} a_{om} & a_{ok} \\ a_{rm} & a_{rk} \end{vmatrix}' + A_{mk} \begin{vmatrix} a_{oi} & a_{ok} \\ a_{ri} & a_{rk} \end{vmatrix}' \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Symmetrie ist jetzt übrigens auf Kosten der Einfachheit hergestellt. Dass bei der Ausführung aus dem Coefficienten von x_0 die Coefficienten aller folgenden x, und ebenso aus z_1 alle folgenden z durch die geeigneten cyklischen Vertauschungen hergestellt werden können, ist selbstverständlich. Ebenso mag im Vorbeigehen bemerkt werden, dass der Coefficient von z_r unter Annahme der Bezeichnung $\sum^m a_{rm} a_{sm} = \alpha_{rs}$ in die Determinante $\Sigma \pm (\alpha_{11} \alpha_{22} \dots \alpha_{nn})$ übergeht.

Schon der ganze Gang unserer Entwickelung der Formel 25), welcher die Wahl von m frei lässt, zeigt, dass die Coefficienten z in Gleichung 19), auch wenn sie nur x ohne y enthalten, durch die Aufgabe nicht vollständig bestimmt werden; es ergiebt sich dies zugleich mit einem Mittel, aus einer Bestimmung der z alle möglichen anderen abzuleiten, unmittelbar aus jener Gleichung selbst. Wählt man nämlich ein System von Constanten:

$$\begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n}, \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn}, \end{matrix}$$

welche nur der Anforderung $k_{rs} = -k_{sr}$, also $k_{rr} = 0$ zu genügen haben, so folgt aus 19) sogleich:

$$27)\quad \left\{ \begin{aligned} F = & \Big(z_1 + \sum_1^n{}^s k_{1s} y_s\Big) y_1 + \Big(z_2 + \sum\nolimits^s k_{2s} y_s\Big) y_2 + \dots \\ & + \Big(z_n + \sum\nolimits^s k_{ns} y_s\Big) y_n. \end{aligned} \right.$$

Die Factoren in den Klammern zeigen die Modificationen, welche an einer

einmal getroffenen Bestimmung der z unbeschadet der Richtigkeit der Zerlegung angebracht werden dürfen.

Beispiel. Mit

$$F = -x_0^2 + 8x_1x_2 + 4x_1^2 + 12x_2x_0 + 3x_2^2 + 14x_0x_1$$

und

$$y_1 = x_0 + 2x_1 + 3x_2; \quad y_2 = 3x_0 - x_1 + 2x_2$$

erhält man

$$a'_{00} = +7; \quad a'_{01} = +7; \quad a'_{02} = -7.$$

Die Voraussetzung

$$0 = \Sigma a'_{0i} \Sigma A_{ik}\, a'_{0k} = 49\,(-1 - 8 + 4 - 12 + 3 + 14)$$

trifft also hier zu. Nach 26) erhält man nun:

$$21\,F = y_1\,(81\,x_0 + 50\,x_1 + 5\,x_2) + y_2\,(-34\,x_0 + 16\,x_1 + 24\,x_2)$$

oder mit $k_{12} = -13$:

$$\begin{aligned} 21\,F = y_1\,&[81\,x_0 + 50\,x_1 + 5\,x_2 - 13\,(3x_0 - x_1 + 2x_2)] \\ &+ y_2\,[-34x_0 + 16x_1 + 24x_2 + 13\,(x_0 + 2x_1 + 3x_2)], \end{aligned}$$

$$F = y_1\,(2x_0 + 3x_1 - x_2) + y_2\,(-x_0 + 2x_1 + 3x_2),$$

$$x_0 = \frac{7F - 5y_1^2 + 4y_1y_2}{14\,(3y_1 - y_2)}; \quad x_1 = \frac{7F + 7y_1^2 - 18y_1y_2 + 6y_2^2}{14\,(3y_1 - y_2)};$$

$$x_2 = \frac{-7F + 11y_1^2 + 6y_1y_2 - 4y_2^2}{14(3y_1 - y_2)}.$$

Die Werthe, welche die z für ein und dasselbe Werthsystem annehmen, sind in der Weise von einander abhängig, dass in einem derselben, etwa z_r jeder andere, etwa z_s bestimmt werden kann. Die Gleichungen

$$z_r = b_{r0}\,x_0 + b_{r1}\,x_1 + \ldots + b_{rn}\,x_n,$$
$$z_s = b_{s0}\,x_0 + b_{s1}\,x_1 + \ldots + b_{sn}\,x_n$$

liefern nämlich mit den Gleichungen 2) nach Elimination der x:

$$28)\quad \left\{ \begin{aligned} 0 = z_r \sum_0^n{}^k b_{sk}\,a'_{0k} - z_s \sum{}^k b_{sk}\,a'_{0k} \\ + \sum_1^n{}^t y_t \sum_{0,1}^{n-1,n}{}^k \begin{vmatrix} b_{ri} & b_{rk} \\ b_{si} & b_{sk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0k} \\ a_{ti} & a_{tk} \end{vmatrix}', \end{aligned} \right.$$

wovon später Gebrauch gemacht werden wird.

Es liessen sich nun ohne Schwierigkeit auch die Bedingungen angeben, unter welchen die Gleichungen 2) und 19) von einander abhängig werden, und also keine bestimmten oder gar keine endlichen Werthe der x liefern. Auf die Gefahr hin, mehr allgemein Bekanntes zu wiederholen, als vielleicht durch die übrig bleibenden Eigenthümlichkeiten, welche die Methode für sich beanspruchen kann, entschuldigt werden darf, mag die Untersuchung auf den Fall $n = 2$ beschränkt werden, in welchem sie eine geometrische Bedeutung erhält, insofern sie die Erörterung der Hyperboloide auf Grund der in der Form 19) aufgestellten Flächengleichung darbietet. Wir verstehen dabei unter x_0, x_1, x_2 cartesische Coordinaten, unter (F), (y_1), (y_2),

(z_1), (z_2) die betreffenden Ausdrücke in x, unter F, y_1, y_2, z_1, z_2 ihre Werthe.

Wir nehmen also an, es seien die Gleichungen gegeben:

$$F = (F) = \sum_0^2{}^i x_i \sum_0^2{}^k A_{ik} x_k$$

und

$$y_1 = (y_1) = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2,$$
$$y_2 = (y_2) = a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2,$$

deren Coefficienten mit Annahme der Bezeichnung:

$$29)\quad a'_{00} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12},\quad a'_{01} = a_{12} a_{20} - a_{22} a_{10},\quad a'_{02} = a_{10} a_{21} - a_{20} a_{11}$$

die Bedingung befriedigen:

$$30)\qquad 0 = \sum{}^i a'_{0i} \sum{}^k A_{ik} a'_{0k}.$$

Nach 25) oder 26) lassen sich dann die Coefficienten b in:

$$(z_1) = b_{10} x_0 + b_{11} x_1 + b_{12} x_2,$$
$$(z_2) = b_{20} x_0 + b_{21} x_1 + b_{22} x_2$$

so bestimmen, dass identisch:

$$(F) = (y_1)(z_1) + (y_2)(z_2).$$

Es findet demnach der Schnitt der Fläche $(F) = F$ mit der Geraden:

$$31)\qquad G \ldots (y_1) = y_1,\quad (y_2) = y_2$$

in der Ebene

$$E' \ldots F = y_1 (z_1) + y_2 (z_2)$$

statt. Denkt man sich für einen Augenblick, dass von den drei Werthen F, y_1, y_2 nur die zwei letzteren verschwinden, so rückt der Schnitt von G mit E' oder mit (F) ins Unendliche, die Gerade

$$A \ldots (y_1) = 0,\quad (y_2) = 0$$

ist somit eine Asymptote der Fläche, und die geometrische Bedeutung der Voraussetzung 30) liegt darin, dass b einer Asymptote parallel ist. Ebensowohl wie A zeigt sich, wenn man $(F) = F$ mit $(z_1) = z_1$ $(z_2) = z_2$ combinirt und z_1, z_2 verschwinden lässt, als eine Asymptote auch die Gerade:

$$B \ldots (z_1) = 0,\quad (z_2) = 0,$$

überhaupt, da identisch

$$(F) = (y_1)\{(z_1) + k(y_2)\} + (y_2)\{(z_2) - k(y_1)\}$$
$$= (y_1)\{(z_1) + k(z_2)\} + \{(y_2) - k(y_1)\}(z_2),$$

jede Gerade wie

$$(z_1) + k(y_2) = 0,\quad (z_2) - k(y_1) = 0,$$

oder

$$(z_1) + k(z_2) = 0,\quad (y_2) - k(y_1) = 0.$$

Sämmtliche Gerade dieser Art befriedigen aber die Gleichung:

$$(y_1)(z_1) + (y_2)(z_2) = 0.$$

Es ist dies also die Gleichung eines Asymptotenkegels, der seine Spitze im Ursprung hat und durch die vier Geraden geht:

$(y_1)=0, \quad (y_2)=0\ldots(y_1)=0, \quad (z_2)=0\ldots(z_1)=0, \quad (y_2)=0\ldots(z_1)=0,$
$(z_2)=0.$

Diese Gleichung wird auch befriedigt von einer Geraden A', welche den Schnitt der durch G und den Ursprung gelegten Ebene

$$E\ldots \frac{(y_1)}{y_1}=\frac{(y_2)}{y_2}$$

mit einer durch B gelegten Ebene

$$E'_0 \; 0=y_1(z_1)+y_2(z_2)$$

bildet. Es sind also die beiden in der Ebene E liegenden Geraden A und A' Asymptoten der Fläche (F) oder der Schnittcurve der durch G und den Ursprung gelegten Ebene E mit (F). Da nun der Schnitt von D mit (F) in E' oder in der Spur von E' auf E stattfindet, E' und E'_0 aber parallel sind, also auch auf E parallele Spuren geben, so besteht die Bestimmung des Schnitts von G mit (F) lediglich darin, dass durch die zur Asymptote A parallele G und den Ursprung eine Ebene E gelegt und darin diejenige Parallele zur anderen Asymptote A' der entstehenden Schnittcurve gezogen wird, welche durch den verlangten Schnitt geht.

Unbestimmt oder in endlicher Entfernung unmöglich wird der Schnitt, d. h. G liegt ganz auf der Fläche oder trifft sie nicht, wenn die Spur von E' auf E mit G zusammenfällt oder, ohne mit ihr zusammen zu fallen, parallel dazu wird. In beiden Fällen wird dann auch A' parallel G, d. h. da schon A parallel G ist, die Asymptoten A' und A fallen zusammen, E berührt den Asymptotenkegel, G ist nicht nur parallel einer Asymptote, sondern liegt auch in der darin an den Kegel gelegten Berührungsebene.

Das analytische Kennzeichen für beide Fälle muss dadurch dargeboten werden, dass die durch B gelegte Ebene E'_0, welche in ihrem Schnitt mit dem Kegel die A' gegeben hat, nun, da A' mit A zusammenfällt, auch A enthalten soll. Werden die Gleichungen von A in der Form geschrieben:

$$\frac{x_0}{a'_{00}}=\frac{x_1}{a'_{01}}=\frac{x_2}{a'_{02}},$$

so wird unter Annahme der Abkürzungen:

32) $\quad Z_1=b_{10}a'_{00}+b_{11}a'_{01}+b_{12}a'_{02}, \quad Z_2=b_{20}a'_{00}+b_{21}a'_{01}+b_{22}a'_{02},$

da x_0, x_1, x_2 die Gleichung von E'_0 befriedigen sollen, die verlangte Bedingung durch die Gleichung:

33) $$0=y_1Z_1+y_2Z_2$$

angegeben, und die allgemeine Gleichung von

$$E\ldots\frac{(y_1)}{y_1}=\frac{(y_2)}{y_2}$$

liefert nun:

34) $$0=(y_1)Z_1+(y_2)Z_2$$

als Gleichung der Berührungsebene an den Kegel nach der Asymptote $(y_1)=0$, $(y_2)=0$. Desgleichen ist selbstverständlich, wenn den Abkürzungen 29) und 32) analog

$$Y_1 = a_{10} b'_{00} + a_{11} b'_{01} + a_{12} b'_{02}, \quad Y_2 = a_{20} b'_{00} + a_{21} b'_{01} + a_{22} b'_{02}$$

gesetzt wird, die Gleichung der Berührungsebene an den Kegel nach B

$$35) \qquad 0 = (z_1) Y_1 + (z_2) Y_2.$$

Eine wesentliche Consequenz der Gleichung 33) besteht darin, dass der Geraden G entlang der Ausdruck $(y_1)(z_1) + (y_2)(z_2)$ einerlei Werth behält. Versteht man nämlich unter x_0, x_1, x_2 und $x_0 + \Delta x_0$, $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$ die Coordinaten zweier Punkte P und P' auf G und unter z_1, z_2 und $z_1 + \Delta z_1$, $z_2 + \Delta z_2$ die Werthe, welche daselbst (z_1) und (z_2) annehmen, so ist

$$\Delta z_1 = b_{10} \Delta x_0 + b_{11} \Delta x_1 + b_{12} \Delta x_2,$$
$$\Delta z_2 = b_{20} \Delta x_0 + b_{21} \Delta x_1 + b_{22} \Delta x_2.$$

Aus der Befriedigung der Gleichungen von G folgt aber:

$$0 = a_{10} \Delta x_0 + a_{11} \Delta x_1 + a_{12} \Delta x_2,$$
$$0 = a_{20} \Delta x_0 + a_{21} \Delta x_1 + a_{22} \Delta x_2,$$

oder:

$$36) \qquad \frac{\Delta x_0}{a'_{00}} = \frac{\Delta x_1}{a'_{01}} = \frac{\Delta x_2}{a'_{02}} = \frac{\Delta z_1}{Z_1} = \frac{\Delta z_2}{Z_2},$$

und nimmt somit, wenn q den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten bezeichnet, der Ausdruck $(y_1)(z_1) + (y_2)(z_2)$ in P' den Werth an:

$$y_1 (z_1 + q Z_1) + y_2 (z_2 + q Z_2) = y_1 z_1 = y_2 z_2 + q (y_1 Z_1 + y_2 Z_2) = y_1 z_1 + y_2 z_2.$$

Der Werth in P' ist also derselbe wie in P. Ob nun G auf der Fläche liegt oder sie nicht trifft, hängt also jetzt davon ab, ob dieser constante Werth gleich F ist oder nicht. Um dies zu entscheiden, suchen wir ihn für einen bestimmten Punkt auf G zu ermitteln, und zwar für den Schnittpunkt S mit der Berührungsebene 35) des Asymptotenkegels nach der Mantellinie B. Wir gehen zu diesem Zweck auf Gleichung 28) zurück, welche im vorliegenden Falle die einfache Gestalt

$$37) \qquad 0 = y_1 Y_2 - y_2 Y_1 + z_1 Z_2 - z_2 Z_1$$

annimmt und die Beziehung angiebt zwischen den irgend einem beliebigen Punkt entsprechenden Werthen von (y_1), (z_1), (y_2), (z_2). Sie zeigt unter anderem, dass die Gleichungen

$$0 = (y_1) Y_2 - (y_2) Y_1 \text{ und } 0 = (z_1) Z_2 - (z_2) Z_1$$

identisch sind, also beide der Ebene AB angehören. Ebenso sind es die Gleichungen:

$$38) \qquad 0 = (y_1) Y_2 + (z_1) Z_2 \text{ und } 0 = (y_2) Y_1 + (z_2) Z_1,$$

und gehören somit der Ebene an, welche durch die Geraden

$$(y_1) = 0, \quad (z_1) = 0 \text{ und } (y_2) = 0, \quad (z_2) = 0$$

geht. Aus der Befriedigung der Gleichungen 38) folgt auch

$$0 = Y_1 Z_1 \{(y_1) Y_2 + (z_1) Z_2\} + Y_2 Z_2 \{(y_2) Y_1 + (z_2) Z_1\}$$
$$= Y_1 Y_2 \{(y_1) Z_1 + (y_2) Z_2\} + Z_1 Z_2 \{(z_1) Y_1 + (z_2) Y_2\},$$

ist also ausserdem noch eine der Gleichungen 34) und 35) befriedigt, so ist es auch die andere, d. h. auf jener Ebene findet auch der Schnitt der zwei Berührungsebenen an den Kegel nach den Mantellinien A und B statt, in

Uebereinstimmung mit bekannten Sätzen über Curven und Kegel zweiten Grades.

Zur Bestimmung des Werthes von $(y_1)(z_1)+(y_2)(z_2)$ in S geben nun die Gleichungen 34) und 35), welche in S befriedigt sein müssen, folgende Beziehungen zwischen den der ganzen G angehörigen Werthen y_1 und y_2 und den besonders dem Punkt S angehörigen z_1 und z_2 von (z_1) und (z_2):

$$\frac{y_1}{Z_2}=\frac{y_2}{-Z_1}=\frac{y_1 Y_2-y_2 Y_1}{Y_2 Z_2+Y_1 Z_1}$$

und

$$\frac{z_1}{Y_2}=\frac{z_2}{-Y_1}=\frac{z_1 Z_2-z_2 Z_1}{Y_2 Z_2+Y_1 Z_1},$$

oder vermöge 37):

$$\frac{y_1}{Z_2}=\frac{y_2}{-Z_1}=\frac{z_1}{-Y_2}=\frac{z_2}{Y_1},$$

$$\frac{y_1^2}{Z_2^2}=\frac{y_2^2}{Z_1^2}=-\frac{y_1 z_1}{Y_2 Z_2}=-\frac{y_2 z_2}{Y_1 Z_1}=-\frac{y_1 z_1+y_2 z_2}{Y_1 Z_1+Y_2 Z_2}.$$

Der verlangte constante Werth ist also:

$$C=-\frac{y_1^2}{Z^2}(Y_1 Z_1+Y_2 Z_2)=-\frac{y_2^2}{Z_1^2}(Y_1 Z_1+Y_2 Z_2).$$

Je nachdem derselbe gleich F ist oder nicht, liegt G ganz auf der Fläche oder schneidet sie nicht. Durch eine mit Gleichung 33) verträgliche Modification der Werthe von y_1 und y_2, d. h. eine Parallelverschiebung von G in der Berührungsebene des Kegels nach der Asymptote Δ kann der oben gefundene Werth C in letzterem Falle immerhin nur dann zur Uebereinstimmung mit F, d. h. G in der Fläche (F) gebracht werden, wenn F und $Y_1 Z_1+Y_2 Z_2$ entgegengesetzten Vorzeichens sind, mit anderen Worten: in

$$F(Y_1 Z_1+Y_2 Z_2)\lesseqgtr 0$$

ist das Kennzeichen zur Unterscheidung des ein- und des zweimanteligen Hyperboloids gegeben.

Die Bedingungen $y_1 Z_1+y_2 Z_2=0$ und $F=C$ gelten vermöge der Form des Ausdrucks für C auch für die Gerade $(y_1)=-y_1$, $(y_2)=-y_2$, jede Berührungsebene des Asymptotenkegels schneidet die Fläche des einmanteligen Hyperboloids in zwei parallelen gleichweit von der Spitze abstehenden Geraden. Dass diese Bedingungen als diejenigen für die Unbestimmtheit der Auflösung der Gleichungen

$$y_1(z_1)+y_2(z_2)=0,\quad (y_1)=y_1,\quad (y_2)=y_2$$

auch aus dem Verschwinden zweier Determinanten ohne alle geometrische Betrachtung abgeleitet werden können, braucht kaum erinnert zu werden. Diese Determinanten sind:

$$\begin{vmatrix} b_{10}y_1+b_{20}y_2, & b_{11}y_1+b_{21}y_2, & b_{12}y_1+b_{22}y_2 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} F, & b_{11}y_1+b_{12}y_2, & b_{12}y_1+b_{22}y_2 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Zum Schlusse möge noch die bekannte metrische Beziehung **zwischen** den von den Erzeugenden beider Systeme auf einander **abgeschnittenen** Segmenten aus unseren Gleichungen entwickelt werden.

Nachdem sich gezeigt hat, dass die zwei Geraden

$$(y_1)=y_1,\quad (y_2)=y_2 \text{ und } (z_1)=z_1,\quad (z_2)=z_2$$

ganz auf der Fläche liegen, wenn:

$$\frac{y_1}{Z_2}=\frac{y_2}{-Z_1}=\frac{z_1}{-Y_2}=\frac{z_2}{Z_1}=\pm\sqrt{\frac{-F}{Y_1Z_1+Y_2Z_2}},$$

so schreiben wir die Gleichung der Fläche auch in folgender Form:

$$\{(y_1)+\lambda(z_2)\}\{(z_1)+k(y_2)\}+\{(y_2)-\lambda(z_1)\}\{(z_2)-k(y_1)\}=(1+\lambda k)F.$$

In Folge dessen treten an die Stelle der Coefficienten a_{1i}, b_{1i}, a_{2i}, b_{2i} die folgenden: $a_{1i}+\lambda b_{2i}$, $b_{1i}+ka_{2i}$, $a_{2i}-\lambda b_{1i}$, $b_{2i}-ka_{1i}$, und der Ausdruck Y_1 ist durch folgende Determinante zu ersetzen:

$$\begin{vmatrix} a_{10}+\lambda b_{20}, & a_{11}+\lambda b_{21}, & a_{12}+\lambda b_{22} \\ b_{10}+ka_{20}, & b_{11}+ka_{21}, & b_{12}+ka_{22} \\ b_{20}-ka_{10}, & b_{21}-ka_{11}, & b_{22}-ka_{12} \end{vmatrix}.$$

Durch bekannte Umwandlungsmethoden reducirt sich dieselbe auf den ersten der vier folgenden Ausdrücke, welche, noch mit $1+\lambda k$ multiplicirt, die anstatt Y_1, Z_1, Y_2, Z_2 auftretenden Werthe angeben, und deren letzte drei sich aus dem ersten leicht durch die geeigneten Vertauschungen entwickeln lassen:

$$Y_1+kZ_1,\quad Z_1+\lambda Y_2,\quad Y_2-kZ_1,\quad Z_2-\lambda Y_1.$$

Zu dem Ausdruck $Y_1Z_1+Y_2Z_2$ gesellt sich noch der Factor $(1+\lambda k)^3$. Zwei Gerade

$$\mathfrak{G}\ldots(y_1)+\lambda(z_1)=\eta_1,\quad (y_2)-\lambda(z_1)=\eta_2$$

und

$$\mathfrak{H}\ldots(z_1)+k(y_2)=\zeta_1,\quad (z_2)-k(y_1)=\zeta_2$$

liegen daher ganz auf der Fläche, wenn:

$$\frac{\eta_1}{Z_2-\lambda Y_1}=\frac{\eta_2}{-Z_1-\lambda Y_2}=\frac{\zeta_1}{-Y_2+kZ_1}=\frac{\zeta_2}{Z_1+\lambda Y_2}$$
$$=\pm(1+\lambda k)\sqrt{\frac{-F(1+\lambda k)}{(Y_1Z_1+Y_2Z_2)(1+\lambda k)^3}}=\pm\sqrt{\frac{-F}{Y_1Z_1+Y_2Z_2}},$$

und man erhält zur Bestimmung der dem Schnittpunkt P von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ entsprechenden Werthe y_1, y_2, z_1, z_2 von (y_1), (y_2), (z_1) und (z_2), wenn der Werth am Schluss der Gleichung mit q abgekürzt wird:

$$\frac{y_1+\lambda z_2}{Z_2-\lambda Y_1}=\frac{y_2-\lambda z_1}{-Z_1-\lambda Y_2}=\frac{z_1+ky_2}{-Y_2+kZ_1}=\frac{z_2-ky_1}{Y_1+\lambda Z_1}=q.$$

Durch geeignete Combination des ersten und des vierten, sowie des zweiten und des dritten Quotienten findet sich:

$$\frac{y_1(1+\lambda k)}{(Z_2-\lambda Y_1)-\lambda(Y_1+\lambda Z_2)}=\frac{z_2(1+\lambda k)}{k(Z_2-\lambda Y_1)+Y_1+\lambda Z_2}$$
$$=\frac{y_2(1+\lambda k)}{-(Z_1\lambda Y_2)+\lambda(-Y_2+kZ_1)}=\frac{z_1(1+\lambda k)}{k(Z_1+\lambda Y_2)+(-Y_2+kZ_1)}=q.$$

Diese Gleichungen geben die Werthe an, welche (y_1), (y_2), (z_1), (z_2) in einem gewissermassen durch seine Coordinaten λ und k bestimmten Flächenpunkt annehmen.

Mit k_1 statt k trete statt $\mathfrak{H}$ die Gerade $\mathfrak{H}_1$ und statt P der Flächenpunkt P_1 im Schnitt von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}^1$ auf, so erhält man zur Bestimmung der Zunahme $\varDelta_1$, welche (y_1) auf $\mathfrak{G}$ von P bis P_1 erfährt, die Gleichung:

$$\frac{\varDelta_1}{q}(1+\lambda k)(1+\lambda k_1)=(Z_2-\lambda Y_1)\lambda(k-k_1)$$
$$+\lambda(Y_1+kZ_2)(1+\lambda k_1)-\lambda(Y_1+k_1Z_2)(1+\lambda k)$$
$$=2\lambda(k-k_1)(Z_2-\lambda Y_1).$$

Ebenso erhält man für die Zunahme $\varDelta_2$, welche y_1 auf $\mathfrak{G}$ von P bis zum Schnitt P_2 mit einer Geraden $\mathfrak{H}_2$ erfährt, die mit k_2 statt k an die Stelle von $\mathfrak{H}$ tritt:

$$\frac{\varDelta_2}{q}(1+\lambda k)(1+\lambda k_2)=2\lambda(k-k_2)(Z_2-\lambda Y_1).$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\cdot\frac{1+\lambda k_2}{1+\lambda k_1}=\frac{k-k_2}{k-k_1}.$$

Hier lässt sich für das Verhältniss der Zunahmen $\varDelta_2$ und $\varDelta_1$ der linearen Function y_1 auf den Strecken PP_2 und PP_1 das Verhältniss der Strecken selbst einführen.

Endlich trete aber mit λ' statt λ für $\mathfrak{G}$ eine Gerade $\mathfrak{G}'$ auf, welche $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ in P', P'_1, P'_2 schneidet, so erhält man ebenso:

$$\frac{P'P'_2}{P'P'_1}\cdot\frac{1+\lambda' k_2}{1+\lambda' k_1}=\frac{k-k_2}{k-k_1}=\frac{PP_2}{PP_1}\cdot\frac{1+\lambda k_2}{1+\lambda k_1},$$
$$\frac{P'P'_2}{P'P'_1}:\frac{PP_2}{PP_1}=\frac{1+\lambda k_2}{1+\lambda k_1}:\frac{1+\lambda' k_2}{1+\lambda' k_1}.$$

Da auf der Rechten k nicht mehr vorkommt, so ändert sich auch das Verhältniss links nicht, wenn man mit k_0 statt k die Gerade $\mathfrak{H}$ durch eine andere $\mathfrak{H}_0$ ersetzt, welche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in P_0 und P'_0 schneiden soll, d. h. es ist auch:

$$\frac{P'P'_2}{P'P'_1}:\frac{PP_2}{PP_1}=\frac{P'_0P'_2}{P'_0P'_1}:\frac{P_0P_2}{P_0P_1}$$

die bekannte Beziehung des gleichen Doppelschnittverhältnisses.

Stuttgart, Februar 1869.

C. W. Baur.

XVI. Beweis eines Hilfssatzes in der Theorie der bestimmten Integrale. Von Hermann Hankel.

Kürzlich hat Herr Paul Dubois-Reymond (Crelle, Journ. T. 69, p. 78) einen neuen Mittelwerthsatz aufgestellt, der sich in der Theorie der bestimmten Integrale an verschiedenen Orten sehr brauchbar erweist, insbesondere aber die Dirichlet'sche Begründung der Fourier'schen Reihen und Integrale in überraschender Weise vereinfacht. Er besteht in der Formel:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \{f(b)-f(a)\}\int_\mu^b \varphi(x)\,dx,$$

worin μ einen unbekannten Mittelwerth zwischen a und b bedeutet, und setzt ausser der selbstverständlichen Bedingung, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen überall endlich sind, voraus, dass $f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ entweder nur zu- oder nur abnimmt.

Herr Dubois selbst hat zwei Beweise dieses Satzes gegeben. Der erste von ihnen, der auf einer Transformation des Integrales $\int_a^b f(x)\,\varphi(x)dx$ durch *integratio per partes* beruht, setzt die Existenz eines überall endlichen Differentialquotienten von $f(x)$ voraus und führt daher bei der Ableitung der Fourier'schen Reihen eine Bedingung ein, die ihnen nach Dirichlet's Untersuchungen nicht wesentlich ist. Der andere, von jener Voraussetzung unabhängige Beweis ist umständlicher, als man bei der einfachen Natur des Satzes selbst wünschen sollte.

Um den werthvollen Hilfssatz in meinen Vorlesungen anwenden zu können, sah ich mich genöthigt, einen einfachen und directen Beweis desselben zu suchen; vielleicht wird die Mittheilung eines solchen auch zur weiteren Kenntnissnahme des Satzes selbst führen.

Wie der ältere Mittelwerthsatz in der Theorie bestimmter Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\mu)\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wo μ einen Mittelwerth zwischen a und b bezeichnet, und $\varphi(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen immer positiv ist, aus dem Satze:

1) $$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n + (v_0 + v_1 + \ldots + v_n)\,M(u)$$

abgeleitet zu werden pflegt, so folgt jener neue Satz mit Leichtigkeit aus einer identischen Transformation jener Summen.

Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} s_n &= v_n,\\ s_{n-1} &= v_{n-1} + v_n,\\ s_{n-2} &= v_{n-2} + v_{n-1} + v_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ s_0 &= v_0 + v_1 + \ldots + v_n,\end{aligned}$$

so sieht man leicht, dass identisch:

$$s_n(u_n - u_{n-1}) + s_{n-1}(u_{n-2} - u_{n-2}) + \ldots + s_1(u_1 u_0) + s_0 u_0$$
$$= s_n u_n + (s_{n-1} - s_n) u_{n-1} + \ldots + (s_1 - s_2) u_1 + (s_0 - s_1) u_0$$
$$= u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n.$$

Bilden nun die

$$u_0, u_1 \ldots u_n$$

entweder eine immer steigende oder immer fallende Reihe, so dass die Differenzen:

$$u_n - u_{n-1}, \quad u_{n-1} - u_{n-2} \ldots u_1 - u_0$$

immer ein und desselben Zeichens sind, so ist nach dem älteren Mittelwerthsatze 1):

$$s_n(u_n - u_{n-1}) + s_{n-1}(u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + s_1(u_1 - u_0)$$
$$= [(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0)] M(s)$$
$$= (u_n - u_0) M(s),$$

wo $M(s)$ einen Mittelwerth zwischen dem grössten und kleinsten s bezeichnet, also:

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = u_0 s_0 + (u_n - u_0) M(s).$$

Ist nun

$$u = f(x), \quad u_0 = f(a), \quad u_n = f(b), \quad v = \varphi(x) dx,$$

also:

$$s = \int^b \varphi(x)\, dx,$$

wenn n, wie leicht verständlich, ins Unendliche wächst, so findet man

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)\,dx + \{f(b) - f(a)\}\int_\mu^b \varphi(x)\,dx,$$

wo μ ein Mittelwerth zwischen a und b ist und die Function $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen entweder immer wachsen oder immer abnehmen muss q. e. d.

Tübingen, 6. Juli 1869.

XVII. Aufgaben über die schiefe Ebene.

In einem unter der Presse befindlichen „Lehrbuche der Physik für höhere Schulen" habe ich jedem kleineren Abschnitte eine Reihe von Aufgaben folgen lassen. Bei den Aufgaben über die schiefe Ebene habe ich wegen Mangels an Raum aus einer Gruppe von Aufgaben, die dem Werke von Whewell: „*an elementary treatise on mechanics*" entnommen sind, nur einige gegeben, die übrigen angedeutet. Weil mir diese Art von Aufgaben in deutschen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen noch nicht aufgestossen ist, so theile ich hier die ganze Gruppe vollständig mit, in der Voraussetzung, dass die Aufgaben für den einen und anderen meiner Herren Collegen von Interesse sind.

In den folgenden Aufgaben soll die Ebene gesucht werden, längs welcher ein Körper aus der Ruhe herabfallen muss, damit er in kürzester Zeit von dem einen geometrischen Gebilde zum andern gelangt. Man hat sich dabei die gegebenen Figuren in derselben Verticalebene zu denken. Die Construction liefert die Durchschnittslinie dieser Ebene und der auf ihr senkrechten Ebene, längs welcher der Körper herabfallen muss.

Es soll die Ebene gesucht werden, längs welcher ein Körper herabfallen muss, um in kürzester Zeit zu gelangen

I. Von einem Punkte P nach einer Geraden AB.

Durch P lege man die horizontale Gerade, welche AB in A trifft. Auf AB trage man von A aus nach unten $AQ = AP$ ab. PQ ist die gesuchte Durchschnittslinie.

II. Von einer Geraden AB nach einem Punkte P.

Durch P ziehe man wiederum die horizontale Gerade, welche AB in A trifft. Auf AB trage man von A aus nach oben $AR = AP$ ab. RP ist die gesuchte Durchschnittslinie.

III. Von einem ausserhalb des Kreises gelegenen Punkte nach dem Kreise.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem tiefsten Punkt des Kreises. Der ausserhalb des Kreises gelegene Theil dieser Geraden ist die gesuchte Durchschnittslinie.

IV. Von einem gegebenen Kreise nach einem ausserhalb gelegenen Punkte.

Den gegebenen Punkt verbinde man mit dem höchsten Punkt des Kreises. Das ausserhalb des Kreises gelegene Stück dieser Geraden ist die gesuchte Durchschnittslinie.

V. Von einem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte nach dem Kreise.

Man verbinde den höchsten Punkt des Kreises mit dem gegebenen Punkte. Das Stück der Verbindungslinie dieser Geraden, welches zwischen Punkt und Kreis liegt, ist die verlangte Durchschnittslinie.

VI. Von einem Kreise nach einem innerhalb gelegenen Punkte.

Den tiefsten Punkt des gegebenen Kreises verbinde man mit dem gegebenen Punkte. Das zwischen Punkt und Kreis gelegene Stück der Verlängerung dieser Verbindungslinie ist die gesuchte Durchschnittslinie.

VII. Von einer Geraden nach einem Kreise.

Durch den tiefsten Punkt B des Kreises lege man die horizontale Gerade BM, welche die gegebene Gerade in M trifft. Auf der gegebenen Geraden trage man nach oben $MR = MB$ von M aus ab. Wenn RB den Kreis in S schneidet, so ist RS die verlangte Durchschnittslinie.

VIII. Von einem Kreise nach einer Geraden.

Durch den höchsten Punkt A des Kreises lege man die horizontale Gerade, welche die gegebene Gerade in M trifft. Auf der gegebenen Geraden trage man von M aus nach unten $MR = MA$ ab und verbinde R mit A. Schneidet diese Verbindungslinie den Kreis in S, so ist RS die gesuchte Durchschnittslinie.

IX. Von einem Kreise nach einem andern Kreise.

Man verbinde den höchsten Punkt des Kreises, von welchem der Punkt ausgeht, mit dem tiefsten Punkte des andern Kreises. Das zwischen beiden Kreisen gelegene Stück dieser Verbindungslinie ist die gesuchte Durchschnittslinie.

X. Von einem Kreise nach einem andern Kreise innerhalb desselben.

Man verbinde die tiefsten Punkte beider Kreise. Das Stück der Verlängerung dieser Verbindungslinie, welches zwischen beiden Kreisen liegt, ist die gesuchte Durchschnittslinie.

XI. Von einem Kreise, welcher innerhalb eines andern liegt, zu letzterem.

Man verbinde die höchsten Punkte beider Kreise. Das Stück der Verlängerung dieser Verbindungslinie, welches zwischen beiden Kreisen liegt, ist die verlangte Durchschnittslinie.

In den folgenden Fällen kann auch die Ebene gesucht werden, längs welcher ein Körper herabfallen muss, um die längste Zeit zu gebrauchen, um zu gelangen:

XII. Von einem ausserhalb eines Kreises gelegenen Punkte nach dem Kreise.

Den gegebenen Punkt verbindet man mit dem höchsten Punkt des Kreises. Diese Verbindungslinie nebst ihrer Verlängerung, genommen bis zum zweiten Durchschnitt mit dem Kreise, ist die verlangte Durchschnittslinie.

XIII. Von einem Kreise nach einem ausserhalb gelegenen Punkte.

Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem tiefsten Punkt des Kreises. Diese Verbindungslinie mit ihrer Verlängerung, genommen bis zum zweiten Durchschnitt mit dem Kreise, ist die gesuchte Durchschnittslinie.

XIV. Von einem Kreise nach einem andern ausserhalb desselben gelegenen Kreise.

Man verbinde den tiefsten Punkt des Kreises, von welchem der Punkt ausgeht, mit dem höchsten Punkt des andern Kreises und verlängere diese Verbindungslinie über beide Endpunkte hinaus bis zum abermaligen Durchschnitt mit dem Kreise. Die Verbindungslinie mit diesen Verlängerungen ist die gesuchte Durchschnittslinie.

Duisburg, den 25. Februar 1869.

Dr. W. Krumme,
Oberlehrer an der Realschule.

XVIII. Zur Demonstration des fortgepflanzten Schwingungszustandes. Von A. Kurz.

Die von Zech im Jahrgange 1866 dieser Zeitschrift beschriebene „Moleculreihe" (aus halbpfündigen Bleistücken, welche in gerader Linie aufgehängt und unter sich durch federnden Draht verbunden sind) habe ich kurz vor meinem Abgange in Speier und alsdann in Augsburg im physikalischen Cabinete der Maschinenbauschule angebracht.

Mit dem Vorzuge der Nachbildung der Längenschwingungen wetteifert derjenige, dass die erste Fortpflanzung dieser und noch mehr der Querschwingungen so langsam und daher leicht verfolgbar ist. Zech giebt als Geschwindigkeit beider „etwa 4 Fuss" an. Ich habe in Speier mit 11 Bleicylindern von 280 gr. und $0^m{,}61$ Abstand, wobei die Federn von 2 auf 3 gespannt und die äussersten Bleistücke durch eben solche Federn mit festen Endpunkten verknüpft waren, beobachtet: Zeitdauer der Fortpflanzung der Längenschwingungen vom 1. bis zum 11. Bleistücke 2 Secunden (4 halbe des Metronoms), woraus die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v_l = \frac{10\,.\,0{,}61}{2} = 3^m{,}1 \quad \text{(Fehler 0,4)}$$

und ebenso für die Querschwingungen 3½ Secunden, beziehungsweise

$$v_t = \frac{10\,.\,0{,}61}{3{,}5} = 1^m{,}7 \quad \text{(Fehler 0,2)}.$$

In Augsburg beträgt die Gesammtlänge $9^m{,}75$ von dem einen zum andern festen Ende; diese in 17 Theile getheilt machte 16 Bleikugeln vom

Abstande $\frac{0,75}{17}$ oder $0^m,57$ nöthig; das Gewicht derselben nahm ich grösser, zu 390 gr.; das Streckungsverhältniss der Federn blieb vorläufig 2 zu 3.

Gefunden wurde als Mittel aus je zwölf zu verschiedenen Malen gemachten Beobachtungen:

$$v_l = \frac{9,75 - 2 \,.\, 0,57}{3,5} = 2^m,5$$

(Fehler $0,^m4$, wenn beispielsweise statt 7 Halbsecunden 8 gezählt wurden);

$$v_t = \frac{9,75 - 2 \,.\, 0,57}{6} = 1^m,4$$

(Fehler $0^m,1$ bei 13 statt 12 Halbsecunden).

Man sieht die Herabminderung beider v durch die Erhöhung des Gewichtes, und zwar in gleichem Grade. Die Theorie der schwingenden Saiten liefert v_l gleich der Quadratwurzel aus Elasticitätsmodul durch Masse der Längeneinheit und v_t proportional der Quadratwurzel aus Spannung durch diese Masse. Nun stimmt $\sqrt{\frac{280}{390}}$ oder 0,8 mit $\frac{2,5}{3,1}$ und $\frac{1,4}{1,8}$, so dass man also unter obigen Umständen unsere Molecülreihe mit der Saite identificiren kann, deren Masse gleichheitlich auf die ganze Länge vertheilt ist.

Ich änderte hierauf auch die Spannung, indem ich diese von $\frac{3}{2}$ auf $\frac{4}{3}$ herabsetzte, also längere Federn anwendete, und fand, *ceteris paribus*

$$v_l = 2^m,5, \quad v_t = 1^m,2 \quad \text{(15 statt vorhin 12 Halbsecunden).}$$

Diese Constanz von v_l stimmt wieder mit der Theorie; ebenso dass v_t kleiner geworden ist. Das Verhältniss der beiden letzteren v_t müsste hiernach sein $\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}}$ oder 1,06, während $\frac{1,4}{1,2} = 1,17$. Diese Abweichung, nach welcher die Theorie $v_t = 1,3$ statt 1,2 verlangt, ist entweder den Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, oder aber es hat mit dieser geringeren Spannung die Erlaubtheit der obigen Identificirung aufgehört. Immerhin war mein Zweck erreicht, das Verhältniss der beiderlei Geschwindigkeiten zu erhöhen, indem jetzt v_l doppelt so gross wurde als v_t.

Erregt man die erste Kugel im Azimute 45°, so kann man ganz deutlich die Längen- und Quercomponente nach 7 und nach 12 resp. 15 Halbsecunden bei der letzten Kugel anlangen sehen. — Mit solchen Versuchen der ersten Fortschreitung und der ersten Reflexion des Schwingungszustandes zahlt der Apparat seine Anschaffungskosten von etwa fünf Thalern gewiss; hernach wird die Erscheinung unentwirrbar. Zur rascheren Aufeinanderfolge jener Versuche kann eine Beruhigungsstange mit Schälchen dienen, in welches die Kugeln passen.

Nach dem Lösen der Verbindung mit dem festen Ende wird die Anfangsspannung in der Molecülreihe variabel, und auch die Schwerkraft regt

ihr Haupt (Pendel). Also bleiben wir bei der geschlossenen Reihe und im Weiteren auch bei den longitudinalen Erzitterungen, weil die transversalen durch Coexistenz der longitudinalen complicirt werden. Zum Auffinden von Knoten würde die Theorie leuchten; aber auch die negativen Aufschlüsse derselben sind erwünscht.

Molecülreihe $x=0$ und $x=l$ für die beiden fixen Endpunkte; u die Verschiebung irgend eines Punktes x zu irgend einer Zeit t; zu integriren ist

$$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\cdot\frac{d^2u}{dx^2},$$

wo a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit; bekannt muss sein die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit sämmtlicher Molecüle. Letztere lassen wir Null sein, nicht blos weil sich die Rechnung dadurch auf die Hälfte reduciren, sondern auch weil sich dies am leichtesten im Versuche realisiren lässt. Bringt man in der Mitte die Ausbeugung b hervor, so könnte man die Anfangslage ($u=u_0$ für $t=0$) geben wollen durch

$$u_0=b\sin\frac{\pi x}{l}=\varphi(x).$$

(Siehe Poisson, *Traité de Méc. II*, oder Kahl, Aufgaben); dann fände man

$$u=b\,.\sin\frac{\pi x}{l}\,.\cos\frac{a\pi t}{l},$$

d. h. die Molecülreihe als Ganzes schwingend. Um $m-1$ Knoten zu erhalten, müsste die Anfangslage

$$u_0=b\,.\sin\frac{m\pi x}{l}$$

realisirt werden. Denkt man aber beispielsweise an

$$u_0=4b\,.\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right),$$

so erhält man die endlose Reihe

$$u=\frac{32b}{\pi^3}\left[\frac{1}{1^3}.\sin\frac{\pi x}{l}.\cos\frac{a\pi t}{l}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{l}.\cos\frac{3a\pi t}{l}+\ldots\right],$$

d. h. die Molecülreihe hat der Knoten zu viele, als dass man sie unterscheiden könnte.

Freundlicher Mittheilung meines früheren Lehrers C. entnehme ich die Bemerkung, dass man die Spannungsänderung zwischen zwei Stücken der Molecülreihe der Aenderung des Abstandes proportional setzen könnte. Conferatur Wärmeleitung in einem prismatischen Stabe, deren Differentialgleichung $\frac{du}{dt}=k\,.\frac{d^2u}{dx^2}$ lautet.

Hieran reiht sich auch die Hydrodiffusion, worüber R. Beez in diesem Journale 1865 nachgeschlagen werden kann.

Augsburg, am 24. Juni 1869.

XIX. Mit dem Anfertigen von Modellen für den Unterricht in der descriptiven Geometrie beschäftigt, bin ich auf eine Modification des Kaleidoscops gekommen, wodurch dieser Apparat eine interessante Verwendung beim Unterricht findet, indem er als Hilfsmittel, namentlich in dem Unterricht der Krystallographie, kostspielige und verwickelte Modelle ersetzt. Da ich in keinem mir bekannten Lehrbuche der Experimentalphysik weder eine Beschreibung noch eine Erwähnung eines derartigen Apparates finde, so muss ich wohl annehmen, dass derselbe neu ist.

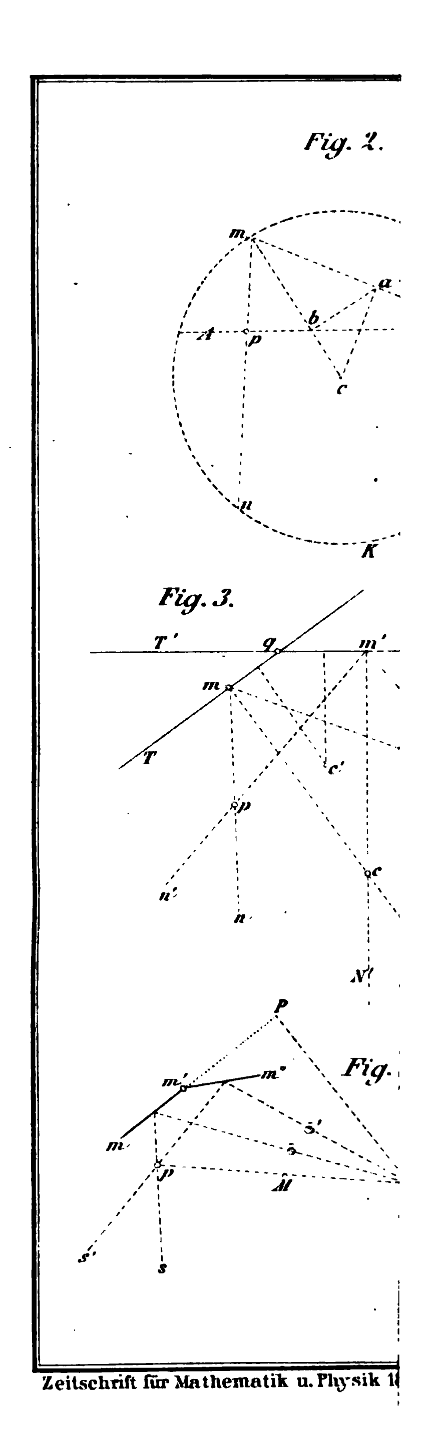
Das Wesentliche meines Apparates, den ich Krystalloscop nennen möchte und der so einfach ist, dass man sich füglich darüber wundern muss, dass er nicht schon längst construirt worden ist, besteht darin, dass man mit Hilfe einiger Spiegelglasstückchen die verschiedenen regelmässigen Körper der Geometrie nebst mannichfaltigen Ableitungen und Modificationen als räumliche durchsichtige Gebilde dem Auge vorzuführen im Stande ist. Fertigt man sich nämlich, unter Weglassung der Grundfläche, ein Netz von einer der Pyramiden, in welche jene Körper zerfallen, wenn man durch die Kanten und den Mittelpunkt derselben Ebenen legt, mit Hilfe von Spiegelglasstücken, die man auf starkes Papier aufleimt, so dass die einzelnen Theile sich umbiegen lassen, und bildet man die Pyramidenecke in der Art, dass die spiegelnden Flächen nach Innen liegen, so braucht man nur ein durchsichtiges Glas von der Form der den darzustellenden Körper begrenzenden Figuren in das Innere der Art zu legen, dass die Figur mit ihren Ecken in die Durchschnittskanten der Ecke fällt, um beim Hineinsehen den Körper als durchsichtigen Krystall zu erblicken.

Durch Einlegen von Glasstücken verschiedener Grösse, durch Abänderung ihrer Lage, durch Hinzufügung von farbigen Linien, die man auf denselben zieht, durch Aufsetzen von Pyramidchen, die aus Drahtstücken gebildet sind u. s. w. ist man im Stande, Körper der mannichfaltigsten Form, isolirt oder in einander steckend, überhaupt Gestalten hervorzubringen, deren Darstellung in solidem Modell theils unausführbar, theils mit grossen Kosten verbunden wäre.

Herr Optiker Müller in Giessen hat es übernommen, den kleinen Apparat um den Preis von etwa 12—15 Fl. in einfachster Form darzustellen. Bemerkt wird hierbei, dass die Netze der einzelnen Körper sich auseinander legen lassen, so dass das Ganze in einem kleinen Kästchen seinen Platz findet.

Giessen.

Dr. Th. Tasché.


Fig. 2.
m,
a
b
A
p
c
n
K
Fig. 3.
T'
q
m'
m
T
c'
p
c
n'
n
N'
P
Fig.
m'
m"
m
s'
s
p
M
s'
s

XXI.

Analytische Untersuchung der quadratischen Verwandtschaft.

Von

EDUARD WEYR,

ord. Hörer am Polytechnikum zu Prag.

---

1. Man kann in der Ebene entweder den Punkt oder den Strahl als Erzeugungselement aller höheren Gebilde — der Curven — betrachten, indem man diese als Oerter oder aber als Enveloppen auffasst; demgemäss kann man sich eine Kegelfläche als Erzeugniss eines Strahles oder als Einhüllende einer Ebene vorstellen.

Wir wollen in diesem Sinne den Punkt und den Strahl als Elemente des ebenen Systems, den Strahl und die Ebene aber als Elemente des Strahlenbündels bezeichnen.

Betrachtet man zwei ebene Systeme S und Σ und nimmt den Punkt als Element derselben an, so stehen dieselben in Verwandtschaft, sobald jedem Punkte des einen Systems Punkte des anderen gesetzmässig zugeordnet sind und umgekehrt. Zwei ebene Systeme sollen quadratisch oder eindeutig verwandt heissen, wenn zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte lineare Beziehungen stattfinden, so zwar, dass jedem Punkte des einen Systems im Allgemeinen nur ein Punkt des anderen entspricht. Führen wir zur Bestimmung der Punkte in S resp. in Σ homogene (Verhältniss-) Coordinaten x, y, z resp. ξ, η, ζ ein, so müssen zwischen denselben homogene lineare Gleichungen bestehen, wenn jedem Punkte des einen Systems im Allgemeinen nur ein Punkt des anderen entsprechen soll. Der Zweck dieser Arbeit ist es, die Abhängigkeit der Figuren so verwandter Systeme zu untersuchen.

Bezeichnet man mit dem Buchstaben f homogene lineare Functionen von ξ, η, ζ, so werden die zwischen den Coordinaten entsprechender Punkte bestehenden Relationen jedenfalls die Form

1) $$x f_{i1} + y f_{i2} + z f_{i3} = 0; \qquad i = 1, 2$$

haben müssen; dann sei

$$f_{ij} \equiv a_{ij} \xi + b_{ij} \eta + c_{ij} \zeta,$$

wobei $j = 1, 2, 3$ zu setzen ist. Ordnet man die Gleichungen 1) nach den Coordinaten ξ, η, ζ, so erhält man sie in der Form

2) $$\xi \varphi_{i1} + \eta \varphi_{i2} + \zeta \varphi_{i3} = 0 \qquad i = 1, 2$$

worin

$$\varphi_{ij} \equiv m_{i1} x + m_{i2} y + m_{i3} z$$

ist; hierbei ist $m \equiv a, b, c$, je nachdem man $j = 1, 2, 3$ setzt, wie es ja eine aufmerksame Betrachtung der Gleichungen 1) sofort zeigt. Die Gleichungen 1) oder ihre Umformungen 2) sollen, weil sie die Natur der Verwandtschaft festsetzen, Verwandtschaftsgleichungen genannt werden.

Lässt man in diesen Verwandtschaftsgleichungen die Grössen x, y, z und ξ, η, ζ homogene Liniencoordinaten bedeuten, so sind die Systeme S und Σ in der Art aufeinander bezogen, dass jeder Geraden des einen Systems im Allgemeinen nur eine Gerade des anderen Systems entspricht. Diese Interpretation liefert offenbar dieselben Resultate, wie das Reciprocitätsgesetz, oder besser gesagt, dieses Gesetz spricht sich durch die doppelte Interpretation der Coordinaten aus.

Um in der folgenden Untersuchung auch das Strahlenbündel mit begreifen zu können, seien

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

die Gleichungen dreier durch den Scheitel des Strahlenbündels gehender Ebenen, die jedoch nicht durch die nämliche Gerade gehen sollen. Die Gleichung jeder dem Strahlenbündel angehörigen Ebene lässt sich dann auf die Form

$$D \equiv x A + y B + z C = 0$$

bringen, wobei x, y, z constante Grössen sind. Fasst man dieselben — eigentlich ihre Verhältnisse — als Coordinaten der Ebene D auf, so lässt sich zeigen, dass eine homogene Function n^{ten} Grades dieser Coordinaten gleich Null gesetzt, eine Kegelfläche n^{ter} Classe repräsentirt, deren Scheitel mit jenem des Strahlenbündels identisch ist. Betrachtet man nämlich alle Ebenen, deren Coordinaten einer linearen Relation

$$x' x + y' y + z' z = 0$$

genügen, so sieht man leicht, dass sie einen Strahl einhüllen, nämlich den, den drei Ebenen

$$\frac{B}{x'} - \frac{C}{z'} = 0, \quad \frac{C}{z'} - \frac{A}{x'} = 0, \quad \frac{A}{x'} - \frac{B}{y'} = 0$$

angehörigen Strahl, weil die Coordinaten jedes seiner Punkte der Gleichung:

$$A : B : C = x' : y' : z'$$

und somit auch

$$D \equiv x' A + y' B + z' C = 0$$

genügen.

Genügen die Coordinaten x, y, z einer beweglichen Ebene D einer homogenen Gleichung n^{ten} Grades, so liefert die Combination derselben mit einer linearen Gleichung

$$x'x + y'y + z'z = 0$$

n Werthsysteme x, y, z, d. h. durch jeden Strahl des Bündels gehen n Lagen (die theilweise oder ganz imaginär werden können) unserer beweglichen Ebene, woraus folgt, dass dieselbe eine Kegelfläche n^{ter} Classe einhüllt.

Um die folgenden Untersuchungen endlich auch für den Fall auf das Strahlenbündel ausdehnen zu können, wo man den Strahl als Element des letzteren auffasst, denke man sich die Gleichungen jedes im Strahlenbündel enthaltenen Strahles auf die Form

$$A : B : C = x : y : z$$

gebracht und fasse x, y, z als Coordinaten des letzteren auf. Alle Strahlen, deren Coordinaten x, y, z einer linearen Gleichung

$$x'x + y'y + z'z = 0$$

genügen, erfüllen augenscheinlich die durch

$$x'A + y'B + z'C = 0$$

repräsentirte Ebene; alle Strahlen hingegen, deren Coordinaten x, y, z an eine homogene Relation n^{ten} Grades gebunden sind, gehören einer Kegelfläche n^{ter} Ordnung an, deren Scheitel sich ebenfalls im Scheitel des Strahlenbündels befindet.

Diesen Bemerkungen zufolge lassen die nachfolgenden analytischen Resultate eine vierfache geometrische Interpretation zu, wovon jedoch blos jene durchgeführt werden soll, welche der Auffassung der Grössen x, y, z als homogener Punktcoordinaten entspricht.

2. Im Allgemeinen werden Verwandtschaften in der Art festgesetzt, dass man Elementen des einen Gebildes Elemente des anderen als entsprechend zuordnet. Es fragt sich nun, durch wie viele Paare entsprechender Punkte die quadratische Verwandtschaft zwischen zwei ebenen Systemen festgesetzt ist?

Vorerst ist klar, dass die Verwandtschaftsgleichungen zwei von einander unabhängige Gleichungen sein müssen, wenn sie überhaupt eine Verwandtschaft festsetzen sollen. Ordnet man nun einem Punkte x_i, y_i, z_i von S einen Punkt ξ_i, η_i, ζ_i von Σ eindeutig (quadratisch) zu, so erhält man, wenn man diese Coordinaten in eine Verwandtschaftsgleichung einsetzt, für die 9 Coefficienten derselben eine Bedingungsgleichung. Würde man auf diese Weise acht Punkten von S, acht Punkte von Σ resp. zuordnen, so wären die Coefficienten jeder Verwandtschaftsgleichung an acht Bedingungsgleichungen gebunden.

Da nun die in jeder Verwandtschaftsgleichung auftretenden neun Constanten homogen vertheilt sind, so liessen sie sich alle (eigentlich ihre Verhältnisse) bestimmen und somit könnten diesen Bedingungen nicht zwei

unabhängige Verwandtschaftsgleichungen Genüge leisten. Es kann daher nicht verlangt werden, eine eindeutige Verwandtschaft so herzustellen, dass acht Paare willkürlicher Punkte Paare von entsprechenden Punkten werden. Dadurch werden wir auf folgenden Satz geführt, den wir sofort beweisen wollen:

„Die eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei ebenen Systemen ist festgestellt, sobald man sieben Paare entsprechender Punkte angiebt."

Entsprechen nämlich den Punkten x_i, y_i, z_i die Punkte ξ_i, η_i, ζ_i, wobei man der Reihe nach $i = 1, 2 \ldots 7$ zu setzen hat, so erhält man, wenn man diese Coordinatenwerthe z. B. in die erste der Verwandtschaftsgleichungen 1) einsetzt, für die neun Coefficienten derselben sieben Bedingungsgleichungen. Mit Hilfe derselben kann man sieben der Coefficienten in linearer Weise durch die zwei anderen ausdrücken, z. B. durch b_{13} und c_{13}. Man erhält somit

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 b_{13} + \mu_1 c_{13}, \\
b_{11} &= \lambda_2 b_{13} + \mu_2 c_{13}, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
a_{13} &= \lambda_7 b_{13} + \mu_7 c_{13},
\end{aligned}
$$

wobei die Grössen λ und μ Functionen der Coordinaten x_i, y_i, z_i, ξ_i, η_i, ζ_i und zwar Quotienten aus Determinanten aus diesen Coordinatenwerthen sind. Nimmt man für b_{13} und c_{13} ganz beliebige Werthe an, so liefert eine jede solche Annahme eine Verwandtschaftsgleichung, die den gestellten Bedingungen genügt; denn sobald man b_{13} und c_{13} angenommen hat, ergeben sich, wie eben gezeigt wurde, alle Coefficienten der Verwandtschaftsgleichung. Sind b_{13}, c_{13} ein Paar und b'_{13}, c'_{13} ein zweites Paar von individuellen Werthen, so erhalten wir auf die besagte Weise folgende zwei Verwandtschaftsgleichungen

$$
\begin{aligned}
V_1 &\equiv (\lambda_1 b_{13} + \mu_1 c_{13})\, x\xi + \ldots + b_{13}\, z\eta + c_{13}\, z\zeta = 0, \\
V_2 &\equiv (\lambda_1 b'_{13} + \mu_1 c'_{13})\, x\xi + \ldots + b'_{13}\, z\eta + c'_{13}\, z\zeta = 0.
\end{aligned}
$$

Diese zwei Verwandtschaftsgleichungen sind offenbar von einander unabhängig und setzen in der That zwischen den Systemen S und Σ eine eindeutige Verwandtschaft in der Art fest, dass den sieben Punkten x_i, y_i, z_i die resp. Punkte ξ_i, η_i, ζ_i entsprechen. Es lässt sich nun zeigen, dass jede andere auf diese Weise festgestellte Verwandtschaftsgleichung nichts Neues liefern würde, d. h. dass Coordinatenwerthe, die die Gleichungen

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0$$

erfüllen, auch jeder dritten auf besagte Weise hergestellten Verwandtschaftsgleichung genügen müssen.

Seien zu dem Ende b''_{13}, c''_{13} zwei willkürliche Werthe, dann ist die resultirende Verwandtschaftsgleichung die folgende:

$$V_3 \equiv (\lambda_1 b''_{13} + \mu_1 c''_{13})\, x\xi + \ldots + b''_{13} z\eta + c''_{13} z\zeta = 0.$$

Es lassen sich nun immer zwei Zahlen ϱ und σ so finden, dass

$$b''_{13} = \varrho b_{13} + \sigma b'_{13},$$
$$c''_{13} = \varrho c_{13} + \sigma c'_{13}$$

ist. Setzt man dieses in die vorhergehende Gleichung ein und ordnet nach ϱ und σ, so folgt

$$V_3 \equiv \varrho V_1 + \sigma V_2 = 0,$$

woraus sofort erhellt, dass Coordinatenwerthe, die $V_1 = 0$ und $V_2 = 0$ befriedigen, auch $V_3 = 0$ genügen müssen. Da man wohl auf diese Weise unendlich viele Verwandtschaftsgleichungen herstellen kann, die von den Coordinaten x_i, y_i, z_i und ξ_i, η_i, ζ_i, $i = 1, 2 \ldots 7$ erfüllt werden, weil aber alle so aufgestellten Verwandtschaftsgleichungen zwischen S und Σ die nämliche Zuordnung von Punkten feststellen, so ist der ausgesprochene Satz erwiesen.

Es ist gut zu bemerken, dass, wenn zwei Gleichungen

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0$$

eine eindeutige Verwandtschaft zwischen S und Σ fixiren, durch Gleichungen von der Form

$$\varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2 = 0, \quad \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2 = 0,$$

wo die Grössen ϱ und σ Constanten sind, die nämliche eindeutige Verwandtschaft festgestellt ist.

3. Nimmt man in dem einen Systeme, z. B. in Σ, einen Punkt ξ, η, ζ an, so bestimmt sich der ihm in S eindeutig verwandte aus den Verwandtschaftsgleichungen 1) oder 2), indem man in dieselben die letztangeschriebenen einsetzt und sie nach den Grössen $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ auflöst, was dann die homogenen Coordinaten x, y, z des gesuchten Punktes liefert. Es entspricht da natürlich jedem Punkte im Allgemeinen wieder nur ein Punkt; ob aber Ausnahmen stattfinden und wie viele, wird die Untersuchung dieses Artikels lehren.

Denkt man sich in Σ einen Punkt ξ, η, ζ so gewählt, dass, wenn man seine Coordinaten in die Verwandtschaftsgleichungen 1) einsetzt, dieselben identisch werden und sich blos durch einen constanten Factor λ unterscheiden, so reduciren sich die zwei Gleichungen für x, y, z blos auf eine, welche linear ist. Somit entsprechen dann dem so gewählten Punkte ξ, η, ζ alle Punkte der in diesem Falle durch jede der Gleichungen 1) dargestellten Geraden. Sollen sich nun die Gleichungen 1) nach dem Einsetzen der Werthe ξ, η, ζ nur durch einen constanten Factor λ unterscheiden, so muss man folgende Bedingungsgleichungen haben:

$$f_{21} = \lambda f_{11}, \quad f_{22} = \lambda f_{12}, \quad f_{23} = \lambda f_{13}.$$

Ordnet man diese Gleichungen nach ξ, η, ζ, so folgt:

$$3) \quad \begin{cases} \xi (a_{21} - \lambda a_{11}) + \eta (b_{21} - \lambda b_{11}) + \zeta (c_{21} - \lambda c_{11}) = 0, \\ \xi (a_{22} - \lambda a_{12}) + \eta (b_{22} - \lambda b_{12}) + \zeta (c_{22} - \lambda c_{12}) = 0, \\ \xi (a_{23} - \lambda a_{13}) + \eta (b_{23} - \lambda b_{13}) + \zeta (c_{23} - \lambda c_{13}) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen ξ, η, ζ, so bleibt als Resultat der Elimination die Determinante:

$$4)\qquad \begin{vmatrix} (a_{21}-\lambda a_{11}), & (b_{21}-\lambda b_{11}), & (c_{21}-\lambda c_{11}) \\ (a_{22}-\lambda a_{12}), & (b_{22}-\lambda b_{12}), & (c_{22}-\lambda c_{12}) \\ (a_{23}-\lambda a_{13}), & (b_{23}-\lambda b_{13}), & (c_{23}-\lambda c_{13}) \end{vmatrix} = 0.$$

Man übersieht auf den ersten Blick, dass diese Gleichung in λ vom dritten Grade ist, so dass sie drei Werthe für diese Grösse liefert. Jeder dieser Werthe λ giebt wiederum in 3) gesetzt, und diese Gleichungen aufgelöst gedacht, ein Werthsystem ξ, η, ζ, d. h. einen Punkt, dem in S nicht ein Punkt, sondern alle Punkte einer Geraden entsprechen. Da die cubische Gleichung 4) höchstens zwei imaginäre Wurzeln λ haben kann, so giebt es im System Σ drei Punkte, von denen auch zwei imaginär werden können, denen jedem in S eine ganze Gerade entspricht. Zugleich ist auch ersichtlich, wie man diese drei Punkte und die ihnen entsprechenden Geraden finden kann.

Will man ebenso jene Punkte in S finden, denen in Σ nicht ein Punkt, sondern ganze Punktreihen zugeordnet sind, so hat man für dieselben folgende Bedingungsgleichungen:

$$\varphi_{21} = \mu \varphi_{11}, \quad \varphi_{22} = \mu \varphi_{12}, \quad \varphi_{23} = \mu \varphi_{13},$$

wo μ einen constanten Factor bedeutet. Ordnet man diese Gleichungen nach x, y, z, so folgt:

$$5)\qquad \begin{cases} x\,(a_{21}-\mu a_{11}) + y\,(a_{22}-\mu a_{12}) + z\,(a_{23}-\mu a_{13}) = 0, \\ x\,(b_{21}-\mu b_{11}) + y\,(b_{22}-\mu b_{12}) + z\,(b_{23}-\mu b_{13}) = 0, \\ x\,(c_{21}-\mu c_{11}) + y\,(c_{22}-\mu c_{12}) + z\,(c_{23}-\mu c_{13}) = 0. \end{cases}$$

Eliminirt man wiederum die Coordinaten, so ergiebt sich für μ die cubische mit 4) identische Gleichung:

$$6)\qquad \begin{vmatrix} (a_{21}-\mu a_{11}), & (a_{22}-\mu a_{12}), & (a_{23}-\mu a_{13}) \\ (b_{21}-\mu b_{11}), & (b_{22}-\mu b_{12}), & (b_{23}-\mu b_{13}) \\ (c_{21}-\mu c_{11}), & (c_{22}-\mu c_{12}), & (c_{23}-\mu c_{13}) \end{vmatrix} = 0,$$

welche für μ drei Werthe liefert, von denen zwei imaginär sein können. Jede Wurzel μ in 5) eingesetzt, liefert ein Werthsystem x, y, z, d. h. einen Punkt, dem in Σ die totale Gerade entspricht, deren Gleichung man erhält, wenn man dieses Werthsystem x, y, z in eine oder die andere Gleichung 2) einsetzt. — Man kann somit sagen:

„Sind zwei ebene Systeme eindeutig verwandt, so giebt es in jedem Systeme drei Punkte (von denen auch zwei imaginär sein können), deren jedem eine ganze Punktreihe zugeordnet ist."

Offenbar sind diese Punkte ganz besondere Punkte, welche die Natur der Verwandtschaft charakterisiren. Sie mögen mit Berücksichtigung der hierher einschlägigen, im Laufe der Untersuchung angegebenen Arbeiten Hauptpunkte heissen; die einem Hauptpunkt entsprechende Gerade mag Hauptlinie genannt werden. Es giebt somit in jedem Systeme drei Hauptpunkte und drei Hauptlinien.

Weil die Verwandtschaftsgleichungen 1) reelle Gleichungen sind, d. h. nur reelle Coefficienten enthalten, so ist es einleuchtend, dass einem reellen Hauptpunkt eine reelle und einem imaginären Hauptpunkt eine imaginäre Hauptlinie zugeordnet sein muss.

4. Es soll vorerst der Fall betrachtet werden, in welchem die Hauptpunkte des einen Systems, z. B. die von S, alle drei reell sind, in welchem also die cubische Gleichung 6) lauter reelle Wurzeln μ hat. Mögen die besagten Hauptpunkte durch L, M und N bezeichnet werden; die ihnen in Σ resp. entsprechenden Hauptlinien sollen durch λ, μ, ν angedeutet werden. Ferner sollen die Seiten des Dreiecks (L, M, N), das wir das Hauptdreieck von S nennen wollen, mit l, m, n, analog den gegenüberliegenden Ecken bezeichnet werden. Man nehme das Dreieck (L, M, N) zum Fundamentaldreieck eines homogenen Punktcoordinatensystems an und zwar so, dass die Coordinaten x, y, z eines Punktes seinen Abständen von den resp. Seiten l, m, n proportional sein sollen. Im Systeme Σ dagegen möge das Dreiseit (λ, μ, ν) zum Fundamentaldreiseit angenommen werden, so zwar, dass die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes den von demselben auf λ, μ, ν gefällten respectiven Perpendikeln proportional sind. Es fragt sich nun, welchen Einfluss eine solche Coordinatentransformation auf die Form der Verwandtschaftsgleichungen haben muss. Jedenfalls werden die neuen (transformirten) Verwandtschaftsgleichungen in der Form 1) enthalten sein, weil dies die allgemeine Form der Verwandtschaftsgleichungen eindeutig verwandter Systeme ist. — Dem Punkte N, d. i. $0, 0, z$ soll in Σ die totale Gerade $\zeta = 0$ entsprechen. Setzt man in 2) für x, y, z die Werthe $0, 0, z$, so übergehen sie in

$$\xi a_{i3} z + \eta b_{i3} z + \zeta c_{i3} z = 0,$$

und da dies mit $\zeta = 0$ identisch sein soll, so muss

$$a_{13} = b_{13} = a_{23} = b_{23} = 0$$

sein. Weil dem Punkte L, d. i. $x, 0, 0$ die ganze Gerade $\xi = 0$ zugeordnet sein soll, so folgt ebenso die Bedingung:

$$b_{11} = c_{11} = b_{21} = c_{21} = 0,$$

und endlich ergiebt sich, wenn man beachtet, dass dem Punkte M, d. i. $0, y, 0$ die Gerade $\eta = 0$ entsprechen soll, die Bedingungsgleichung:

$$a_{12} = c_{12} = a_{22} = c_{22} = 0.$$

Wenn man die sechs gewonnenen Bedingungsgleichungen berücksichtigt, so schreiben sich die Verwandtschaftsgleichungen folgendermassen:

$$7) \quad \begin{cases} a_{11} x\xi + b_{12} y\eta + c_{13} z\zeta = 0, \\ a_{21} x\xi + b_{22} y\eta + c_{23} z\zeta = 0. \end{cases}$$

Man sieht, dass die besondere Annahme des Coordinatensystems die Verwandtschaftsgleichungen wesentlich vereinfachte.

Sucht man den dem Punkte $(\lambda\mu)$, d. i. dem Schnitte von λ und μ — den wir durch N bezeichnen wollen — entsprechenden Punkt in S, so hat man in 7) statt ξ, η, ζ die Werthe $0, 0, \zeta$ einzusetzen und erhält $z = 0$,

d. i. dem Punkte $(\lambda\,\mu) = N$ entspricht die totale Gerade $z = 0$, d. h. die Gerade n. In eben der Weise sieht man, dass den Punkten $(\mu\,\nu) = \varLambda$ und $(\nu\,\lambda) = M$ die resp. Geraden l und m zugeordnet sind. Somit sind die Ecken des Dreiseits $(\lambda\,\mu\,\nu)$ Hauptpunkte von Σ und die Seiten des Dreiecks $(L\,M\,N)$ die ihnen entsprechenden Hauptlinien von S. Wir erhalten daher den Satz:

> „Der Schnittpunkt zweier Hauptlinien ist ein Hauptpunkt und die Verbindungslinie zweier Hauptpunkte ist eine Hauptlinie."

Daraus folgt auch unmittelbar, dass, wenn alle Hauptpunkte von S reell sind, es auch alle von Σ sein müssen und umgekehrt, was auch sofort aus der Identität der Gleichungen 4) und 6) folgt.

5. Es soll in diesem Artikel erörtert werden, in welcher Weise die eindeutige Verwandtschaft zwischen ebenen Systemen durch Angabe von Hauptpunkten und Hauptlinien bestimmt werden kann. Da lässt sich erstens folgender Satz beweisen:

> „Die eindeutige Verwandtschaft zweier ebenen Systeme ist festgestellt, sobald man alle Hauptpunkte des einen Systems und die ihnen entsprechenden Hauptlinien des anderen nebst einem Paare entsprechender Punkte kennt."

Nimmt man die gegebenen Hauptdreiecke zu Fundamentaldreiecken der homogenen Coordinaten und zwar in der symmetrischen Weise, wie dies im vorigen Artikel geschah, so müssen die Verwandtschaftsgleichungen jedenfalls die Form

$$a_{i1}\,x\,\xi + b_{i2}\,y\,\eta + c_{i3}\,z\,\zeta = 0, \quad i = 1,2$$

haben. Sind nun die Coordinaten der zwei gegebenen entsprechenden Punkte x', y', z' und $\xi', \eta'\,\zeta'$, so liefert dies die Bedingungsgleichung

$$a_{i1}\,x'\,\xi' + b_{i2}\,y'\,\eta' + c_{i3}\,z'\,\zeta' = 0.$$

Nimmt man für b_{i2} und c_{i3} zwei beliebige Werthe b_{12} und c_{13}, so ergiebt sich aus der letzten Gleichung für a_{i1} ein bestimmter Werth a_{11} und man erhält die Verwandtschaftsgleichung

$$a_{11}\,x\,\xi + b_{12}\,y\,\eta + c_{13}\,z\,\zeta = 0.$$

Setzt man statt b_{i2} und c_{i3} andere willkürliche Werthe b_{22}, c_{23}, so folgt ebenso für a_{i1} ein neuer Werth a_{21}, und dies liefert die zweite Verwandtschaftsgleichung

$$a_{21}\,x\,\xi + b_{22}\,y\,\eta + c_{23}\,z\,\zeta = 0.$$

Diese beiden Verwandtschaftsgleichungen fixiren eine eindeutige Verwandtschaft, die offenbar den gestellten Bedingungen genügt. Weil man nun genau so wie im Art. 2 zeigen kann, dass jede neue Verwandtschaftsgleichung, die man auf die angegebene Weise ableiten würde, erfüllt sein müsse, wenn die zwei angeschriebenen Gleichungen erfüllt sind, so ist der ausgesprochene Satz erwiesen.

„Zwischen zwei ebenen Systemen ist die eindeutige Verwandtschaft fixirt, sobald man zwei Hauptpunkte des einen, die ihnen entsprechenden Hauptlinien des anderen, nebst drei Paaren entsprechender Punkte angiebt."

Sind z. B. in S zwei Hauptpunkte L, M und in Σ die ihnen entsprechenden Hauptlinien λ, μ gegeben, so nehme man L und M auf die in Art. 4 gezeigte Art zu Fundamentalpunkten der Coordinaten, die Linien λ, μ dagegen zu Fundamentalseiten des in Σ liegenden Coordinatensystems. Dies giebt eben nach Art. 4 die Bedingungen:

$$b_{11} = c_{11} = b_{21} = c_{21} = 0,$$
$$a_{12} = c_{12} = a_{22} = c_{22} = 0;$$

somit müssen die Verwandtschaftsgleichungen jedenfalls die Form

$$\xi (a_{i1} x + a_{i3} z) + \eta (b_{i2} y + b_{i3} z) + \zeta c_{i3} z = 0, \quad i = 1, 2$$

haben. Hat man nun drei Paar entsprechender Punkte x_j, y_j, z_j und ξ_j, η_j, ζ_j, $j = 1, 2, 3$ gegeben, so liefern diese für die Coefficienten jeder Verwandtschaftsgleichung drei Bedingungsgleichungen; weil in jeder Verwandtschaftsgleichung nur zwei mehr, d. h. fünf homogen vertheilte Coefficienten auftreten, so folgt wie in Art. 2, dass sich wohl unendlich viele Verwandtschaftsgleichungen aufstellen lassen, deren Coefficienten besagten drei Bedingungsgleichungen genügen, dass aber jede so hergestellte Verwandtschaftsgleichung von Coordinatenwerthen erfüllt ist, sobald dieselben zweien von ihnen genügen. Dadurch aber ist der ausgesprochene Satz erwiesen. Endlich ergiebt sich noch Folgendes: „Die eindeutige Verwandtschaft zwischen zwei ebenen Systemen ist festgesetzt, wenn man einen Hauptpunkt eines Systems, die entsprechende Hauptlinie im anderen und fünf Paare entsprechender Punkte angiebt."

Ordnet man nämlich einem Punkte L von S eine Gerade λ von Σ als Hauptlinie zu, so nehme man L zu einer Ecke eines sonst beliebigen Fundamentaldreiecks der Coordinaten, λ dagegen als eine Seite eines eben solchen Dreiecks in Σ an. Dies giebt nach Art. 4 die Bedingungsgleichungen:

$$b_{11} = c_{11} = b_{21} = c_{21} = 0,$$

d. h. jede Verwandtschaftsgleichung enthält nur sieben homogen auftretende Coefficienten, somit um zwei mehr als Punktepaare gegeben sind, wodurch nach Früherem die Richtigkeit des Satzes sofort einleuchtet.

Die angestellten Betrachtungen zeigen, dass die Angabe eines Hauptpunktes und der ihm entsprechenden Hauptlinie der Angabe von zwei Paaren entsprechender Punkte gleichkommt.

6. Wir kehren nun zu der weiteren Untersuchung für den Fall zurück, wo die Hauptpunkte des einen und somit jene des anderen insgesammt reell sind. Nehmen wir die Hauptdreiecke in der in Art. 4 angegebenen Weise zu Fundamentaldreiecken der homogenen Coordinaten, so müssen die Verwandtschaftsgleichungen die Form 7) haben, nämlich:

$$a_{11}\,x\xi + b_{12}\,y\eta + c_{13}\,z\zeta = 0,$$
$$a_{21}\,x\xi + b_{22}\,y\eta + c_{23}\,z\zeta = 0.$$

Eliminiren wir aus denselben successive die Producte $x\xi$, $y\eta$ und $z\zeta$, so gelangen wir nach einer leichten Umformung zu drei neuen Gleichungen, die uns eine sehr wichtige Eigenschaft eindeutig verwandter Systeme kundgeben; nämlich zu den folgenden:

$$8)\qquad \begin{aligned} \frac{y}{z}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} &= -\frac{\zeta}{\eta}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix} \\ \frac{z}{x}\begin{vmatrix} b_{12}, & b_{22} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix} &= -\frac{\xi}{\zeta}\begin{vmatrix} b_{12}, & b_{22} \\ a_{11}, & a_{21} \end{vmatrix} \\ \frac{x}{y}\begin{vmatrix} c_{13}, & c_{23} \\ a_{11}, & a_{21} \end{vmatrix} &= -\frac{\eta}{\xi}\begin{vmatrix} c_{13}, & c_{23} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}.$$

Da die vorkommenden Determinanten constante Grössen sind, so sieht man leicht, dass diese Gleichungen projectivische Eigenschaften ausdrücken. Heisst man nämlich jene Strahlen der Büschel L und $\varLambda$ projectivisch entsprechend, die diese Punkte mit eindeutig verwandten Punkten verbinden, so ist $\frac{y}{z}$ das Theilverhältniss eines Strahles von L bezüglich der Hauptlinien m und n; $\frac{\zeta}{\eta}$ dagegen das Theilverhältniss des entsprechenden Strahles in Σ bezüglich ν und μ jedoch. Weil das eine Theilverhältniss sich vom anderen nur durch einen constanten Factor unterscheidet, so sind die Büschel L und $\varLambda$ projectivisch, und zwar entspricht dem Strahle m (d. i. $y=0$) der Strahl ν (d. i. $\zeta=0$), und dem Strahle n der Strahl μ. Ebenso folgt aus der zweiten Gleichung, dass die Büschel M und M projectivisch sind, so zwar, dass l und ν ein und n und λ ein zweites Paar entsprechender Strahlen bilden. Desgleichen sind die Büschel N und N homographisch, wobei dem Strahl l der Strahl μ, und m der Strahl λ zugeordnet ist. — Wir haben somit folgenden Satz erhalten:

„Verbindet man beliebige Punkte von S mit den Hauptpunkten L, M, N und die entsprechenden Punkte von Σ mit $\varLambda$, M, N, so sind die resp. Büschel L, M, N und $\varLambda$, M, N projectivisch und zwar sind die durch homologe Scheitel gehenden, ungleich bezeichneten Hauptlinien entsprechende Strahlen derselben.“

Es mag uns gestattet werden, immer gleich an den betreffenden Stellen Arbeiten zu citiren, welche auf diese Betrachtungen Bezug haben. — Da erkennen wir aus dem eben gefundenen Satze, dass wir zwei ebene Systeme eindeutig in folgender Weise auf einander beziehen können:

Wir nehmen in S zwei Strahlenbüschel L und M an, und beziehen das erstere projectivisch auf ein Büschel $\varLambda$ und das letztere ebenso auf ein Büschel M im Systeme Σ. Durch jeden Punkt a von S geht ein Strahl von L und einer von M; wo sich die diesen Strahlen resp. in $\varLambda$ und M pro-

jectivisch zugeordneten Strahlen in Σ schneiden, erhält man einen Punkt a', der dem Punkte a entspricht. Man sieht sofort, dass L und M zwei Hauptpunkte von S sind, denen in Σ zwei durch $\varLambda$ resp. M gehende Hauptlinien λ und μ entsprechen werden; diese zwei letzteren Strahlen werden den dritten Hauptpunkt N von Σ bestimmen. Ebenso werden sich die den Hauptpunkten $\varLambda$ und M entsprechenden Hauptlinien l und m (die resp. durch L und M gehen müssen) in dem dritten Hauptpunkte N von S treffen. Diese Verwandtschaft, welche nach unserer Definition eine eindeutige Verwandtschaft mit insgesammt reellen Hauptelementen ist, wurde von Herrn Fr. Seydewitz in seiner schönen Abhandlung „Darstellung der geometrischen Verwandtschaft etc.“ in Grunert's Archiv 7. Theil pag. 113 unter dem Namen geometrische Verwandtschaft behandelt. Der Herr Verfasser behandelt mit Hilfe dieser Verwandtschaft die höheren Curven und construirt auch einige derselben. Auf die Construction derselben werden wir später in aller Kürze von einem anderen, analytischen Standpunkte zurückkommen, der auch betreffs der Construction einige Erleichterung bieten dürfte.

7. Sei

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

die Gleichung einer in S liegenden Geraden; die Gleichung der ihr entsprechenden Curve erhält man offenbar dadurch, dass man aus dieser und den Gleichungen 7) die Coordinaten x, y, z eliminirt. Dies liefert

$$9)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\xi, & b_{12}\eta, & c_{13}\zeta \\ a_{21}\xi, & b_{23}\eta, & c_{23}\zeta \\ \alpha, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

welches offenbar die Gleichung eines durch alle drei Hauptpunkte von Σ gehenden Kegelschnittes ist, da derselben durch jede der drei Voraussetzungen $\eta=0,\ \zeta=0;\ \zeta=0,\ \xi=0;\ \xi=0,\ \eta=0$ genügt wird. Betrachtet man vier Punkte der in S angenommenen Geraden, so ist ihr Doppelverhältniss gleich dem Doppelverhältniss der über ihnen aus L errichteten Strahlen; dieses letztere ist jedoch nach Art. 6 gleich dem Doppelverhältnisse des über den vier entsprechenden Punkten in Σ aus $\varLambda$ errichteten Büschels, und weil der, der erstgenannten Geraden entsprechende Kegelschnitt ebenfalls durch $\varLambda$ geht, so folgt, dass jeder Geraden des einen Systems ein zu ihr projectivischer Kegelschnitt des anderen Systems entspricht, der durch alle drei Hauptpunkte hindurchgeht. In gewissen Fällen kann der einer Geraden entsprechende Kegelschnitt in das System zweier Geraden zerfallen, von denen die eine eine Hauptlinie ist; es tritt dies dann ein, wenn die erst angenommene Gerade durch einen Hauptpunkt ihrer Ebene geht. Nehmen wir z. B. eine durch L gehende Gerade von S:

$$\beta y + \gamma z = 0,$$

so entspricht ihr in Σ der Kegelschnitt:

$$\xi \cdot \begin{vmatrix} a_{11}, & b_{12}\eta, & c_{13}\zeta \\ a_{21}, & b_{22}\eta, & c_{23}\zeta \\ 0, & \beta, & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber offenbar das System zweier Geraden vor, wovon die eine $\xi = 0$, d. h. die Hauptlinie λ ist, während die andere eine durch den Punkt $\eta = 0$, $\zeta = 0$, d. h. eine durch A gehende Gerade sein muss. Ihre Gleichung ist auch:

$$-\frac{\gamma}{\beta}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} = -\frac{\zeta}{\eta}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix},$$

oder aber, da $-\frac{\gamma}{\beta} = \frac{y}{z}$ ist,

$$\frac{y}{z}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} = -\frac{\zeta}{\eta}\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix},$$

d. h. wenn man die Gleichungen 8) berücksichtigt: „Der durch L gehenden Geraden entspricht das System zweier Geraden, nämlich die Hauptlinie λ und die ihr im Büschel A projectivisch zugeordnete Gerade.“ Ganz dasselbe gilt bezüglich der anderen Hauptpunkte von S und jener von Σ.

8. Betrachten wir nun ganz allgemein den Fall, wo in einer Ebene eine willkürliche Curve n^{ter} Ordnung vorliegt und man die ihr quadratisch entsprechende Curve sucht. Sei also

$$F(x, y, z) = 0 \tag{10}$$

die Gleichung einer in S liegenden Curve C_n n^{ten} Ordnung, wobei nämlich der Functionsbuchstabe F eine homogene Function n^{ter} Grades der drei Coordinaten x, y, z bedeutet.

Betrachtet man die Gleichungen 7), so folgt auf den ersten Blick, dass die Grössen x, y, z resp. den Grössen

$$\eta\zeta\begin{vmatrix} b_{12}, & b_{22} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix}, \quad \zeta\xi\begin{vmatrix} c_{13}, & c_{23} \\ a_{11}, & a_{21} \end{vmatrix}, \quad \xi\eta\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix}$$

proportional sein müssen. Man kann somit

$$x = A\eta\zeta, \quad y = B\zeta\xi, \quad z = C\xi\eta$$

setzen, wobei die Grössen A, B, C die eben angeschriebenen Determinanten sind.

Setzen wir nur in F für x, y, z ihre Werthe, so ergiebt sich

$$F(A\eta\zeta, \quad B\zeta\xi, \quad C\xi\eta) = 0 \tag{11}$$

als die Gleichung jener Curve in Σ, die der durch $F(x, y, z) = 0$ dargestellten Curve quadratisch entspricht. Nun besteht letztere Gleichung allgemein aus Gliedern von der Form $x^p\, y^q\, z^r$, wobei $p + q + r = n$ ist; dieses allgemeine Glied übergeht somit nach der Einführung der gefundenen Werthe in

$$\eta^p\, \zeta^p\, \zeta^q\, \xi^q\, \xi^r\, \eta^r = \xi^{q+r}\, \eta^{p+r}\, \zeta^{p+q},$$

d. h. jedes Glied der entsprechenden Curve ist von der Dimension $2(p + q + r) = 2n$, woraus folgt, dass die Gleichung 11) eine Curve Γ_{2n} von

der Ordnung $2n$ darstellt. Daher ergiebt sich Folgendes: „Einer Curve n^{ter} Ordnung entspricht im quadratisch verwandten Systeme eine Curve von der Ordnung $2n$."

9. Es wird sich nun zeigen lassen, dass diese Curve Γ_{2n} in jedem der drei Hauptpunkte A, M, N einen n-fachen Punkt besitzt. Ziehen wir nämlich etwa durch A einen willkürlichen Strahl von der Gleichung $\zeta = \beta\eta$ und suchen seine Schnittpunkte mit der Curve Γ_{2n}, so haben wir diese Gleichung mit 11) zu combiniren. Dies giebt

$$F(A\beta\eta^2, \quad B\beta\xi\eta, \quad C\xi\eta) = 0$$

als Gleichung des Systems der $2n$ Geraden, welche den Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, d. h. N mit den gesuchten $2n$ Schnittpunkten verbinden; denn die angeschriebene Gleichung ist eine homogene Gleichung des $2n^{ten}$ Grades zwischen den Coordinaten ξ und η. Einer charakteristischen Eigenschaft der homogenen Function zufolge lässt sich aber dieselbe auch in der Form

$$\eta^n F(A\beta\eta, \quad B\beta\xi, \quad C\xi) = 0$$

schreiben. Diese zeigt uns aber sofort, dass die Hauptlinie $\eta = 0$ n Schnittpunkte von $\zeta = \beta\eta$ und Γ_{2n} mit N verbindet, d. h. dass A ein n-facher Punkt von Γ_{2n} ist; denn wie sonst auch die Gerade $\zeta = \beta\eta$ gezogen werden mag, immer sind in A n ihrer Schnittpunkte mit Γ_{2n} vereinigt. Ganz dasselbe gilt bezüglich der Punkte M und N.

Um zu den Tangenten der Curve Γ_{2n} in den n-fachen Punkten A, M, N zu gelangen, betrachten wir die Schnitte der Curve C_n mit den Hauptlinien l, m, n ihrer Ebene. Soll der Schnitt der Curve

$$F(x, y, z) = 0$$

mit der Linie l gefunden werden, so setze man $x = 0$; dadurch werden alle mit x behafteten Glieder verschwinden und es bleiben nur Glieder mit y und z übrig, die wir durch

$$F(0, y, z) = 0$$

andeuten wollen. Diese Function ist nun eine homogene Function des n^{ten} Grades der Coordinaten y und z. Dividirt man sie durch z^n, so ergiebt sich für den Quotienten $\frac{y}{z}$ eine Gleichung n^{ter} Grades, deren Wurzeln α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ sein mögen. Denn lässt sich die letzte Gleichung exclusive eines constanten Factors auch in der Form

$$(y - \alpha_1 z)(y - \alpha_2 z) \ldots . (y - \alpha_n z) = 0$$

schreiben. Sie stellt das System jener Geraden dar, welche den Punkt $y = 0$, $z = 0$, d. h. L mit den n Schnittpunkten der Hauptlinie l und der Curve C_n verbinden und welche, je nachdem die Wurzeln α reell oder imaginär sind, ebenfalls resp. reell oder imaginär ausfallen.

Jeder dieser n Geraden entspricht — abgesehen von der Hauptlinie λ nach Art. 7 — eine durch A gehende Gerade, die ihr projectivisch zugeordnet ist. Betrachten wir z. B. die Verbindungslinie

$$y - \alpha_1 z = 0,$$

so entspricht ihr nach dem eben citirten Artikel die Gerade

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} = -\frac{\zeta}{\eta} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix},$$

oder aber

12) $$\alpha_1 C \eta = B \zeta.$$

Will man die $2n$ Schnittpunkte dieser Geraden mit der Curve Γ_{2n} finden, so hat man die Gleichungen derselben zu combiniren, d. h. überall statt ζ die Grösse $\frac{\alpha_1 C}{B} \cdot \eta$ einzusetzen. Dies liefert die Gleichung

$$F\left(\frac{\alpha_1 A C}{B} \eta^2, \quad \alpha_1 C \xi \eta, \quad C \xi \eta\right) = 0,$$

oder aber, da F eine bezüglich der in der Klammer stehenden Grössen homogene Function ist,

$$F\left(\frac{\alpha_1 A}{B} \eta^2, \quad \alpha_1 \xi \eta, \quad \xi \eta\right) = 0.$$

Diese Gleichung ist bezüglich ξ und η homogen und zwar vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, d. h. sie stellt das System jener $2n$ Geraden vor, welche vom Punkte $\xi = 0$, $\eta = 0$, nämlich von N nach den $2n$ Schnittpunkten der Geraden 12) und Γ_{2n} gehen. Zufolge einer charakteristischen Eigenschaft der homogenen Functionen lässt sie sich auch so schreiben:

$$\eta^n F\left(\frac{\alpha_1 A}{B} \eta, \quad \alpha_1 \xi, \quad \xi\right) = 0$$

und wenn man den Factor η^n unterdrückt, der wiederum beweist, dass A ein n-facher Punkt von Γ_{2n} ist, folgt

$$F\left(\frac{\alpha_1 A}{B} \eta, \quad \alpha_1 \xi, \quad \xi\right) = 0,$$

als die Gleicung der n Verbindungslinien von N mit den übrigen n Schnittpunkten von Γ_{2n} und 12). Allein setzt man $\eta = 0$, so erhält man

$$F(0, \alpha_1 \xi, \xi) = \xi^n F(0, \alpha_1, 1)$$

und dies ist gleich Null, weil ja α_1 eine Wurzel der Gleichung $F(0, y, z) = 0$, somit dieses homogene Polynom verschwinden muss, wenn man statt y α_1 und statt z den Werth 1 setzt.

Da der vorletzte Ausdruck für $\eta = 0$ annulirt wird, so muss er η als Factor enthalten, d. h. $\eta = 0$ oder m ist eine der besagten n Verbindungslinien; somit sind in A nicht nur n, sondern auch $(n+1)$ Schnittpunkte von 12) und Γ_{2n} vereinigt, d. h. die durch 12) repräsentirte Gerade ist eine Tangente an Γ_{2n} in dem n-fachen Punkte A. Ganz dasselbe gilt bezüglich der anderen Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ und bezüglich der zwei Hauptpunkte M und N. Dies giebt den Satz:

„Entspricht einer Curve C_n die Curve Γ_{2n}, so sind die Hauptpunkte A, M, N n-fache Punkte von Γ_{2n}. Die n Tangenten dieser Curve in A entsprechen

jenen Geraden, welche L mit den n Schnittpunkten von l und C_n verbinden; desgleichen für M und N."

Fallen speciell r von den Schnittpunkten von l und C_n in einen zusammen, d. h. besitzt l mit C_n in einem Punkte eine Berührung der $(r-1)^{ten}$ Ordnung, so ist $\varDelta$ nach diesem Satze ein solcher n-facher Punkt von Γ_{2n}, dass r Tangenten in demselben zusammenfallen, d. h. $\varDelta$ ist dann ein Rückkehrpunkt der $(r-1)^{ten}$ Ordnung.

10. Es soll in diesem Artikel untersucht werden, wie die einer Curve C_n entsprechende Curve Γ_{2n} sich modificirt, wenn die Curve C_n gegen das Hauptdreieck (LMN) eine specielle Lage besitzt, wenn nämlich C_n durch die Ecken desselben und zwar allgemein mehrmals hindurchgeht. Sei also

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer Curve C_n der n^{ten} Ordnung, die im Hauptpunkte L, d. i. $y=0$, $z=0$ einen p-fachen Punkt haben soll. Legt man dann durch diesen Punkt eine sonst willkürliche Gerade G

$$z = \beta y$$

und verbindet ihre Gleichung mit der Gleichung der Curve, so folgt

$$F(x, y, \beta y) = 0$$

als die Gleichung jener n Geraden, die den Punkt $x=0$, $y=0$, d. i. N mit den n Schnittpunkten von G und C_n verbinden. Da nun L ein p-facher Punkt von C_n sein soll, so muss durch das letzte Polynom die Linie $\overline{LN}$, d. i. $y=0$ p-mal mitrepräsentirt sein, d. h. y^p muss sich aus demselben herausheben lassen. Somit ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $F=0$ eine Curve C_n darstelle, die in L eine p-fachen Punkt besitzt:

$$F(x, y, \beta y) = y^p\, \Phi(x, y),$$

wo Φ die übrig bleibende homogene Function $(n-p)^{ten}$ Grades von x und y ist. Man kann diese Bedingung allgemeiner auch so schreiben:

$$F(\alpha_1 x, \alpha_2 y, \beta y) = y^p\, \Phi(x, y), \tag{13}$$

was sich der Natur der homogenen Functionen gemäss sofort ergiebt.

Die C_n in Σ eindeutig verwandte Curve Γ_{2n} hat nun die Gleichung:

$$F(A\eta\zeta,\ B\zeta\xi,\ C\xi\eta) = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung 13):

$$\xi^p\, \Psi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

wo Ψ eine homogene Function von ξ, η, ζ vom Grade $2n-p$ ist, weil ja das vorletzte Polynom in eben den Coordinaten $2n^{ter}$ Grades ist. Somit stellt die letzte Gleichung die L entsprechende Hauptlinie λ oder $\xi=0$ p-mal und überdies eine Curve

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

vom Grade $2n-p$ vor. Da ganz dasselbe für die Hauptpunkte M und N erwiesen werden kann, so folgt: „Hat eine Curve n^{ten} Ordnung in den Hauptpunkten L, M, N resp. einen p-, q- und r-fachen Punkt, so entspricht ihr eine Curve vom Grade $2n-(p+q+r)$,

wenn man nämlich von den resp. p-, q-, r-mal gezählten Hauptlinien λ, μ, ν abstrahirt."

Wie die erwähnte Curve vom Grade $2n-(p+q+r)$ gegen die Hauptpunkte gelegen ist, lässt sich mit Hilfe des Vorhergehenden ungemein leicht einsehen. Der totale Ort Γ_{2n} $2n^{\text{ter}}$ Ordnung setzt sich nämlich zusammen aus der p-fachen Geraden λ, aus der q-fachen Geraden μ und aus der Geraden ν, die r-mal zu rechnen ist, endlich aus der besagten Curve $2n-(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Dieser Ort Γ_{2n} muss nun nach Bewiesenem in jedem der drei Hauptpunkte $\varLambda$, M, N einen n-fachen Punkt haben. Nun hat der aus λ, μ und ν zusammengesetzte Ort $(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\varLambda$ einen $(q+r)$-fachen, in M einen $(r+p)$-fachen und in N endlich einen $(p+q)$-fachen Punkt. Somit wird die Curve $2n-(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\varLambda$ einen $n-(q+r)$-, in M einen $n-(r+p)$- und in N endlich einen $n-(p+q)$-fachen Punkt besitzen müssen.

Setzt man beispielsweise $n=2$, $p=q=r=0$, so folgt, dass einem willkürlichen Kegelschnitte C_2 des einen Systems im anderen eine Curve Γ_4 vierter Ordnung zugeordnet ist, die in $\varLambda$, M und N Doppelpunkte besitzt.

Für $n=2$, $p=1$, $p=r=0$ erkennen wir, dass einem Kegelschnitte C_2, der durch einen Hauptpunkt geht, eine Curve Γ_3 dritter Ordnung entspricht, die in dem homologen Hauptpunkt einen Doppel-, in den zwei anderen Hauptpunkten aber einfache Punkte besitzt.

Für $n=2$, $p=q=1$, $r=0$ ergiebt sich, dass einem Kegelschnitt, der durch zwei Hauptpunkte von S geht, in Σ ein durch die homologen Hauptpunkte gehender Kegelschnitt eindeutig zugeordnet ist.

Setzt man endlich $n=2$, $p=q=r=1$, so ergiebt sich, dass einem Kegelschnitte, der alle drei Hauptpunkte enthält, eine Curve Γ_1 ersten Grades, d. h. eine Gerade entspricht, wie es ja sein muss.

11. Wir wollen nun auch den Fall in Betracht ziehen, in welchem die eindeutig verwandten Systeme S und Σ auch imaginäre Hauptelemente besitzen. Seien also unter den Wurzeln der cubischen Gleichung 4), welche zur Bestimmung der Hauptpunkte von Σ dient, auch imaginäre. Es werden dies zwei conjugirt imaginäre Wurzeln sein, während die dritte jedenfalls reell sein muss; daraus folgt aber, dass es wenigstens einen reellen Hauptpunkt geben müsse, weil ja die besagte reelle Wurzel λ, in 3) eingesetzt, für die Coordinaten ξ, η, ζ des Hauptpunktes drei Gleichungen mit reellen Coefficienten liefert. Diesem reellen Hauptpunkte, den wir $\varLambda$ nennen wollen, wird vermöge der Verwandtschaftsgleichungen eine reelle Hauptlinie l von S entsprechen, deren Gleichung man ja erhält, wenn man die Coordinaten von $\varLambda$ in die eine oder andere Verwandtschaftsgleichung einsetzt. Man denke sich nun die Coordinaten in S so transformirt, dass l die Fundamentallinie $x=0$ wird; in Σ dagegen transformire man durch

lineare Substitutionen so, dass der Punkt Λ zum Punkte $\eta = 0$, $\zeta = 0$ wird. Wir wollen diese Transformationen nicht machen, sondern nur untersuchen, welchen Einfluss eine derartige Transformation auf die Form der Verwandtschaftsgleichungen ausüben muss. Setzt man in dieselben statt ξ, η, ζ die Werthe ξ, 0, 0, so sollen die beiden so entstandenen Gleichungen mit $x = 0$ identisch sein, d. h. es muss

$$a_{12} = a_{13} = 0,$$
$$a_{22} = a_{23} = 0$$

sein.

Die Gleichung 6), welche uns mittelbar die Hauptpunkte von S liefert, wird jedenfalls eine reelle Wurzel haben, die, in 5) gesetzt, für die Coordinaten x, y, z des Hauptpunktes drei reelle Gleichungen liefern wird. Diesem so erhaltenen reellen Hauptpunkt L von S wird in Σ eine reelle Hauptlinie λ entsprechen müssen, deren Gleichung man nämlich erhält, wenn man die Coordinaten von L in die eine oder andere Verwandtschaftsgleichung substituirt. Transformirt man die Coordinaten wiederum so, dass L der Punkt $y = 0$, $z = 0$ und λ mit der Geraden $\xi = 0$ identisch wird, so liefert dies nach Art. 4 die Bedingungen

$$b_{11} = c_{11} = 0$$
$$b_{21} = c_{21} = 0$$

Für die neue Lage des Coordinatensystems müssen somit die Verwandtschaftsgleichungen die Form

$$a_{11}\, x\, \xi + y\, (b_{12}\, \eta + c_{12}\, \zeta) + z\, (b_{13}\, \eta + c_{13}\, \zeta) = 0,$$
$$a_{21}\, x\, \xi + y\, (b_{22}\, \eta + c_{22}\, \zeta) + z\, (b_{23}\, \eta + c_{23}\, \zeta) = 0$$

haben.

Eliminirt man aus diesen Gleichungen das Product $x\,\xi$, so erhält man nach leichter Umformung folgende Gleichung:

$$\frac{y}{z} \cdot \frac{\eta}{\zeta} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} + \frac{y}{z} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{12}, & c_{22} \end{vmatrix} + \frac{\eta}{\zeta} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{13}, & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ c_{13}, & c_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist $\frac{y}{z}$ nichts anderes als das Theilverhältniss des Strahles, der einen Punkt (x, y, z) von S mit L verbindet bezüglich der Fundamentallinien $y = 0$, $z = 0$; $\frac{\eta}{\zeta}$ dagegen ist das Theilverhältniss jenes Strahles, der den entsprechenden Punkt (ξ, η, ζ) mit Λ verbindet bezüglich der Fundamentalstrahlen $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Zwischen diesen Theilverhältnissen besteht nun die eben angeschriebene lineare Relation, woraus folgt, dass die Büschel L und Λ homographisch sein müssen*. Wir erhalten somit folgenden Satz: „Sind S und Σ zwei eindeutig verwandte Systeme, L der einzige reelle Hauptpunkt von S und man projicirt die Punkte von S aus ihm,

* Siehe Cremona: „Geometrische Theorie der ebenen Curven" Nr. 8.

die entsprechenden Punkte von Σ dagegen aus einem reellen Hauptpunkte A desselben, so sind die so entstandenen Büschel L und A homographisch."

Dieser Satz giebt uns ein Mittel an die Hand, die Verwandtschafts gleichungen durch eine nochmalige Transformation zu vereinfachen. Wählt man nämlich die durch A gehenden Fundamentallinien $\eta = 0$, $\zeta = 0$ so, dass sie den resp. Strahlen $y = 0$, $z = 0$ homographisch zugeordnet sind, so muss die letzte Gleichung durch jede der beiden Voraussetzungen

$$\frac{y}{z} = 0, \ \frac{\eta}{\zeta} = 0; \quad \frac{y}{z} = \infty, \ \frac{\eta}{\zeta} = \infty$$

befriedigt sein, d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{12}, & b_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{21} \\ b_{13}, & b_{23} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Man kann dies auch so aussprechen, dass man sagt, es liesse sich

$$a_{21} = k a_{11}, \quad b_{22} = k b_{12}, \quad c_{23} = k c_{13}$$

setzen, wobei k das constante Verhältniss

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{b_{22}}{b_{12}} = \frac{c_{23}}{c_{13}}$$

ist. Setzt man dies in die Verwandtschaftsgleichungen ein, so erhalten sie die Form:

$$14) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{11} x\xi + y(b_{12}\eta + c_{12}\zeta) + z(b_{13}\eta + c_{13}\zeta) &= 0, \\ k a_{11} x\xi + y(k b_{12}\eta + c_{22}\zeta) + z(b_{23}\eta + k c_{13}\zeta) &= 0, \end{aligned} \right.$$

welche uns sofort Aufschluss geben wird über die Lage der noch nicht in Betracht gezogenen Hauptelemente. Berücksichtigt man nämlich, dass die einen als auch die anderen Coordinaten Verhältnisscoordinaten sind, so ergeben sich aus 14) folgende Gleichungen:

$$15) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= A\eta^2 + B\eta\zeta + C\zeta^2, \\ y &= D\xi\eta, \\ z &= E\xi\zeta, \end{aligned} \right.$$

wobei die fünf Grössen A, B, C, D und E gewisse Determinanten aus den Coefficienten der Gleichungen 14) sind, die näher anzugeben wir nicht nöthig haben werden. Von diesen eben gewonnenen Gleichungen wollen wir nun für die weiteren Betrachtungen ausgehen.

Das homogene Trinom, welches gleich x gefunden wurde, kann immer als Product zweier linearen Factoren dargestellt werden, d. h. man kann immer

$$x = (\eta - \alpha_1\zeta)(\eta - \alpha_2\zeta)$$

setzen, wobei ja α_1 und α_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$$

sind, wenn man von dem constanten Factor A absieht, was immer geschehen kann, sobald man ihn als Nenner in die Ausdrücke für y und z sich eingesetzt denkt. Betrachtet man nun die Gerade $\eta - \alpha_1\zeta = 0$, oder in anderer Form, die durch $\frac{\eta}{\zeta} = \alpha_1$ dargestellte, offenbar durch A gehende

Gerade, welche wir μ_i nennen wollen, so ist für jeden Punkt derselben die x-Coordinate des entsprechenden Punktes in S gleich Null, d. h. die Coordinaten des entsprechenden Punktes (x, y, z) sind

$$0, \quad D\xi\eta, \quad E\xi\zeta,$$

oder, wenn man durch $\xi\zeta$ dividirt,

$$0, \quad D\alpha_1, \quad E.$$

Somit entspricht jedem Punkte der durch A gehenden Linie $\frac{\eta}{\zeta} = \alpha_1$ der durch die eben angeschriebenen Verhältnisscoordinaten auf der Linie $x = 0$, d. h. auf l bestimmte Punkt, welcher M_i heissen mag. Es ist daher μ_i eine Hauptlinie von Σ und M_i der ihr zugeordnete Hauptpunkt von S. Da wir nun den Fall mit imaginären Hauptelementen von S behandeln wollen, so müssen wir M_i, d. h. $D\alpha_1$ imaginär voraussetzen oder, mit anderen Worten, annehmen, die Wurzeln α_1 und α_2 seien imaginär; natürlich werden dies zwei imaginär conjugirte Werthe sein, d. h. ist $\alpha_1 = u + iv$, so muss sich $\alpha_2 = u - iv$ ergeben. Dann ist die durch $\frac{\eta}{\zeta} = \alpha_1$ dargestellte Hauptlinie eine imaginäre Gerade, die den reellen Punkt A, d. h. $\eta = 0$, $\zeta = 0$ enthält.

In gleicher Weise folgt, dass jedem Punkte der durch die Gleichung

$$\frac{\eta}{\zeta} = \alpha_2$$

repräsentirten imaginären Linie ν_i der nämliche auf l liegende imaginäre Punkt N_i entspricht, dessen Coordinaten

$$0, \quad D\alpha_2, \quad E$$

sind. Daher ist N_i der dritte Hauptpunkt von S und die ihm in Σ zugeordnete Hauptlinie ist die durch den reellen Punkt A gehende imaginäre Gerade ν_i.

Betrachtet man den imaginären, durch die drei Coordinaten $0, \alpha_1, 1$ dargestellten Punkt N_i von Σ, der offenbar auf den Linien $\xi = 0$, $\frac{\eta}{\zeta} = \alpha_1$, d. h. auf λ und μ_i liegt, so erhält man für die Coordinaten des entsprechenden Punktes von S die Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

also jedenfalls ganz unbestimmte Coordinatenwerthe. Allein bei dieser Unbestimmtheit ist immer der Werth

$$\frac{y}{z} = \frac{D}{E} \cdot \alpha_1,$$

also vollkommen bestimmt. Dies zeigt uns, dass dem Punkte N_i von Σ in S kein bestimmter Punkt, sondern die totale, durch L gehende imaginäre Gerade entspricht, deren Gleichung eben angeschrieben wurde und die wir n_i nennen wollen. Ihr Schnittpunkt mit $x = 0$ oder l hat die Coordinaten

0, $D\alpha_1$, E, d. h. ist der imaginäre Hauptpunkt M_i von S, so dass die Hauptlinie n_i die Gerade $\overline{LM_i}$ ist.

In gleicher Weise erkennt man, dass der Schnittpunkt von ν_i und λ, d. h. der durch die Coordinaten 0, α_2, 1 fixirte imaginäre Punkt M_i ein Hauptpunkt von Σ ist, und dass die ihm entsprechende Hauptlinie von S die imaginäre Verbindungslinie $\overline{N_i L}$ ist, deren Gleichung offenbar

$$\frac{y}{z} = \frac{D}{E} \cdot \alpha_2$$

lautet. Wir erhalten somit endlich den folgenden Satz:

„Sind zwei ebene Systeme S und Σ eindeutig verwandt, so sind entweder alle Hauptelemente reell, oder aber jedes System enthält zwei conjugirt imaginäre Hauptpunkte M_i, N_i resp. M_i, N_i, denen je zwei conjugirt imaginäre Hauptlinien μ_i, ν_i resp. m_i, n_i entsprechen, d. h. die Verbindungslinie l resp. λ ersterer, als auch der Schnittpunkt $\varLambda$ resp. L letzterer sind reell und Hauptelemente der Systeme."

Man ersieht daraus, dass also auch für den eben betrachteten Fall der imaginären Hauptelemente die nämlichen Gesetze bezüglich ihrer Anordnung gelten, wie dann, wenn die Hauptelemente insgesammt reell sind.

12. Ist C_n eine Curve n^{ter} Ordnung im Systeme S, deren Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

sein mag, wo F eine homogene Function n^{ten} Grades der Variabeln bedeutet, so ist die Gleichung der ihr in Σ eindeutig entsprechenden Curve offenbar

$$F[(\eta - \alpha_1 \zeta)(\eta - \alpha_2 \zeta), \quad D\xi\eta, \quad E\xi\zeta] = 0;$$

dieselbe ist in ξ, η, ζ homogen und zwar, wie man leicht übersieht, vom Grade $2n$. Es entspricht somit immer einer Curve n^{ter} Ordnung in einem eindeutig verwandten Systeme ein Ort Γ_{2n} von der Ordnung $2n$.

Schneidet man Γ_{2n} durch eine durch $\varLambda$ gehende Gerade

$$\zeta = \beta\eta,$$

so stellt die Gleichung:

$$F[\eta^2(1 - \alpha_1\beta)(1 - \alpha_2\beta), \quad D\xi\eta, \quad E\beta\xi\eta] = 0$$

oder aber:

$$\eta^n F[\eta(1 - \alpha_1\beta)(1 - \alpha_2\beta), \quad D\xi, \quad E\beta\xi] = 0$$

die $2n$ Geraden vor, welche der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ mit den $2n$ Schnittpunkten von Γ_{2n} und der Geraden $\zeta = \beta\eta$ verbinden. Die Gerade $\eta = 0$ ist darin n-mal mitenthalten, zum Beweise, dass jede durch $\varLambda$ gehende Gerade mit Γ_{2n} in $\varLambda n$ Punkte gemein hat, d. h. $\varLambda$ ist ein n-facher Punkt von Γ_{2n}. Allein es lässt sich, wenn auch mit grösserer Mühe, zeigen, dass die beiden imaginären Hauptpunkte M_i und N_i ebenfalls n-fache Punkte von Γ_{2n} sind. Betrachtet man nämlich eine, etwa durch M_i gehende Transversale, so wird sich ihre Gleichung jedenfalls in der Form

$$\alpha\xi + \eta - \alpha_2\zeta = 0$$

schreiben lassen, da sie ja durch die Voraussetzung

$$\xi = 0, \quad \eta = \alpha_2, \quad \zeta = 1$$

befriedigt sein soll. Aus ihr ergiebt sich

$$\xi = \frac{\alpha_2\zeta - \eta}{\alpha},$$

woraus folgt, dass die Gleichung

$$F\left[(\eta - \alpha_1\zeta)(\eta - \alpha_2\zeta), \quad \frac{D}{\alpha}\eta(\alpha_2\zeta - \eta), \quad \frac{E}{\alpha}\zeta(\alpha_2\zeta - \eta)\right] = 0$$

das System jener $2n$ Geraden repräsentirt, welche $\varDelta$ mit den Schnittpunkten von Γ_{2n} und der Transversale verbinden. Allein diese Gleichung lässt sich auch in der Form:

$$(\eta - \alpha_2\zeta)^n F\left[(\eta - \alpha_1\zeta), \quad -\frac{D}{\alpha}\eta, \quad -\frac{E}{\alpha}\zeta\right] = 0$$

schreiben, d. h. die Gerade $\eta - \alpha_2\zeta = 0$ oder $\overline{\varDelta M_i}$ kommt unter den erwähnten $2n$ Geraden n-mal vor, oder, mit anderen Worten, im Punkte M_i sind n Schnittpunkte der Transversale mit Γ_{2n} vereinigt. Da die Transversale eine durch M_i sonst beliebig gezogene Gerade war, so folgt, dass M_i ein n-facher imaginärer Punkt der Curve Γ_{2n} ist. Weil nun dasselbe bezüglich N_i gilt, so können wir ganz allgemein sagen:

„Einer Curve C_n n^{ter} Ordnung entspricht in einem eindeutig verwandten Systeme eine Curve Γ_{2n} von der Ordnung $2n$, die in den Hauptpunkten n-fache Punkte hat."

Was in einem früheren Artikel bezüglich der n Tangenten von Γ_{2n} in den als reell vorausgesetzten Hauptpunkten erwiesen wurde, liesse sich hier ganz auf die nämliche Art für den reellen Hauptpunkt $\varDelta$ zeigen und mag hier deswegen nicht näher ausgeführt werden; dass hiergegen der betreffende Satz für M_i und N_i seine Giltigkeit bewahre, soll zunächst gezeigt werden, obgleich der Beweis, eben weil man es mit imaginären Punkten zu thun hat, etwas schwieriger wird.

Betrachtet man eine imaginäre Hauptlinie von S, also etwa die durch die Gleichung

$$\frac{y}{z} = \frac{D}{E} \cdot \alpha_1$$

bestimmte Hauptlinie n_i, so wird dieselbe unsere Curve C_n in n imaginären Punkten schneiden und wir wollen die Gleichung jener n Geraden, die den Hauptpunkt N_i mit diesen n Schnittpunkten verbinden, betrachten. Da N_i die Coordinaten 0, $D\alpha_2$, E hat, so wird sich die Gleichung einer jeden durch denselben gehenden Geraden g auf die Form

$$a\xi + Ey - D\alpha_2 z = 0$$

bringen lassen; setzen wir voraus, dass jene Coordinatenwerthe, welche diese und die Gleichung

$$\frac{y}{z} = \frac{D}{E} \cdot \alpha_1$$

befriedigen, auch der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

genügen, so ist g eine der erwähnten n Verbindungslinien. Das ihr entsprechende Gebilde in Σ ergiebt sich durch Elimination von x, y, z aus der Gleichung von g und aus 14) in Form einer Determinante; oder aber entwickelt und nach leichter Reduction

$$(\eta - \alpha_2 \zeta)\ [a(\eta - \alpha_1 \zeta) + ED\xi] = 0,$$

d. h. der durch N_i gehenden Geraden g entspricht in Σ die Hauptlinie ν_i (nämlich die Linie $\eta - \alpha_2 \zeta = 0$) und eine durch N_i gehende Gerade γ

$$a(\eta - \alpha_1 \zeta) + ED\xi = 0,$$

weil ihr ja durch die Coordinatenwerthe $0, \alpha_1, 1$ genügt wird.

Es lässt sich nun zeigen, dass diese Gerade γ eine Tangente der Curve Γ_{2n} im Punkte N_i ist. Denn eliminirt man aus der Gleichung von γ und jener von Γ_{2n} die Variabele ξ, so ergiebt sich

$$F\left[(\eta - \alpha_1 \zeta)(\eta - \alpha_2 \zeta),\quad \eta \frac{a(\alpha_1 \zeta - \eta)}{E},\quad \zeta \frac{a(\alpha_1 \zeta - \eta)}{D}\right] = 0,$$

oder aber, wie man sofort übersieht,

$$(\eta - \alpha_1 \zeta)^n F\left[(\eta - \alpha_2 \zeta),\quad -\frac{a\eta}{E},\quad -\frac{a\zeta}{D}\right] = 0$$

als die Gleichung der $2n$ Geraden, die A mit den Schnittpunkten von γ und Γ_{2n} verbinden. Der n mal auftretende Factor $\eta - \alpha_1 \zeta$ zeigt an, dass N_i ein n-facher Punkt von Γ_{2n} ist, während

$$F\left[(\eta - \alpha_2 \zeta),\quad -\frac{a\eta}{E},\quad -\frac{a\zeta}{D}\right] = 0$$

die anderen n Verbindungslinien repräsentirt.

Nun wurde aber angenommen, dass die Coordinatenwerthe x, y, z, welche der Gleichung von g und

$$\frac{y}{z} = \frac{D}{E} \cdot \alpha_1$$

genügen, d. h. die Coordinaten

$$x : y : z = ED(\alpha_2 - \alpha_1) : aD\alpha_1 : aE$$

oder aber

$$x : y : z = (\alpha_1 - \alpha_2) : -\frac{a\alpha_1}{E} : -\frac{a}{D}$$

auch die Function F auf Null bringen. — Setzt man in der letzten Gleichung $\eta = \alpha_1 \zeta$, so folgt:

$$F\left[\alpha_1 \zeta - \alpha_2 \zeta),\quad -\frac{a\alpha_1 \zeta}{E},\quad -\frac{a\zeta}{D}\right] = \zeta^n F\left[(\alpha_1 - \alpha_2),\quad -\frac{a\alpha_1}{E},\quad -\frac{a}{D}\right]$$

und dies ist nach dem eben Gesagten mit Null identisch. Weil somit die vorletzte Gleichung für $\eta = \alpha_1 \zeta$ mit Null identisch wird, so muss sich der Factor $\eta - \alpha_1 \zeta$ aus ihr herausheben lassen, d. h. sie lässt sich in der Form

$$(\eta - \alpha_i \zeta)\, \Phi(\eta, \zeta) = 0$$

schreiben, wo Φ eine homogene Function vom Grade $(n-1)$ ist. Wir erkennen also, dass $\eta - \alpha_i \zeta = 0$ oder die Gerade μ_i eine der zuletzt genannten n Verbindungslinien ist, dass daher in N_i nicht nur n, sondern $n+1$ Schnittpunkte von γ und Γ_{2n} vereinigt sind, woraus folgt, dass γ eine Tangente von Γ_{2n} im Hauptpunkte N_i ist. Wir erhalten somit den Satz:

„Besitzen zwei eindeutig verwandte Systeme auch imaginäre Hauptpunkte M_i, N_i, resp. M_i, N_i, so entspricht einer Curve C_n des ersteren eine Curve Γ_{2n}, die in M_i und N_i imaginäre n-fache Punkte besitzt. Die n imaginären Tangenten von Γ_{2n} in M_i entsprechen den Verbindungslinien von M_i mit den n imaginären Schnittpunkten von m_i und C_n; ganz dasselbe gilt bezüglich N_i."

Es wird keine Schwierigkeiten bereiten, zu beweisen, dass auch der folgende Satz für imaginäre Hauptelemente gelte: „Hat eine Curve C_n in den Punkten L, M_i, N_i resp. einen p-, q-, r-fachen Punkt, so ist der ihr entsprechende Ort Γ_{2n} zusammengesetzt aus der resp. p-, q-, r-fachen Hauptlinie λ, μ_i, ν_i und aus einer Curve von der Ordnung $2n-(p+q+r)$; letztere hat in Λ, M_i, und N_i resp. einen $n-(q+r)$, $n-(r+p)$, $n-(p+q$-fachen Punkt."

13. Betrachten wir nun wieder ganz allgemein zwei eindeutig verwandte Systeme S und Σ, d. h. legen wir die Verwandtschaftsgleichungen 1) oder ihre Umformungen 2) zu Grunde, so lässt sich denselben der folgende Sinn unterlegen.

Ist im Systeme Σ ein Punkt (ξ, η, ζ) gegeben, so kann man ihm in S die durch

$$x f_{i1} + y f_{i2} + z f_{i3} = 0, \quad i = 1, 2$$

dargestellten Geraden — deren laufende Coordinaten x, y, z sind, entsprechen lassen, und es lässt sich dann zeigen, dass das System S in doppelter Weise reciprok auf Σ bezogen ist. Betrachtet man vorerst den Fall, wo man dem Punkt (ξ, η, ζ) die Gerade

$$x f_{11} + y f_{12} + z f_{13} = 0$$

zuordnet, so sieht man sofort, dass jedem Punkte (ξ, η, ζ) von Σ eine Gerade von S entspricht; und umgekehrt, ist in S eine Gerade durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

gegeben, so kann man leicht jenen Punkt von Σ finden, dem sie zugeordnet erscheint. Denn man hat ξ, η, ζ nur so zu bestimmen, dass die Gleichungen

$$\frac{f_{11}}{A} = \frac{f_{12}}{B} = \frac{f_{13}}{C}$$

oder aber

$$B f_{11} = A f_{12} \quad \text{und} \quad C f_{12} = B f_{13}$$

bestehen, was uns — da f lineare homogene Functionen von ξ, η, ζ sind — nur ein Werthsystem ξ, η, ζ liefert. Somit entspricht auch umgekehrt jeder Geraden von S nur ein Punkt von Σ.

Erzeugt der Punkt (ξ, η, ζ) in Σ eine Gerade von der Gleichung

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0,$$

so hüllen die entsprechenden Geraden

$$xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} = 0$$

ein Strahlenbüschel ein; denn in diesem Falle genügen ξ und η — die man ja als Liniencoordinaten, weil sie die letztgeschriebene Gerade vollkommen und eindeutig bestimmen, auffassen kann — einer linearen Relation, woraus die Wahrheit unserer Behauptung sofort einleuchtet.

Allein durch das bisher Festgesetzte wäre die reciproke Verwandtschaft der Systeme S und Σ nicht fixirt; man muss noch die Gleichung

$$\xi\varphi_{11} + \eta\varphi_{12} + \zeta\varphi_{13} = 0$$

zu Hilfe nehmen. Lässt man nämlich einem Punkte (x, y, z) von S die durch die letzte Gleichung, in der ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten sind, repräsentirte Gerade von Σ entsprechen, so sind die Systeme S und Σ auf einander reciprok bezogen. Man erkennt nämlich ebenso wie früher, dass jedem Punkte von S nur eine Gerade in Σ zugeordnet ist, und dass auch umgekehrt jeder Geraden von Σ nur ein Punkt von S entspricht. Wesentlich ist hierbei noch das Folgende, was sich jedoch ebenfalls sehr leicht ergiebt: „Liegt der Punkt (x', y', z') auf jener Geraden

$$xf'_{11} + yf'_{12} + zf'_{13} = 0,$$

welche dem Punkte (ξ', η', ζ') entspricht, so geht die dem Punkte (x', y', z) entsprechende Gerade

$$\xi\varphi'_{11} + \eta\varphi'_{12} + \zeta\varphi'_{13} = 0$$

durch den Punkt (ξ', η, ζ')." Denn aus der ersten Annahme folgt sofort:

$$x'f'_{11} + y'f'_{12} + z'f'_{13} = 0$$

oder aber nach ξ', η', ζ' geordnet

$$\xi'\varphi'_{11} + \eta'\varphi'_{12} + \zeta'\varphi'_{13} = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass die Gerade

$$\xi\varphi'_{11} + \eta\varphi'_{12} + \zeta\varphi'_{13} = 0$$

durch den Punkt (ξ', η', ζ') gehe, wie behauptet wurde. — Fasst man das Gesagte zusammen, so hat sich ergeben, dass durch die Gleichung

$$xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} = 0$$

jedem Punkte (ξ, η, ζ) von Σ eine Gerade von S, und vermöge

$$\xi\varphi_{11} + \eta\varphi_{12} + \zeta\varphi_{13} = 0$$

jedem Punkte (x, y, z) von S in Σ ein Strahl zugeordnet ist, und dass auf diese Weise S und Σ reciprok auf einander bezogen sind. Aus denselben Gründen sind die Systeme S und Σ durch die Gleichungen

$$xf_{21} + yf_{22} + zf_{23} = 0,$$
$$\xi\varphi_{21} + \eta\varphi_{22} + \zeta\varphi_{23} = 0$$

reciprok auf einander bezogen — jedoch in anderer Art. Die erste reciproke Verwandtschaft wollen wir symbolisch mit V_1, die letztere mit V_2 der Kürze wegen bezeichnen.

Wählt man nun in Σ einen beliebigen Punkt (ξ, η, ζ), so bestimmt sich der ihm eindeutig verwandte (x, y, z) aus den Gleichungen

$$x f_{11} + y f_{12} + z f_{13} = 0,$$
$$x f_{21} + y f_{22} + z f_{23} = 0,$$

d. h. es ist der Schnittpunkt der durch diese Gleichungen dargestellten Geraden. Nun sind aber diese Geraden offenbar jene, die vermöge der reciproken Verwandtschaften V_1 und V_2 dem Punkte (ξ, η, ζ) zugeordnet erscheinen und ganz Aehnliches gilt bezüglich eines Punktes (x, y, z) von S. Berücksichtigt man, dass jede Verwandtschaftsgleichung eine reciproke Beziehung der betrachteten Art zwischen S und Σ festsetzt und dass eine eindeutige Verwandtschaft Art. 2 zufolge durch unendlich viele leicht zu bildende Verwandtschaftsgleichungen fixirt werden kann, so folgt der Satz:

„Sind zwei ebene Systeme S und Σ in eindeutiger Verwandtschaft, so lassen sie sich auf unendlich viele Arten auf einander so reciprok beziehen, dass der einem Punkte des einen Systems eindeutig verwandte Punkt als Durchschnitt jener Geraden erscheint, die dem erstgenannten Punkte vermöge der reciproken Verwandtschaften entsprechen."

Daraus ergiebt sich, dass wir zwei ebene Systeme S und Σ in folgender Weise eindeutig auf einander beziehen können. Wir beziehen nämlich S und Σ in doppelter Weise reciprok auf einander und ordnen einem Punkte des einen Systems jenen Punkt des anderen zu, wo sich die ersterem reciproken Strahlen (Polaren) schneiden. Die auf diese Weise festgesetzte Verwandtschaft wurde von Herrn Theodor Reye unter dem Namen „quadratische Verwandtschaft" in seiner Abhandlung „Geometrische Verwandtschaften zweiten Grades", Zeitschr. f. Math. u. Phys. XI, 4, auf synthetischem Wege untersucht und zugleich gezeigt, wie man sie zur Auffindung geometrischer Wahrheiten und zur Lösung gewisser Constructionsaufgaben verwenden könne; die meisten in dieser Arbeit erhaltenen Resultate sind natürlich in dem Vorhergehenden mit enthalten.

Wenn man den zuletzt erwiesenen Satz und das Resultat des Art. 2 zusammenhält, so ergiebt sich das folgende interessante Resultat: „Werden zwei ebene Systeme S und Σ beliebig oft auf einander reciprok bezogen, so zwar, dass die Polaren von 7 Punkten des einen durch 7 Punkte des anderen resp. hindurchgehen, so gehen die Polaren jedes Punktes durch einen fixen Punkt." Es sei uns vergönnt, noch für einen Augenblick der Arbeit des Herrn Reye zu gedenken und eines Resultates zu erwähnen, das für die betrachtete Verwandtschaft und auch für andere Probleme von grosser Wichtigkeit ist. Der Herr Verfasser löst nämlich pag. 296 linear die Aufgabe, zwei Ebenen auf einander so reciprok zu beziehen, dass die Polaren von 7 gegebenen Punkten durch 7 resp.

Punkte hindurchgehen sollen, wodurch, wie ja sofort einleuchtet, principiell die Aufgabe gelöst ist, zwei eindeutig verwandte Systeme linear zu vervollständigen, sobald man 7 Paare entsprechender Punkte kennt. Allein die angegebene Construction ist, wie der Herr Verfasser selbst bemerkt, wenn auch principiell einfach, in ihrer Ausführung dennoch so complicirt, dass man sie zur wirklichen Vervollständigung wohl nicht gebrauchen könnte; aus diesem Grunde mag es genügen, auf die Lösung des Herrn Th. Reye blos aufmerksam gemacht zu haben. — Endlich sei bemerkt, dass durch dieses Resultat auch eine Construction der Flächen zweiten Grades aus neun Punkten und die Lösung von Chasles' Problem der Homographie gegeben ist.

14. Bisher wurden die eindeutig verwandten Systeme beliebig im Raume liegend vorausgesetzt und die Abhängigkeit der Figuren des einen Systems von den Figuren des anderen abgehandelt. Nimmt man beide Systeme auf demselben Träger (Ebene) an, so bieten sich manche Eigenthümlichkeiten dar, welche näher erwähnt zu werden verdienen; namentlich ist die für die Construction der Curven höherer Grade wichtige involutorische Lage derselben zu berücksichtigen.

Denkt man sich zwei Systeme S und Σ auf einer Ebene vereinigt, so kann man alle Punkte sowohl von S, als auch von Σ auf ein und dasselbe Coördinatensystem beziehen. Rechnet man einen Punkt zum Systeme S, so mögen seine Coordinaten mit x, y, z bezeichnet werden, dagegen sollen ξ, η, ζ die homogenen Coordinaten eines Punktes sein, den man zum Systeme Σ rechnet. Den allgemeinen Verwandtschaftsgleichungen 1) zufolge, nämlich

$$x f_{i1} + y f_{i2} + z f_{i3} = 0, \quad i = 1, 2$$

entspricht jedem Punkte (x, y, z) der betrachteten Ebene, wenn man ihn zum System S rechnet, jener Punkt (ξ, η, ζ), dessen Coordinaten man erhält, wenn man die Grössen x, y, z in die Gleichungen 1) einsetzt und dieselben nach $\frac{\xi}{\zeta}$ und $\frac{\eta}{\zeta}$ auflöst; rechnet man dagegen einen Punkt zum Systeme Σ, so erhält man durch Einsetzen dieser Werthe in 1) (wo ja f lineare Functionen von ξ, η, ζ sind) und Auflösen dieser Gleichungen nach $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ die Coordinaten des entsprechenden Punktes (x, y, z).

Will man jene Punkte der Ebene finden, die sich selbst entsprechen, so müssen offenbar ihre Coordinaten sowohl für x, y, z, als auch für ξ, η, ζ in 1) eingesetzt, diese Gleichungen erfüllen. Bezeichnet man somit die Coordinaten der sich selbst entsprechenden Punkte durch ξ, η, ζ, so sind sie durch folgende Bedingungsgleichungen bestimmt:

$$\xi f_{i1} + \eta f_{i2} + \zeta f_{i3} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Da beide Gleichungen quadratisch sind, so liefern sie vier sich selbst entsprechende Punkte. Somit kann man sagen, dass zwei eindeutig ver-

wandte Systeme auf demselben Träger im Allgemeinen **vier Punkte** entsprechend gemein haben, unter denen auch imaginäre und zwar paarweise vorkommen können.

Ganz besonders wichtig ist die involutorische Lage der beiden betrachteten Systeme. **Wir wollen zwei eindeutige Systeme auf demselben Träger involutorisch nennen, wenn jedem Punkte der nämliche Punkt entspricht, mag man ersteren zu S oder zu Σ rechnen.** Für welche Form der Verwandtschaftsgleichungen diese specielle Lage eintritt, wird eine kurze Betrachtung zeigen.

Ordnet man nämlich die Verwandtschaftsgleichungen 1) nach den Coordinaten ξ, η, ζ, so erhalten dieselben die Form 2), wobei die Grössen φ die zu Anfang erwähnte Bedeutung haben. Entspricht nun einem Punkte (a, b, c) von S der Punkt (α, β, γ) von Σ, d. h. werden die Gleichungen 1), also auch 2) erfüllt, wenn man statt x, y, z die Grössen a, b, c und statt ξ, η, ζ die Werthe α, β, γ einsetzt, so müssen für die involutorische Lage beider Systeme die nämlichen Gleichungen erfüllt sein, wenn man α, β, γ statt x, y, z und a, b, c anstatt ξ, η, ζ substituirt. Soll dies aber für **jeden** Punkt gelten, so müssen offenbar die entsprechenden Coefficienten der Trinome f_{ij} und φ_{ij} einander gleich sein. Nun ist aber

$$\begin{aligned} f_{ij} &= a_{ij}\,\xi + b_{ij}\,\eta + c_{ij}\,\zeta, \\ \varphi_{ij} &= m_{i2}x + m_{i2}x + m_{i3}z, \end{aligned} \qquad i = 1, 2,$$

wobei $m \equiv a, b, c$ ist, je nachdem man $j = 1, 2, 3$ setzt. Somit liefert die Indentität dieser Gleichungen

$$a_{ij} = m_{i1}, \quad b_{ij} = m_{i2}, \quad c_{ij} = m_{i3};$$

oder aber, wenn man für j die Werthe 1, 2, 3 und für m resp. a, b, c setzt:

$$a_{i2} = b_{i1}, \quad a_{i3} = c_{i1}, \quad b_{i3} = c_{i2}.$$

Setzt man endlich für i die Werthe 1, 2, so erhält man für die involutorische Lage beider Systeme folgende sechs hinreichende und nothwendige Bedingungen:

$$16) \quad \begin{cases} a_{12} = b_{11}, \quad a_{13} = c_{11} \quad \text{und} \quad b_{13} = c_{12}, \\ a_{22} = b_{21}, \quad a_{23} = c_{21} \quad\;\; ,, \quad\;\; b_{23} = c_{22}. \end{cases}$$

Die eindeutige involutorische Verwandtschaft zweier ebenen Systeme auf demselben Träger ist festgestellt, sobald vier Paare entsprechender Punkte gegeben sind. Denn in Art. 2 waren es 8 **unabhängige** Coefficienten, die in einer Verwandtschaftsgleichung auftraten, und 7 Paare entsprechender Punkte reichten hin, die Verwandtschaft zu fixiren; hier hat man nach 16) um 3 weniger, d. h. 5 independente Coefficienten in **einer** Verwandtschaftsgleichung und es lässt sich somit wie im Art. 2 darthun, dass 4 Paare entsprechender Punkte die eindeutige involutorische Verwandtschaft fixiren.

Wie bemerkt wurde, sind für die involutorische Lage die Functionen f_{ij}, φ_{ij} identisch, woraus sofort erhellt, dass sowohl die Gleichungen 4) und 6), als auch 3) und 5) bezüglich der Coefficienten die nämlichen sind,

dass also zwei involutorische Systeme nur ein Hauptdreieck besitzen, was auch aus dem gegebenen Begriffe der Involution folgt. Wir haben somit für den jetzigen Fall die Punkte L, M, N mit den resp. Punkten Λ, M, N als identisch anzusehen.

Es lassen sich an die eben aufgefundenen Bedingungsgleichungen wichtige Folgerungen anknüpfen. Betrachtet man nämlich den Kegelschnitt von der Gleichung

17) $$U \equiv a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + b_{12}\eta^2 + 2a_{13}\xi\zeta + 2b_{13}\eta\zeta + c_{13}\zeta^2 = 0$$

und jenen, dessen Gleichung die folgende ist

18) $$V \equiv a_{21}\xi^2 + 2a_{22}\xi\eta + b_{22}\eta^2 + 2a_{23}\xi\zeta + 2b_{23}\eta\zeta + c_{23}\zeta^2 = 0,$$

so ist die Gleichung der Polare eines bestimmten Punktes (ξ, η, ζ) bezüglich des Kegelschnittes 17)

$$x\frac{\partial U}{\partial \xi} + y\frac{\partial U}{\partial \eta} + z\frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0$$

und die Gleichung der Polare desselben Punktes bezüglich des Kegelschnittes 18):

$$x\frac{\partial V}{\partial \xi} + y\frac{\partial V}{\partial \eta} + z\frac{\partial V}{\partial \zeta} = 0,$$

wobei x, y, z die laufenden Coordinaten sind. Nun sind aber diese Gleichungen der Polaren nichts anderes, als die Verwandtschaftsgleichungen 1), wenn man nämlich die Gleichungen 16) berücksichtigt, d. h. es sind die Verwandtschaftsgleichungen für die involutorische Lage beider Systeme, was sofort bei der wirklichen Berechnung der partiellen Differentialquotienten und Unterdrückung des Factors 2 erhellt. Löst man die letzten zwei Gleichungen nach $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ auf, so erhält man demnach den dem Punkte (ξ, η, ζ) eindeutig zugeordneten Punkt (x, y, z), welches aber zugleich der Schnittpunkt der Polaren von (ξ, η, ζ) bezüglich der beiden durch 17) und 18) dargestellten Kegelschnitte ist. Berücksichtigt man, dass die Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

durch die Combination

$$U + \lambda V = 0$$

ein ganzes Kegelschnittbüschel repräsentiren und dass die Polaren eines Punktes bezüglich aller Kegelschnitte eines Büschels durch einen Punkt gehen, so folgt der wichtige Satz:

> „Sind zwei eindeutig verwandte Systeme in involutorischer Lage, so lässt sich immer ein Kegelschnittbüschel
>
> $$U + \lambda V = 0$$
>
> so angeben, dass der einem Punkte zugeordnete Punkt der Durchschnitt der Polaren des ersteren bezüglich dieses Kegelschnittbüschels ist."

15. Der gefundene Satz erlaubt uns, die eindeutige involutorische Verwandtschaft mit grosser Leichtigkeit zu untersuchen. Den einem Punkte a zugeordneten Punkt a' findet man nämlich als den Durchschnitt der Polaren von a bezüglich der Kegelschnitte des Büschels $U + \lambda V = 0$; natürlich wären dazu blos zwei Kegelschnitte des Büschels nöthig. Die vier sich selbst entsprechenden Punkte sind offenbar die Scheitel 1, 2, 3, 4 des Kegelschnittbüschels $U + \lambda V = 0$. Betrachtet man das Diagonaldreieck (LMN) des Vierecks (1 2 3 4), so ist das erstere augenscheinlich das Hauptdreieck des involutorischen Systems. Es ist bekanntlich (LMN) das sich selbst conjugirte Dreieck bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels, d. h. jede Seite desselben ist die Polare der Gegenecke bezüglich aller Kegelschnitte des besagten Büschels. Daraus folgt unmittelbar, dass jeder Ecke dieses Dreiecks nicht ein Punkt, sondern alle Punkte der Gegenseite desselben entsprechen, weshalb eben das Diagonaldreieck (LMN) das Hauptdreieck des involutorischen Systems ist. Man könnte wie, schon bemerkt wurde, (LMN) ebenso gut mit $(\varLambda MN)$ bezeichnen, da ja für die involutorische Lage vollkommene Vertauschungsfähigkeit herrscht. Alle für die allgemeine Lage eindeutig verwandter Systeme bewiesenen Sätze werden sich sofort auf die involutorische Lage derselben übertragen, wenn man nur die Identität der früher verschiedenen Hauptdreiecke berücksichtigt. Die Aufzählung dieser Sätze und Aufgaben würde zu weit führen und soll daher unterbleiben.

Sind die vier sich selbst entsprechenden Punkte zweier eindeutigen involutorischen Systeme reell und gegeben, so kann man am vortheilhaftesten in folgender Weise zu jedem Punkte den entsprechenden construiren. Seien 1, 2, 3, 4 die besagten sich selbst entsprechenden Punkte und somit nach Früherem die Scheitel des Kegelschnittbüschels $U + \lambda V = 0$. Die drei Grenzfälle dieses Büschels, nämlich die drei Gegenseitenpaare des Vierecks (1 2 3 4) lassen sich zur verlangten Construction am besten verwenden. Betrachtet man nämlich das System der Geraden $\overline{14}$, $\overline{23}$, deren Durchschnitt L heissen mag, so ist dies ein Kegelschnitt des Büschels und die Polare eines beliebigen Punktes a bezüglich desselben ist der zu $\overline{aL}$ hinsichtlich der Geraden $\overline{14}$ und $\overline{23}$ harmonisch zugeordnete Strahl, den man leicht linear construiren könnte. Fasst man noch eins der Gegenseitenpaare, etwa $\overline{12}$, $\overline{34}$ als Kegelschnitt des Büschels auf, so ist die Polare von a bezüglich desselben die vierte Harmonikale zu $\overline{aM}$ bezüglich des Strahlenpaares $\overline{12}$, $\overline{34}$, wobei M den Schnittpunkt eben dieses Strahlenpaares bedeutet. Der dem Punkte a entsprechende Punkt a' ist nun der Schnitt der beiden linear construirten Harmonikalen und somit selbst linear construirbar. Hat man jedoch zu vielen Punkten die entsprechenden zu construiren, so verfahre man lieber folgendermassen. Man lege durch zwei Hauptpunkte — etwa L und M — einen Kreis, welcher die in L zu-

sammentreffenden Gegenseiten des Vierecks (1 2 3 4) in e und f, dagegen die in M sich schneidenden Gegenseiten desselben in ε und φ treffen mag. Nun ziehe man in e und f an den Kreis die Tangenten, deren Durchschnitt p heissen soll, desgleichen thue man bezüglich ε und φ, was den Punkt π liefern wird.

Der einem Punkte a zugeordnete Punkt a' liegt nun auf jenem Strahle, der zu $\overline{aL}$ bezüglich $\overline{14}$ und $\overline{23}$ harmonisch conjugirt ist. Zieht man nun $\overline{aL}$ bis der Kreis in r und $\overline{rp}$ bis er in s getroffen wird, so bilden die Punkte e, f, r, s vier harmonische Punkte des Kreises, d. h. $\{efrs\} = -1$; denn nimmt man p als das Centrum einer Punktinvolution auf dem Kreise an, so bilden r und s ein Punktepaar derselben, während e und f die Doppelpunkte sind, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung folgt. Ist aber

$$\{efrs\} = -1,$$

so ist auch das aus L über diesen Punkten errichtete vierstrahlige Büschel harmonisch, d. h. $\overline{Ls}$ ist zu $\overline{La}$ harmonisch bezüglich $\overline{Le} = \overline{14}$, $\overline{Lf} = \overline{23}$ und somit liegt der a zugeordnete Punkt a' auf $\overline{Ls}$.

Zieht man $\overline{aM}$ bis der Kreis in ϱ und $\overline{\varrho\pi}$ bis er in σ getroffen wird, so folgt ebenso, dass $\overline{M\sigma}$ die vierte Harmonikale ist zu $\overline{aM}$ bezüglich $\overline{12}$ und $\overline{34}$. Der gesuchte Punkt a' ist daher der Schnitt von $\overline{Ls}$ und $\overline{M\sigma}$. — Diese Construction ist zwar ohne Zirkel unausführbar, allein sie führt eleganter und schneller zum Ziele als die früher angegebene lineare Constructionsweise.

Beachtet man, dass r und s ein Punktepaar einer Involution ist, deren Doppelpunkte e und f sind, so folgt, dass die Strahlen $\overline{La}$ und $\overline{La'}$, welche einen Hauptpunkt mit entsprechenden Punkten verbinden, eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen $\overline{Le}$ und $\overline{Lf}$, d. h. die durch den Hauptpunkt gehenden zwei Seiten des sich selbst entsprechenden Vierecks sind.

16. Wir wollen nun zu der Angabe derjenigen Curven schreiten, deren Construction mit Hilfe der betrachteten Verwandtschaft sofort einleuchtet. Die Grundlage dafür bietet Folgendes: „Eine durch drei n-fache und weitere einfache Punkte bestimmte Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung lässt sich construiren, sobald man im Stande ist, eine Curve n^{ter} Ordnung zu verzeichnen.“ Denn ein n-facher Punkt gilt für $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungen, woraus folgt, dass eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung durch $3n$-fache Punkte L, M, N und weitere $\frac{1}{2}2n(2n+3) - \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{n}{2}(n+3)$ Punkte bestimmt ist. Nimmt man nun die Punkte L, M, N zu Hauptpunkten eines eindeutigen involutorischen Systems, indem man etwa 4 Ecken 1, 2,

3, 4, deren Diagonaldreieck (LMN) ist, zu sich selbst entsprechenden Punkten des Systems wählt, so kann man nach dem vorigen Artikel zu jedem Punkte den entsprechenden verzeichnen. Sucht man nun zu den $\frac{n}{2}(n+3)$ Punkten $a, b, c \ldots$ wirklich die entsprechenden $a', b', c' \ldots$, so bestimmen diese eine Curve n^{ter} Ordnung C_n vollkommen. Dieser muss eine Curve C_{2n} von der Ordnung $2n$ entsprechen, die durch $a, b, c \ldots$ geht und in L, M, N n-fache Punkte hat, die also mit der zu zeichnenden Curve identisch ist. Ist man nun im Stande C_n zu construiren, d. h. sich weitere Punkte derselben zu verschaffen, so braucht man nur zu diesen die involutorisch entsprechenden aufzusuchen, um sofort Punkte unserer fraglichen Curve C_{2n} zu erhalten, wodurch unsere Aussage erhärtet ist. Die Tangenten von C_{2n} in dem n-fachen Punkte L z. B. ergeben sich nach Art. 11 einfach dadurch, dass man die n Schnittpunkte von C_n und $\overline{MN} = \lambda$ mit L verbindet und zu den so erhaltenen Strahlen die entsprechenden, d. h. die bezüglich der in L zusammenstossenden Seiten des Vierecks (1 2 3 4) harmonisch zugeordneten Strahlen sucht.

Für $2n = 2$ ergiebt sich eine Construction der Kegelschnitte aus fünf Punkten, weil ja dann L, M, N einfache Punkte sind; C_n ist in diesem Falle eine Gerade und durch

$$\frac{n}{2}(n+3) = 2$$

Punkte vollkommen fixirt.

Setzt man $2n = 4$, so ergiebt sich die Construction einer Curve vierter Ordnung C_4 mit 3 Doppelpunkten L, M, N, wenn diese und

$$\frac{n}{2}(n+3) = 5$$

weitere Punkte gegeben sind; denn in diesem Falle ist C_n ein Kegelschnitt C_2 und somit aus 5 Punkten leicht construirbar. Die zwei Tangenten von C_4 in einem der Doppelpunkte, z. B. L erhält man, indem man die Schnitte von C_2 und λ mit L verbindet (werden diese imaginär, so ist L kein eigentlicher Doppelpunkt, sondern ein conjugirter oder isolirter Punkt von C_4) und zu diesen Strahlen die entsprechenden durch eine einfache harmonische Theilung sucht. Fallen die Schnittpunkte von C_2 und λ in einen zusammen, d. h. berührt λ den Kegelschnitt C_2, so fallen auch die Tangenten von C_4 in L zusammen, d. h. dann ist L für C_4 ein Rückkehrpunkt oder eine Spitze.

Wir können somit mit Hilfe des Gesagten eine Curve vierter Ordnung C_4 construiren, wenn von ihr zwei Doppelpunkte M, N, eine Spitze L und vier weitere Punkte gegeben sind, durch welche Daten aber auch die Curve bestimmt ist. Nehmen wir nämlich L, M, N zu Hauptpunkten eines involutorischen Systems etwa in der Art, dass wir ein Viereck (1 2 3 4), dessen Diagonaldreieck $(L\ M\ N)$ ist, zum Träger des Büschels $U + \lambda V = 0$

annehmen. Hierauf construire man auf bekannte Weise zu den vier weiteren gegebenen Punkten a, b, c, d die entsprechenden a', b', c', d' und lege durch diese die beiden Kegelschnitte C_2^1 und C_2^2, welche $\overline{MN} = \lambda$ berühren. Construirt man zu C_2^1 und C_2^2 die entsprechenden Curven vierter Ordnung, so genügen diese und nur diese den gestellten Bedingungen.

Sind von einer Curve vierter Ordnung zwei Rückkehrpunkte L, M, ein Doppelpunkt N nebst drei einfachen Punkten a, b, c gegeben, so verbleibt alles wie bisher, nur dass man durch a', b', c' einen Kegelschnitt zu legen hat, der λ und μ tangirt; diese Kegelschnitte C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4 — deren es bekanntlich vier giebt, die auch imaginär werden können — können nach bekannten Methoden leicht construirt werden, und indem man dann zu ihnen die involutorisch entsprechenden Curven zeichnet, gelangt man zu den verlangten Curven vierter Ordnung.

Sind endlich von einer Curve vierter Ordnung drei Spitzen L, M, N und zwei weitere Punkte a, b gegeben, so hat man durch a' und b' jene vier Kegelschnitte C_2^1, C_2^2, C_2^3, C_2^4 zu legen, die λ, μ, ν berühren, und zu diesen Kegelschnitten die involutorisch entsprechenden Curven C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4 zu construiren, welche unseren Anforderungen dann offenbar genügen müssen. Berücksichtigt man, dass die Verbindungslinie von L, M, N mit den Berührungspunkten von λ, μ, ν resp. und C_2^1 z. B. durch einen Punkt 0 gehen und dass die diesen Verbindungslinien involutorisch entsprechenden Strahlen die Tangenten von C_4^1 in den resp. Spitzen und zugleich die Polaren von 0 bezüglich der drei Gegenseitenpaare des Vierecke (1 2 3 4) sind, so folgt, dass die Tangenten in drei Rückkehrpunkten einer Curve vierter Ordnung durch einen Punkt gehen, welcher Satz auf andere Weise von Herrn Seydewitz in seiner früher citirten Abhandlung bereits gefunden wurde. Allein bekannter dürfte der Satz sein, wenn man auf den eben gefundenen das Reciprocitätsgesetz anwendet, nämlich der folgende: „Die drei Inflexionspunkte einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte liegen in gerader Linie.“ Wir wollen endlich zur Angabe der Construction einer allgemeinen Classe von Curven höherer Ordnung übergehen, nämlich der Curven $n+1^{\text{ten}}$ Grades mit einem n-fachen Punkte, falls dieser bekannt ist. Da ein solcher Punkt für $\frac{1}{2} n(n+1)$ Bedingungen zählt, so reichen $\frac{1}{2}(n+1)(n+1+3) - \frac{1}{2} n(n+1) = 2n+2$ weitere Punkte hin, die Curve zu bestimmen; dieselben sollen a_1, a_2, a_3 . . . a_{2n+2}, der n-fache Punkt hingegen L heissen. Nimmt man den n-fachen Punkt L zu einem und zwei weitere Punkte z. B. a_1 und a_2 zu den anderen Hauptpunkten M und N eines eindeutigen involutorischen Systems, das sonst noch beliebig ist, so wird der zu zeichnenden Curve C_{n+1} eine Curve entsprechen, die man leicht erhält, wenn man in den Resultaten des Art. 12 n

mit $n+1$, p mit n, q und r aber mit 1 vertauscht, und dabei überdies berücksichtigt, dass für die involutorische Lage der Systeme die Punkte L, M, N mit den resp. Punkten A, M, N identisch sind. Es ergiebt sich dadurch, dass — wenn man nämlich von den Hauptlinien abstrahirt — unserer Curve C_{n+1} eine Curve C_n von der Ordnung n entsprechen muss, die in L einen $(n-1)$-fachen, in M und N je einen nullfachen Punkt haben wird, die daher durch diese Punkte gar nicht hindurchgeht; selbstverständlich geht C_n durch $a'_3, a'_4 \ldots a'_{2n+2}$. Durch diese Daten ist C_n vollkommen bestimmt, denn wir kennen von ihr einen $(n-1)$-fachen Punkt L und $2n$ weitere Punkte $a'_3, a'_4 \ldots a'_{2n+2}$, also im Ganzen $\frac{1}{2}(n-1)n+2n = \frac{n}{2}(n+3)$ Bedingungen. Wir sind daher im Stande, eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem n-fachen Punkt linear zu verzeichnen, sobald wir eine Curve n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$-fachen Punkte zu construiren wissen. Wendet man dieses Verfahren successive an, so gelangt man endlich zur Aufgabe, eine Curve erster Ordnung aus $2n=2$ Punkten zu verzeichnen, die man mittelst des Lineals sofort lösen kann. Wir sind somit zu der Lösung folgender richtigen Aufgabe gelangt:

> „Von einer Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist ein n-facher Punkt und $2n+2$ weitere einfache Punkte gegeben; dieselbe ist linear zu construiren."

Für $n=2$ ergiebt sich die Construction der Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, falls dieser und sechs weitere Punkte gegeben sind.

Zum Schlusse sei bemerkt, dass wenn zwei quadratische verwandte Systeme S und Σ die Kreispunkte ihrer Ebenen zu (imaginären) Hauptpunkten besitzen, dieselben kreisverwandt sind, weil sich dann die Figuren dieser Ebene genau so entsprechen, wie es der Kreisverwandtschaft zukommt.

Prag, im April 1869.

XXII.

Anwendung der Lehre vom Stosse elastischer Körper auf einige Wärmeerscheinungen.

Von

Prof. Dr. W. C. Wittwer

in Regensburg.

Es ist gegenwärtig wohl allgemein angenommen, dass die Erscheinungen der Wärme sich auf Bewegungen von elastischen Körpern zurückführen lassen. Bleiben die Theilchen der warmen Gegenstände stets so nahe bei einander, dass die zwischen ihnen herrschenden Molecularanziehungen auch bei der grössten vorkommenden gegenseitigen Entfernung noch einen merkbaren Werth haben, wie dieses bei den festen und tropfbar flüssigen Körpern der Fall ist, so müssen sich diese Bewegungen auf Oscillationen reduciren lassen, während bei den Gasen ein bewegtes Theilchen ohne Richtung und Geschwindigkeit zu ändern soweit fortgeht, bis es in die Wirkungssphäre eines zweiten Theilchens gelangt oder an ein anderes Hinderniss anstösst, worauf es nach den Gesetzen vom Stosse vollkommen elastischer Körper reflectirt wird. Auf dieser Annahme beruht die Theorie der Gase von Krönig*. In meinem „Entwurfe einer Theorie der Gase" ** machte ich darauf aufmerksam, dass bei der Bewegung der Gasatome auch auf die Aethertheilchen, die zwischen die Luftatome eingestreut sind, Rücksicht genommen werden müsse, denn ich halte es für völlig unmöglich, dass die Lufttheilchen sich bewegen können, ohne dass die mit ihnen untermischten Aethertheilchen von ihrer Bewegung beeinflusst werden.

---

* Pogg. Ann. XCIX.

** Diese Zeitschrift XIV, 2.

Um mir von den hier stattfindenden Wirkungen ein Bild machen zu können, denke ich mir im Nachstehenden die in Thätigkeit befindlichen Atome als in einer Reihe auf einander folgend, wie ich dieses in der vorerwähnten Abhandlung gelegentlich der Untersuchung der Wärmeleitung gethan habe. Die mit einander in gegebener Ordnung wie etwa

$$a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' \ldots$$

abwechselnden Atome stossen in der Weise auf einander, dass gleichzeitig a und b, c und a', b' und c' u. s. w. zusammentreffen, worauf dann jedes Atom rückwärts geht, und infolge dieser Bewegung wieder alle gleichzeitig b mit c, a' mit b', c' mit a'' ... zusammenstossen, während die äussersten Glieder der Reihe in dem nämlichen Augenblicke von einer festen Wand zurückprallen und ohne Aenderung der Geschwindigkeit nur die Richtung der Bewegung wechseln. In dem Momente 3 erfolgt wieder der Stoss ab, ca', $b'c'$ ... wie im ersten. Ich nehme der Einfachheit wegen alle Stösse als central und so an, dass die Richtungen je zweier zusammenstossenden Atome in die nämliche Gerade fallen. In der Natur ist dieses selbstverständlich nur ein sehr seltener Ausnahmefall, aber wie sich die Atome auch gegen einander bewegen mögen, so kann man stets die beiderseitigen Richtungen so zerlegen, dass die eine Componirende den oben ausgesprochenen Bedingungen nachkommt, während die andere gar nicht geändert wird, und diese letztere Componirende, die mit dem Stosse gar nichts zu thun hat, setze ich der Einfachheit wegen gleich Null. Clausius* hat darauf hingewiesen, dass bei excentrischem Stosse ausser der fortschreitenden Bewegung der stossenden Körper auch eine rotirende entstehen müsse. Hat man mit Rotationen zu thun, so kann man, ohne sich zu weit von der Natur zu entfernen, die eine Componirende nicht mehr gleich Null setzen, wie ich dieses im Nachstehenden zu thun gedenke, da die Rotationen gerade auf Rechnung dieser Wirkung zu setzen sind; Drehungen können aber nur vorkommen, wenn die stossenden Körper sich unmittelbar berühren; wenn man aber annimmt, dass sie schon auf einige Entfernung eine Thätigkeit auf einander ausüben, vermöge deren sie einer weiteren Annäherung widerstreben, so kann der Effect dieser Abstossung einerseits kein anderer sein, als wenn jeder mit einem vollkommen elastischen Polster umgeben wäre, während andererseits eine Rotation so wenig hervorgebracht wird, als dieses bei der gegenseitigen Anziehung zweier Körper der Fall ist. In der Natur haben wir zu thun mit Aethertheilchen, die sich abstossen, und mit Massentheilchen, die mit Aethertheilchen überzogen sind, und darum sowohl der Annäherung blosser Aethertheilchen als auch anderer Massentheilchen, die ja auch ihre Aetherhüllen haben, widerstreben. Ich halte mich darum für berechtigt, von den Rotationen der Atome zu abstrahiren.

* Pogg. Ann. C. 354.

Der Widerstand, den zwei Theilchen der gegenseitigen Annäherung in den Weg legen, ist eine Function der Entfernung, und diese Function wird bei den verschiedenen Atomen eine verschiedene sein, so z. B. nimmt der Widerstand allem Anscheine nach bei abnehmender Entfernung bei den festen Körpern und bei den tropfbaren Flüssigkeiten rascher zu als bei den Gasen, allein was immer für ein Gesetz er befolgen möge, so wird bei der Annäherung zweier Theilchen die Reihenfolge der Erscheinungen immer die sein, dass diese gegenseitige Annäherung fortwährend langsamer wird, endlich aufhört, und dass dann die Entfernung sich in umgekehrter Ordnung ändert, d. h. sich beschleunigt. In welcher Reihenfolge die Abnahme und dann die Zunahme der Abstände erfolgt, ist gleichgiltig, wenn nur am Ende der Erscheinung der absolute Werth der Geschwindigkeit dem Anfangswerthe derselben gleich ist, was von absolut elastischen Körpern, die ich hier voraussetzen will, verlangt wird.

Die Formeln, welche die Geschwindigkeiten zweier elastischer Körper nach dem Stosse aus den Geschwindigkeiten vor dem Stosse ableiten lassen, sind sehr einfach; bedeuten nämlich M, m, U, u der Reihe nach die Massen der zwei Körper und ihre Geschwindigkeiten vor dem Stosse, V und v die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, so erhält man bekanntlich

$$V = \frac{(M-m)\,U + 2\,m\,u}{M+m}, \tag{1}$$

$$v = \frac{(m-M)\,u + 2\,M\,U}{M+m}, \tag{2}$$

auch hat man

$$M\,(U^2 - V^2) = m\,(v^2 - u^2), \tag{3}$$

$$M\,(U - V) = m\,(v - u), \tag{4}$$

$$U + V = u + v. \tag{5}$$

Diese Formeln sehen ganz einfach aus, sie wachsen aber in wahrhaft colossaler Weise an, wenn man mehrere stossende Körper berücksichtigen will und die Geschwindigkeit sucht, die der eine nach so und so vielen vorausgegangenen Stössen besitzt. Es ist mir nicht gelungen, die Formeln auf brauchbare Dimensionen zu concentriren und darum bleibt mir nichts anderes übrig, als durch tabellarische Zusammenstellungen für specielle Fälle zu zeigen, was durch eine allgemeine Formel nachzuweisen unmöglich ist.

Es sei zunächst angenommen, man habe eine Reihe von 8 Atomen $a \ldots h$, von denen a, b, c, d je die Masse $M = 4$, e, f, g, h die Masse $m = 1$ besitzen. Die absolute Grösse der Geschwindigkeit der ersteren 4 also U sei $= 2$, die Geschwindigkeit u der 4 letzteren Theilchen habe den Werth 4. Während a, c, e und g von links nach rechts gehen, welcher Bewegung ich das Zeichen $+$ vorsetzen will, haben b, d, f und h die entgegengesetzte Bewegung mit dem Zeichen $-$. In dem Zeittheilchen $\tau = 1$ stossen a und b, c und d, e und f, g und h zusammen und bekommen die

in der zweiten Zeile ihrer jeweiligen Columne in Tab. I angegebenen Richtungen und Geschwindigkeiten. Im Zeittheilchen $\tau = 2$ stossen, wie dieses Zeile 2 ausdrückt, *b* und *c*, *d* und *e*, *f* und *g* zusammen, *a* prallt an die links befindliche Wand, *h* stösst an die Wand rechts und das Ergebniss aller Stösse findet sich in Zeile 3. Im Zeittheilchen 3 finden die gleichen Vorgänge wie in 1 statt, kurz stets stösst das mit + versehene Theilchen an das ihm rechts stehende mit — bezeichnete, und das Ergebniss findet sich in der nächstfolgenden Zeile. Die Einrichtung ist die nämliche wie in Tab. I meiner oben citirten Abhandlung.

Tabelle I.

τ	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	2,0	—2,0	2,0	—2,0	4,0	—4,0	4,0	—4,0
2	—2,0	2,0	—2,0	2,0	—4,0	4,0	—4,0	4,0
3	2,0	—2,0	2,0	—0,4	5,6	—4,0	4,0	—4,0
4	—2,0	2,0	—0,4	2,0	—4,0	5,6	—4,0	4,0
5	2,0	—0,4	2,0	—0,4	5,6	—4,0	5,6	—4,0
6	—0,4	2,0	—0,4	2,0	—4,0	5,6	—4,0	5,6
7.	0,4	—0,4	2,0	—0,4	5,6	—4,0	5,6	—5,6
8	—0,4	0,4	—0,4	2,0	—4,0	5,6	—5,6	5,6
9	0,4	—0,4	0,4	—0,4	5,6	—5,6	5,6	—5,6
10	—0,4	0,4	—0,4	0,4	—5,6	5,6	—5,6	5,0
11	0,4	—0,4	0,4	—2,0	4,0	—5,6	5,6	—5,6
12	—0,4	0,4	—2,0	0,4	—5,6	4,0	—5,6	5,6
13	0,4	—2,0	0,4	—2,0	4,0	—5,6	4,0	—5,6
14	—2,0	0,4	—2,0	0,4	—5,6	4,0	—5,6	4,0
15	2,0	—2,0	0,4	—2,0	4,0	—5,6	4,0	—4,0
16	—2,0	2,0	—2,0	0,4	—5,6	4,0	—4,0	4,0
17	2,0	—2,0	2,0	—2,0	4,0	—4,0	4,0	—4,0

Wie man sieht, befinden sich sämmtliche Theilchen in dem Momente 17 in demselben Zustande, den sie in der Zeit 1 hatten und es muss sich daher die Reihenfolge der Erscheinungen nach Verfluss von je 16 Zeiteinheiten wiederholen. Diese Wiederholung derselben Zustände nach einer beschränkten Anzahl von Stössen ist übrigens durchaus nicht nothwendig, wie dieses nachfolgende Tabelle zeigt, in welcher *a*, *c*, *e* die Masse $M = 4$, *b*, *d* und *f* die Masse $m = 1$ haben, während die Anfangsbewegungen die in der ersten Zeile angegebenen sind.

Tabelle II.

z	a	b	c	d	e	f
1	2,0000	— 4,0000	1,0000	— 4,0000	1,0000	— 4,0000
2	— 0,4000	5,6000	— 1,0000	4,0000	— 1,0000	4,0000
3	0,4000	— 4,9600	1,6400	— 4,0000	1,0000	— 4,0000
4	— 1,7440	3,6160	— 0,6160	5,0240	— 1,0000	4,0000
5	1,7440	— 3,1552	1,0768	— 4,6144	1,4096	— 4,0000
6	— 0,2157	4,6835	— 1,1997	4,4915	— 0,7542	4,6554
7	0,2157	— 4,7296	1,1536	— 3,9016	1,3441	— 4,6554
8	— 1,7624	3,1829	— 0,8685	4,1867	— 1,0557	4,9438
9	1,7624	— 3,2993	0,7521	— 4,2011	1,0413	— 4,9438
10	— 0,2623	4,7994	— 1,2292	3,7240	— 1,3527	4,6324
11	0,2623	— 4,8464	1,1822	— 4,3987	0,6780	— 4,6324
12	— 1,7812	3,3275	— 1,0502	4,5307	— 1,4462	3,8642
13	1,7812	— 3,6768	0,7009	— 5,0323	0,9446	— 3,8642
14	— 0,4020	5,0560	— 1,5924	4,1408	— 0,9789	3,8299
15	0,4020	— 5,5814	1,0670	— 4,0507	1,0690	— 3,8299
16	— 1,9914	3,9920	— 0,9801	4,1376	— 0,8906	4,0083
17	1,9914	— 3,9634	1,0037	— 3,9075	1,1207	— 4,0083
18	— 0,3905	5,5643	— 0,9578	3,9584	— 0,9309	4,1981

Es soll nun eine Anwendung auf die Physik und zwar speciell auf die Wärmelehre gemacht werden.

Diese Doctrin nimmt an, dass die Wärme (zunächst die fühlbare) von der Bewegung der kleinsten Theile eines Körpers herrühre. Man kann sich nun die Reihe $a \ldots h$ (Tab. I) oder $a \ldots f$ (Tab. II) als in einer engen Röhre, deren Wände die Wärme nicht leiten, befindlich vorstellen, oder man kann sich ein Stück aus dem Krönig'schen Kasten genommen denken, in dem sich zwei Gase befinden, deren Bewegung so ist, dass die Atome stets central auf einander prallen, eine Annahme, welche, wie ich glaube, vollständig zulässig ist. Wenn man will, können die genannten Reihen auch Stücke sehr dünner Stäbe eines festen Körpers sein, bei dem das Umkehren der äussersten Glieder durch die Wirkung der Molecularattraction besorgt wird. Ist nun die Wärme aus einer Bewegung der kleinsten Theile der Körper abzuleiten, so muss die Temperatur t eine Function der Masse m eines Atomes und seiner Geschwindigkeit v sein, es muss die Gleichung

$$t = \varphi\,(m, v) \tag{6}$$

gelten.

Zur Beantwortung der Frage, welche Function diese sei, haben wir aus der Physik die Beobachtung, dass, wenn zwei Körper oder zwei Kör-

pertheile einige Zeit hindurch der gegenseitigen Einwirkung ausgesetzt waren, ihre Temperatur allenthalben die nämliche ist, und es muss also der mittlere Werth von $\varphi(m, v)$ immer der gleiche sein, welch' immer für ein Atom aus je einer der vorstehenden Tabellen wir auswählen.

Nehmen wir hierzu zunächst die Tab. I, weil diese von der Zeit 1—16 ein abgeschlossenes Ganzes bildet, an dem durch Annahme der Fortsetzung der Bewegung der Atome nichts geändert wird.

1. Setzt man, es sei $t = mv^2$, es sei also die Temperatur der lebendigen Kraft der Atome proportional, so bekommt man als Mittelwerth für je ein Atom

für die Theilchen $a \dots d$ $\qquad$ für die Theilchen $e \dots h$

$$t = \frac{8.4}{16}(2{,}0^2 + 0{,}4^2) = 8{,}32, \qquad t = \frac{8}{16}(4{,}0^2 + 5{,}6^2) = 23{,}68.$$

Die mittleren Werthe der lebendigen Kräfte verhalten sich also wie 8,32 : 23,68 und in dem gleichen Verhältnisse müssten auch die Temperaturen zweier Körper stehen, von denen der eine das Atomgewicht 4, der andere das Atomgewicht 1 hat, nachdem ihnen Zeit zum Austausche der Wärme gelassen wurde. Die Beobachtung lehrt aber, dass die Temperaturen beider Körper die nämlichen seien, und es kann daher die Temperatur eines Körpers nicht der lebendigen Kraft seiner Atome proportional sein.

Aus der Krönig'schen Darstellung geht hervor, dass sich die Geschwindigkeiten verschiedener Atome bei gleicher Temperatur umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Atomgewichte verhalten, dass also bei gleicher Temperatur die lebendigen Kräfte der Atome gleich sind, und Clausius* hat diesem Satze beistimmend die mittleren Geschwindigkeiten berechnet, welche den Atomen verschiedener Gase bei 0° zukommen. Ich mache hier auf folgenden Umstand aufmerksam. Gesetzt in dem Krönig'schen Kasten seien beliebig viele Atome von Sauerstoff und beliebig viele Atome von Wasserstoff enthalten, welche sich in der von Krönig angegebenen Weise bewegen, und die mittleren Geschwindigkeiten dieser Atome mögen sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln der Atomgewichte, also wie 1 zu 4 verhalten. So lange nun die einzelnen Atome sich bewegen, ohne an einander anzustossen, bleibt der Zustand ungeändert, und dieses findet auch in dem Falle statt, dass gleichartige Atome auf einander prallen; wenn aber ein Sauerstoffatom an ein Wasserstoffatom stösst, so behalten wohl beide zusammen die Summe ihrer bisherigen lebendigen Kräfte, aber so lange das Verhältniss der Geschwindigkeit des Sauerstoffatomes zu der des Wasserstoffatomes grösser ist, als 1 zu 16, so lange wird lebendige Kraft von dem Sauerstoff auf den Wasserstoff übergehen, und wenn nach

* Pogg. Ann. C. 377.

einiger Zeit eine grosse Anzahl von Zusammenstössen stattgefunden hat, so kann die lebendige Kraft der Sauerstoffatome nicht mehr so gross sein, als die der Wasserstoffatome. Mischt man Sauerstoff und Wasserstoff von ganz gleicher Temperatur, so ist die Geschwindigkeit, mit der sich die einzelnen Atome des entstandenen Knallgases bewegen, nach der Mengung eine ganz andere als vor derselben, wenn die lebendigen Kräfte bei gleicher Temperatur gleich sind. Es wird zugegeben werden müssen, dass der Uebergang von lebendiger Kraft von den Sauerstoffatomen auf den Wasserstoff wenig innere Wahrscheinlichkeit hat, wenn auch ihre Möglichkeit nicht zu bestreiten ist, da die Summe der lebendigen Kräfte eine Aenderung nicht erfährt.

In dem Krönig'schen Kasten können wir uns eine Zwischenwand gesetzt denken, welche der Einfachheit wegen aus in einer Ebene ausgebreiteten Sauerstoffatomen oder auch aus anderen Atomen von dem Gewichte 16 bestehen mag, und diese Atome seien durch Molecularwirkung so unter einander verbunden, dass sie wohl oscilliren, aber nur innerhalb eines beschränkten Raumes hin und hergehen können, kurz es sei eine feste Wand von in einer Ebene ausgebreiteten Atomen vom Gewichte 16 in dem Kasten. Befinden sich nun auf der einen Seite dieser Wand Sauerstoffatome, so werden diese auf die Wand aufstossen, und oscilliren die getroffenen Theilchen der letzteren mit Geschwindigkeiten, deren mittlerer Werth (stets in dem Augenblicke, in dem ein Theilchen die Gleichgewichtslage passirt, gerechnet) der mittleren Geschwindigkeit der Sauerstoffatome gleich ist, so wird dadurch im Ganzen nichts geändert. Kommen nun auf die andere Seite der Wand Wasserstoffatome, so wirken die Wandtheilchen nach beiden Seiten gleich. Hat die lebendige Kraft der Wasserstoffatome den gleichen Werth wie die der Sauerstoffatome, so giebt die Wand lebendige Kraft an das aufstossende Wasserstofftheilchen ab und ersetzt den Verlust auf der anderen Seite aus der lebendigen Kraft des dort anprallenden Sauerstoffes; am Schlusse der Beobachtung haben die Atome des letzteren weniger lebendige Kraft als die des Wasserstoffes auf der anderen Seite der Wand und wenn gleiche lebendige Kraft der Atome gleiche Temperatur bedingt, so muss auf der Wasserstoffseite des Kastens eine höhere Temperatur sein als auf der Sauerstoffseite, ein Schluss, der dem Ergebniss der Beobachtung widerspricht. Man kommt auf dasselbe Resultat, wenn man in der in Tabelle I angegebenen Reihe $a \ldots h$ das Theilchen d als zur Wand gehörig betrachtet.

Würde die Wand aus mehreren Ebenen bestehen, so würde dadurch im Endergebniss wieder nichts geändert, und man kann die vorstehende Schlussfolge leicht auf den Fall ausdehnen, in dem feste oder tropfbarflüssige Körper sich berühren.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen halte ich mich für berechtigt, den Satz auszusprechen, dass bei Körpern von gleicher Tem-

peratur und verschiedenem Atomgewichte der Mittelwerth der lebendigen Kraft der einzelnen Atome in jedem Körper ein verschiedener sei, und zwar ist er grösser, wenn das Atomgewicht kleiner wird, und umgekehrt.

2. Es sei $t = m^2 v^2$.

Unter dieser Annahme bekommt man

für die Theilchen $a \dots d$ für die Theilchen $e \dots h$

$$t = \frac{16.8}{16}(2{,}0^2 + 0{,}4^2) = 33{,}28, \qquad t = \frac{8}{16}(4{,}0^2 + 5{,}6^2) = 23{,}68.$$

Man sieht sehr leicht, dass diese Voraussetzung der Erfahrung eben so wenig entspricht, als die vorhergehende.

3. Es sei $t = mv$.

In diesem Falle ergiebt sich

für die Theilchen $a \dots d$ für die Theilchen $e \dots h$

$$t = \frac{4.4}{16}(2{,}0 - 2{,}0 + 0{,}4 - 0{,}4) = 0, \qquad t = \frac{4}{16}(4{,}0 - 4{,}0 + 5{,}6 - 5{,}6) = 0.$$

Die Temperatur wäre also $= 0$, sie wäre von der Bewegung der Theilchen unabhängig, ein Satz, der wohl wenig Wahrscheinlichkeit für sich hat.

4. Ich nehme nun an, es sei $t = mv =$ der sogenannten *quantitas motus*, wenn diese jedesmal positiv genommen wird, in welcher Richtung sich ein Theilchen auch bewegen möge.

In diesem Falle bekommt man

für die Theilchen $a \dots d$ für die Theilchen $e \dots h$

$$t = \frac{4.8}{16}(2{,}0 + 0{,}4) = 4{,}8, \qquad t = \frac{8}{16}(4{,}0 + 5{,}6) = 4{,}8.$$

Jetzt werden beide Temperaturen gleich. Ich weiss wohl, dass kein Mathematiker sich eines kleinen Schauders wird erwehren können, wenn er hier positive und negative Grössen ohne Rücksicht auf das Zeichen addirt sieht, und ich erkläre recht gern, dass ich meine Annahme freudigst aufgeben werde, wenn ich eine andere Function von m und v kennen lerne, welche den an sie gestellten Forderungen genügt, ohne den Fehler der vorstehenden zu besitzen, doch möge mir einstweilen gestattet sein, auf dieser fortzubauen. Ich betrachte zunächst die Temperatur des einzelnen Theilchens als proportional der Summe der Wirkungen, welche es in einer gegebenen Zeit auf die Nachbartheilchen durch seine Stösse ausübt, und das Zeichen — bedeutet hier nicht eine negative Bewegungsgrösse, denn diese ist nicht denkbar, sondern deutet nur an, dass das getroffene Theilchen auf der der positiven entgegengesetzten Seite des stossenden Atomes liegt.

Bezüglich der Tab. II muss ich daran erinnern, dass dieselbe nicht abgeschlossen ist wie Tab. I, und die Temperaturen der einzelnen Atome werden daher auch nicht ganz gleich sein. In Tab. III habe ich die Mittelwerthe für die ersten 6, 12, 18 Zeitmomente zusammengestellt und ihnen noch die Grössen beigefügt, die sich bis zum Zeittheilchen 30 ergeben. Die

Einzelwerthe 19—30 habe ich in Tab. II im Interesse der Raumersparniss weggelassen.

Tabelle III.

Zeit	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
1—6	4,3358	4,3358	4,3550	4,3550	4,1092	4,1092
1—12	4,1833	4,1833	4,2561	4,2561	4,3606	4,3606
1—18	4,3352	4,3352	4,2389	4,2389	4,2259	4,2259
1—24	4,2417	4,2417	4,2769	4,2769	4,2814	4,2814
1—30	4,2514	4,2514	4,2813	4,2813	4,2673	4,2673

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, dass sich die Mittelwerthe der Temperaturen immer näher kommen, und wenn es sich, wie dieses bei der Wärme der Fall ist, um eine sehr grosse Anzahl von Stössen handelt, ist die Annahme, dass die fraglichen Mittelwerthe endlich gleich werden, gewiss vollständig gerechtfertigt.

Die Werthe in den Columnen a und b, c und d, e und f sind gleich, wenn die Zahl der Zeiteinheiten eine gerade ist, es muss nämlich die Summe der Bewegungsgrössen m für die Zeitpaare 1 und 2, 3 und 4 u. s. w. gleich sein, während für die Columnen b und c, d und e dasselbe für die Zeitpaare 2 und 3, 4 und 5 u. s. w. gilt. Es leitet sich dieser Umstand unmittelbar aus Gleichung 4) ab.

Ich habe auch eine Tabelle unter der Voraussetzung berechnet, dass

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
m	4	1	4	1	4	1
v	1,0000	—4,0000	2,0000	—4,0000	2,0000	—4,0000,

wenn m das Atomgewicht, v die ursprüngliche Bewegung bedeutet.

Es möge mir erlassen werden, diese Tabelle *in extenso* wieder zu geben, ich will mich darauf beschränken, die Mittelwerthe der Temperaturen für die ersten 6, 12, 18, 24 und 30 Zeiteinheiten zusammenzustellen.

Tabelle IV.

Zeit	*a* und *b*	*c* und *d*	*e* und *f*
1—6	3,4573	4,4450	5,6977
1—12	4,2162	4,5439	4,8399
1—18	4,4260	4,5611	4,6129
1—24	4,2099	4,5231	4,8670
1—30	4,5327	4,5186	4,5487

Es ist unverkennbar, dass auch hier endlich einmal eine Ausgleichung der Mittelwerthe von mv für jedes einzelne Atom eintreten muss, dass die Temperatur eines jeden die gleiche wird.

Stellt der Mittelwerth von mv, der sich aus einer grösseren Anzahl von aufeinander folgenden Stössen ergiebt, die Temperatur eines Atomes dar, so ist die Summe, die man durch Zusammenstellung aller dieser Mittelwerthe für sämmtliche Atome erhält, der Wärmemenge eines Körpers oder einer Mischung proportional. Berechnet man nun aus Tab. I Zeile 1 die ursprüngliche Grösse dieser Wärmemenge, so erhält man

$$W = 4 \,.\, 4 \,.\, 2 + 4 \,.\, 4 = 48.$$

Der Mittelwerth von mv ist für jedes Atom $= 4{,}8$ und für alle 8 Atome ist also die Wärmemenge ausgedrückt durch

$$W_1 = 38{,}4,$$

woraus sich ergiebt, dass ein Wärmeverlust

$$W - W_1 = 9{,}6$$

stattgefunden hat. Wären die ursprünglich gegebenen Temperaturen der beiden in Tabelle I vorgeführten Körper die durch Zeile 9 ausgedrückten gewesen, so hätte man eine ursprüngliche Wärmemenge

$$W = 4 \,.\, 4 \,.\, 0{,}4 + 4 \,.\, 5{,}6 = 28{,}8$$

gehabt, das durch die Ausgleichung sich ergebende Quantum wäre aber kein anderes gewesen als im vorigen Falle, also wieder 38,4, und es folgt hieraus ein Gewinn von Wärme, der dem vorigen Verluste gleich ist.

Diese beiden Aenderungen des ursprünglichen Wärmequantums finden statt ohne Abgabe oder Aufnahme von Wärme von aussen und ohne Aenderung der ursprünglichen Summe der lebendigen Kräfte und ich verkenne die wesentliche Verschiedenheit der hieraus sich ergebenden Consequenzen gegen die Sätze der mechanischen Wärmetheorie durchaus nicht, allein meine Schlüsse sind die nächste Folge der Ableitung der Wärmeerscheinungen aus gegenseitigen Stössen elastischer Körper und entweder muss die Aenderung der Wärmemenge ohne Aenderung der lebendigen Kraft möglich sein, oder die Wärme beruht nicht auf Bewegungen elastischer Körper, die auf einander stossen können.

Es ergiebt sich aus dem Vorstehenden ein Verlust von Wärme, wenn ein Körper mit grösserem Atomgewichte durch einen solchen mit kleinerem Atomgewichte abgekühlt wird; im entgegengesetzten Falle ergiebt sich ein Gewinn an Wärme. Auf dieses Resultat kommt man auch durch die Tabellen II, III und IV. Man findet bei

	die urspr. Wärme	Durchschnittswärme	Verlust
Tabelle II und III:	28,0	25,6	2,4
„ IV:	32,0	27,2	4,8

In beiden Fällen verliert der schwerere Körper an Wärme. Es kommen übrigens im Nachfolgenden noch Umstände zur Sprache, welche Modificationen des vorstehenden Satzes bedingen.

Mit dem Verluste oder Gewinne an Wärme ist ohne Zweifel eine Aenderung des Volumens verbunden und hier könnte der Schlüssel zu dem Satze von der Arbeitsäquivalenz der Wärme zu suchen sein, für welchen Satz meines Wissens zur Zeit der mathematische Beweis fehlt. Man hat den Satz aus der Erfahrung abgeleitet und als Axiom in die mathematischen Formeln eingeführt; es muss jedoch auch gelingen, ihn mathematisch abzuleiten, so dass in einer Formel sich eine Ausdehnung berechnet und dafür allenfalls so wie im Vorhergehenden sich etwas vermindert, was der Physiker als Repräsentanten der Wärme erklären kann. Ich halte es übrigens nicht für unmöglich, dass der Satz von der Arbeitsäquivalenz der Wärme nicht ganz strenge richtig ist, und dass die verschiedenen Resultate, welche die Versuche als Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit ergeben haben, nicht ganz auf Rechnung der Beobachtungsfehler zu setzen seien. Es wäre dieses sicherlich nicht der erste Fall in der Physik, dass man einen Satz anfangs für strenge richtig hielt und später kleine Unregelmässigkeiten beobachtete.

In der Natur sind die Massenatome bekanntlich mit Aether untermischt und diesem Umstande soll im Nachfolgenden zunächst dadurch Rechnung getragen werden, dass ich annehme, es wechseln die Massentheilchen ab mit solchen Atomen, deren Menge der materiellen Substanz gegen die ersteren nur sehr klein ist. Ich will nun setzen, es seien zwei Körper ab und AB gegeben, bei denen die Massen der Atome a und b sich zu denen der Atome A und B verhalten wie 100 zu 400, während zwischen je zwei Massenatomen sich eine Aetherkugel von der Menge 1 der materiellen Substanz befindet. Zu jedem Massenatom gehört ein Aetheratom, das unmittelbar hinter ihm steht, es bilden also a und α, A und α_1, b und β, B und β_1 je eine Dynamide. Es sei ferner der Körper AB etwas wärmer als ab, das Product seines Atomgewichtes in die Geschwindigkeit (mv) verhalte sich zu dem gleichen Producte der Atome a und b wie 1,1 zu 1,0 und dasselbe Verhältniss gelte auch für die jeweilig zu den Atomen gehörenden Aethertheilchen. Wir bekommen nun folgendes Resultat:

Tabelle V.

τ	a	α	A	α_1	b	β	B	β_1
1	4,0000	— 400,00	1,1000	— 440,00	4,0000	— 400,00	1,1000	— 440,00
2	— 4,0000	400,00	— 1,1000	440,00	— 4,0000	400,00	— 1,1000	440,00
3	4,0000	— 400,20	0,9005	— 439,21	4,7921	— 400,20	0,9005	— 440,00
4	— 4,0040	400,20	— 1,2946	438,82	— 3,2275	401,76	— 1,2985	439,60
5	4,0040	— 400,79	0,7079	— 436,52	5,5259	— 402,35	0,7118	— 439,60
6	— 4,0117	400,78	— 1,4728	435,76	— 2,5508	405,32	— 1,4843	438,83
7	4,0117	— 401,72	0,5334	— 432,18	6,1286	— 406,26	0,5446	— 437,73
8	— 4,0226	401,71	— 1,6248	431,09	— 2,0375	410,35	— 1,6468	437,73
9	4,0226	— 402,95	0,3868	— 426,59	6,5393	— 411,59	0,4080	— 437,73
10	— 4,0363	402,94	— 1,7428	425,23	— 1,7405	416,39	— 1,7772	436,36
mv (Mittel-werth.)	401,13	401,13	434,54	434,54	405,42	405,42	438,87	438,87

Ist umgekehrt unter sonst gleichen Umständen der Körper mit kleinerem Atomgewichte der wärmere, so ergiebt sich Nachstehendes:

Tabelle VI.

τ	a	α	A	α_1	b	β	B	β_1
1	4,4000	— 440,00	1,0000	— 400,00	4,4000	— 440,00	1,0000	— 400,00
2	— 4,4000	440,00	— 1,0000	400,00	— 4,4000	440,00	— 1,0000	400,00
3	4,4000	— 439,80	1,1995	— 400,79	3,6079	— 439,80	1,1995	— 400,00
4	— 4,3960	439,80	— 0,8054	401,18	— 5,1725	438,24	— 0,8015	400,40
5	4,3960	— 439,21	1,3921	— 403,48	2,8741	— 437,65	1,3882	— 400,40
6	— 4,3883	439,22	— 0,6272	404,24	— 5,8492	434,68	— 0,6157	401,17
7	4,3883	— 438,28	1,5666	— 407,82	2,2714	— 433,74	1,5554	— 401,17
8	— 4,3774	438,29	— 0,4752	408,91	— 6,3625	429,65	— 0,4532	402,27
9	4,3774	— 437,05	1,7132	— 413,41	1,8607	— 428,41	1,6920	— 402,27
10	— 4,3637	437,06	— 0,3572	414,77	— 6,6595	423,61	— 0,3228	403,64
mv	438,87	438,87	405,46	405,46	434,58	434,58	401,13	401,13

In beiden vorstehenden Tabellen sieht man deutlich die Fortpflanzung der Wärme durch Leitung. In der ersteren wächst die Temperatur von $a\alpha$ und $b\beta$ ganz allmälig, während sie in $A\alpha_1$ und $B\beta_1$ abnimmt. $A\alpha_1$ ist beiderseits mit kälteren Theilchen in Berührung und erkaltet daher rascher als $B\beta_1$ und ebenso erwärmt sich $b\beta$ schneller als $a\alpha$*. In der zweiten Tabelle findet man statt der Erwärmung eine Abkühlung und umgekehrt. Das Leitungsvermögen ist in beiden Fällen nur gering und zu einer Gleichstellung der Temperaturen der beiden Körper würde noch eine bedeutende Anzahl von Stössen nothwendig sein. Aus Tabelle II, welche das Schema eines besseren Wärmeleiters darstellt, ergiebt sich auch, dass die Temperatur eines Atomes nicht fortwährend wächst oder abnimmt, sondern dass Abnehmen und Zunehmen einander ablösen. Alles dieses würde sich in Tabelle V und Tabelle VI in längeren, übrigens bei der grossen Anzahl von Stössen, die in kurzer Zeit sich folgen, doch noch für uns unmessbar kleinen Perioden wiederholen. Es möge jedoch die vorstehende kleine Anzahl genügen und ich will daher annehmen, die Temperaturen seien ausgeglichen.

Die in einem Körper befindliche Wärmemenge ist gleich der Summe aller Producte mv seiner Theile. Jedes Atom bekommt durch den Ausgleich das nämliche Product (oder wenn man will, der mittlere Werth des Productes ist bei allen der gleiche), es haben also bei gleicher Temperatur alle Atome dieselbe Menge von Wärme. Nennt man specifische Wärme diejenige Wärmemenge, welche in der Gewichtseinheit enthalten ist, so ist der Werth der specifischen Wärme um so grösser, je bedeutender die Anzahl der in der Gewichtseinheit enthaltenen Atome, d. i. je kleiner das Atomgewicht ist. Man kommt so auf den längst bekannten Satz, dass das Atomgewicht der specifischen Wärme eines Körpers umgekehrt proportional sei. Dieser Satz ist jedoch nicht strenge, sondern nur annähernd richtig. Die Ursachen der Ungenauigkeit ergeben sich aus später anzugebenden Gründen.

Der Zahl nach sind sicherlich die Aethertheilchen in jedem Körper den Massentheilchen überlegen, und nach der Lehre vom Stosse absolut elastischer Körper kann, da die absolute Grösse des Productes aus Masse und Geschwindigkeit bei Berührung verschiedener Stoffe sich so stellt, dass der Mittelwerth desselben für jedes Theilchen gleich ist, der Enderfolg nur der sein, dass die mittlere Geschwindigkeit der Aethertheilchen allenthalben die gleiche ist, und da auch die Temperatur sich ausgleicht, kann man den Satz aufstellen, dass bei gleicher Temperatur die mittlere

* Die Columnen der Aethertheilchen eignen sich zur Vergleichtung besser als die der Massentheilchen, weil die absolute Grösse der Bewegung verhältnissmässig geringeren Schwankungen unterworfen ist. Der Durchschnittswerth von mv ist übrigens für a und α, A und α_1 u. s. w. wieder gleich.

Geschwindigkeit der Aethertheilchen in allen Körpern die nämliche ist. Nehmen wir nun an, wir haben zwei Körper von verschiedenem Atomgewichte und gleicher Temperatur, so stossen die Massentheilchen viel öfter an die Aethertheilchen als an andere Massentheilchen, und wir können daher die Ergebnisse der Stösse ersterer Art um so mehr als maassgebend betrachten, je grösser das numerische Uebergewicht der Aethertheilchen ist. Bei Körpern gleicher Temperatur stossen die Massentheilchen an Aethertheilchen von genau derselben Geschwindigkeit, und das nothwendige Ergebniss ist, dass die mittlere Geschwindigkeit der Massentheilchen sich zu der der Aethertheilchen umgekehrt wie die Mengen der materiellen Substanz verhalten, und bei Vergleichung verschiedener Körper von gleicher Temperatur kommt man wieder auf den bereits oben abgeleiteten Schluss, dass sich die mittleren Geschwindigkeiten auch der Massentheilchen zu einander umgekehrt wie die Mengen der materiellen Substanz, also umgekehrt wie die Atomgewichte verhalten müssen.

Wenn die Temperatur der beiden zu mischenden Körper bedeutendere Verschiedenheiten zeigt, als in den beiden vorhergehenden Fällen, so knüpfen sich an den bisher betrachteten Vorgang noch andere Erscheinungen, um deren willen ich mir erlauben muss, die nachfolgende Tabelle in grösserer Ausdehnung als die bisherigen vorzuführen. Die Verhältnisse der Atomgewichte sind wie im vorhergehenden Falle, die Wärmemengen dagegen verhalten sich wie 1,0 zu 1,2.

Tabelle VII.

τ	a	α	A	α_1	b	β	B	β_1
1	4,0000	−400,00	1,2000	−480,00	4,0000	−400,00	1,2000	−480,00
2	−4,0000	400,00	−1,2000	480,00	−4,0000	400,00	−1,2000	480,00
3	4,0000	−400,40	0,8010	−478,42	5,5842	−400,40	0,8010	−480,00
4	−4,0079	400,39	−1,5891	477,63	−2,4551	403,53	−1,5970	479,20
5	4,0079	−401,56	0,4158	−473,03	7,0515	−404,70	0,4236	−479,20
6	−4,4232	401,55	−1,9456	471,50	−1,1020	410,65	−1,9686	477,66
7	4,0232	−403,43	0,0669	−464,35	8,2565	−412,53	0,0894	−477,66
8	−4,0451	403,41	−2,2494	462,17	−0,0759	420,71	−2,2934	475,46
9	4,0451	−405,88	−0,2262	−453,16	9,0774	−423,19	−0,1837	−475,46
10	−4,0723	405,86	−2,4852	450,45	0,5177	432,78	−2,5541	472,72
11	4,0723	−408,79	−0,4486	−440,51	9,4273	−435,72	−0,3829	−472,72
12	−4,1032	408,76	−2,6484	437,42	0,6125	445,76	−2,7387	469,60
13	4,1032	−411,99	−0,5915	−427,54	9,2621	−449,00	−0,5018	−469,60
14	−4,1363	411,96	−2,7210	424,23	0,1876	458,45	−2,8418	466,25
15	4,1363	−415,33	−0,6527	−415,46	8,5845	−461,83	−0,5407	−466,25
16	−4,1700	415,30	−2,7216	412,08	−0,7307	469,69	−2,8634	462,85
17	4,1700	−418,66	−0,6367	−405,37	7,4138	−473,06	−0,5066	−462,85
18	−4,2028	418,63	−2,6553	402,08	−2,0710	478,43	−2,8125	459,53
19	4,2028	−421,83	−0,5542	−398,22	5,9320	−481,65	−0,4123	−459,53
20	−4,2336	421,80	−2,5375	395,13	−3,7282	483,86	−2,7022	456,42
21	4,2336	−424,76	−0,4211	−394,67	4,1748	−486,84	−0,2754	−456,42
22	−4,2614	424,73	−2,3874	391,86	−5,5483	485,47	−2,5504	453,59
23	4,2614	−427,38	−0,2572	−395,09	2,3213	−488,13	−0,1164	−453,59
24	−4,2859	427,35	−2,2264	392,61	−7,3907	488,07	−2,3781	451,09
25	4,2859	−429,66	−0,0839	−309,47	0,5300	−485,40	−0,0430	−451,09

Fortsetzung der Tabelle VII.

τ	a	α	A	α_1	b	β	B	β_1
26	−4,3071	429,64	−2,0758	397,31	0,0924	470,84	2,2070	448,03
27	4,3071	−431,64	0,0774	−407,45	−1,0448	−478,86	0,1822	448,03
28	−4,3255	431,62	−1,9551	405,57	10,5006	467,31	2,0378	447,05
29	4,3255	−433,37	1,2074	−418,34	2,2675	460,00	0,2833	447,05
30	−4,3418	433,36	−1,8802	416,67	11,5114	455,31	1,0470	446,39
31	4,3418	−434,95	0,2906	−431,21	8,0326	450,02	0,3327	446,39
32	−4,3570	434,93	−1,8615	420,64	12,0206	441,87	−1,8003	443,83
33	4,3570	−436,48	0,8170	−444,04	−8,2748	443,44	0,3220	443,88
34	−4,3724	436,46	−1,9037	448,35	−11,9000	428,17	−1,8023	442,26
35	4,3724	−438,08	0,2826	−458,81	−2,9748	429,81	0,2027	442,26
36	−4,3891	438,06	−2,0047	460,59	−11,4265	415,41	−1,9514	440,56
37	4,3891	−439,88	0,1902	−470,18	−2,1586	417,94	0,1972	440,55
38	−4,4083	439,86	−2,1558	463,21	10,3781	404,70	2,0707	438,09
39	4,4083	−441,97	0,0488	−470,49	−0,9011	406,81	0,0419	438,09
40	−4,4308	441,94	−2,3429	477,20	−8,9300	396,07	2,2203	436,85
41	4,4308	−444,41	−0,1270	−485,45	0,0875	390,44	0,2388	436,85
42	−4,4572	444,39	−2,5476	482,77	−7,2359	392,80	2,4184	433,09
43	4,4572	−447,25	−0,8185	−487,54	2,4078	395,75	−0,4118	433,09
44	−4,4876	447,22	−2,7485	484,48	5,4181	392,80	2,6027	430,55
45	4,4876	−450,48	−0,5043	−485,61	4,2827	396,08	0,6306	430,55
46	−4,5216	450,44	2,9283	482,18	8,0143	396,07	2,7758	427,94
47	4,5216	−454,08	−0,6626	−479,85	5,9761	400,28	0,7881	427,91
48	−4,5586	458,99	−3,0526	470,14	−9,0075	401,14	2,9101	425,55
49	4,5586	457,82	−0,7780	−470,90	7,1019	407,98	0,8709	425,55
50	−4,5974	457,78	−3,1178	466,91	0,8224	414,50	2,9880	419,08

51	4,5974	— 461,71	— 0,8186	— 459,30	8,4396	— 418,40	— 0,9058	— 419,68
52	— 4,6365	461,68	— 3,1053	455,37	— 0,0126	426,83	— 2,9914	415,78
53	4,6365	— 465,57	— 0,7871	— 446,38	9,0049	— 430,67	— 0,8506	— 415,78
54	— 4,6744	465,53	— 3,0095	— 442,58	0,2985	439,97	— 2,9202	412,01
55	4,6744	— 469,21	— 0,6727	— 433,23	9,0566	— 443,60	— 0,7113	— 412,01
56	— 4,7094	469,18	— 2,8301	429,72	0,0930	452,75	— 2,7626	408,54
57	4,7094	— 471,48	— 0,4759	— 421,03	8,6005	— 456,01	— 0,4907	— 408,54
58	— 4,7399	472,45	— 2,5785	417,98	— 0,5996	464,01	— 2,5259	405,52
59	4,7399	— 475,23	— 0,2043	— 410,89	7,6891	— 466,73	— 0,1990	— 405,52
60	— 4,7644	475,21	— 2,2526	408,44	— 1,7054	472,72	— 2,2206	403,10
61	4,7644	— 477,33	0,1288	— 403,72	6,4162	— 474,79	0,1482	— 403,10
62	— 4,7820	477,31	— 1,8855	401,97	— 3,1126	478,09	— 1,8630	401,39
63	4,7820	— 478,69	0,5045	— 400,17	4,9088	— 479,43	0,5308	— 401,39
64	— 4,7918	478,68	— 1,4939	399,18	— 4,6820	479,65	— 1,4738	400,44
65	4,7918	— 479,28	0,9010	— 400,55	3,3153	— 480,20	0,9258	— 400,44
66	— 4,7937	479,27	— 1,1012	400,35	— 6,2593	477,26	— 1,0760	400,29
67	4,7937	— 479,08	1,2947	— 404,82	1,7924	— 477,02	1,3097	— 400,29
68	— 4,7880	479,09	— 0,7308	405,38	— 7,6891	471,13	— 0,6933	400,91
69	4,7880	— 478,16	1,6623	— 412,58	0,4905	— 470,16	1,6599	— 400,91
70	— 4,7753	478,17	— 0,4038	413,84	— 8,8293	461,82	— 0,3479	402,22
71	4,7753	— 476,59	1,9831	— 423,13	— 0,4596	— 460,21	1,9571	— 402,22
72	— 4,7567	476,61	— 0,1371	424,97	— 9,[illegible]636	450,19	— 0,0587	404,12
73	4,7567	— 474,50	2,2407	— 435,50	— 0,9[illegible]89	— 448,06	2,1869	— 404,12
74	— 4,7336	474,53	0,0574	437,79	— 9,8124	437,29	0,1605	406,47
m v (1—66)	438,16	438,16	550,49	438,78	49[illegible]	440,99	551,71	441,49
m v (1 u. 2)	400,00	400,00	480,00	480,00	4[illegible]0,00	400,00	480,00	400,00
m v (64 u. 65	479,28	479,28	400,44	400,45	478,73	478,73	400,36	400,37

Diese Zusammenstellung ist bis zum Zeittheilchen 9 den früheren analog, von hier an bis 26 beziehungsweise 24 zeigt sich aber bei *A* und *B* nicht wie bisher ein Zeichenwechsel, sondern eine Zeichenfolge. Beide Theilchen, die in der Zeit 8 eine Bewegung von rechts nach links bekommen hatten, setzen dieselbe, wenn auch langsamer, fort, statt wieder nach rechts zu gehen, und in den folgenden Zeittheilchen findet auch nur ein Wechsel zwischen grösserer und geringerer Geschwindigkeit, nicht aber eine Aenderung der Richtung statt. Von 40—60 bei *A*, sowie von 38—60 bei *B* wiederholt sich diese Erscheinung, und auch hier findet das Beharren in der Richtung von rechts nach links statt. Bei dem Theilchen *b* beobachtet man etwas anderes, denn es geht von 9—15 nach rechts, von 26—40 nach links, von 53—57 wieder nach rechts. Betrachten wir zuerst *A* und *B*, so ist klar, dass, wenn diese Theilchen ihr Verhalten immer beibehalten würden, sie zuletzt ganz aus Reihe und Glied kommen müssten, und dass darum die Darstellung, die ich bisher eingehalten habe, eine totale Umänderung nöthig hätte. Es muss daher im Verlaufe der Zeit eine Periode kommen, in welcher die Theilchen das dem eben besprochenen entgegengesetzte Verhalten in der Weise einschlagen, dass sie, wenn nicht genau, doch nahezu an ihren alten Platz zurückkommen; es darf der Platzwechsel nicht grösser sein, als dass er sich noch durch die bei dem Temperaturwechsel vorkommenden Veränderungen erklären liesse. Das Theilchen *b* ist bis zum Schlusse von 57 wohl hin- und hergegangen, befindet sich aber doch erheblich weit von seiner ursprünglichen Stelle, denn es ist viel zu weit nach links gerückt. Um nun hier etwas klarer blicken zu können, habe ich mich veranlasst gesehen, der Tabelle VII eine so grosse Ausdehnung zu geben. Wie die zwei untersten Zeilen der Tabelle zeigen, ist der für die Zeiten 64 und 65 berechnete Werth von mv dem sich für 1 und 2 ergebenden nahezu entgegengesetzt, denn für diejenigen Atome, welche in den beiden ersten Zeittheilchen die durchschnittliche Bewegungsgrösse 400 hatten, haben wir bei 64 und 65 nahezu 480 und diejenigen, welche mit 480 begannen, besitzen nun nahebei 400, es haben also die Werthe der Bewegungsgrössen gewechselt. Wie sich aus den Tabellen V und VI ergiebt, entsprechen sich die Werthe der jeweiligen Bewegungsgrössen in der Weise, dass man stets dieselbe Summe bekommt, wenn man das dem einen Glied einer Tabelle zugehörige Product zu dem Producte addirt, welches man von dem entsprechenden Gliede der anderen Tabelle erhält. Wäre nun die erwähnte Auswechselung der Werthe von mv bei 65 und 66 einerseits, bei 1 und 2 andererseits eine vollständige, so würde sich die Fortsetzung der Tabelle VII von 65 an zu dem Stücke 1—64 genau so verhalten, wie die Tabelle VI zur Tabelle V und die Summe der mv (bei den Zeichenfolgen die Differenz) müsste für die einander entsprechenden Glieder die gleiche werden, in der Zeit 129 wäre wieder genau der Zustand von 1 hergestellt und sämmtliche Theilchen wären an ihrer ursprünglichen Stelle. In Wirk-

lichkeit geht die Auswechselung der Werthe von mv in Tabelle VII nicht vollständig vor sich, sie ist aber doch nahe genug, um zu dem Schlusse zu berechtigen, dass nach Verfluss von je 128 Zeittheilchen sich jedes Theilchen wieder nahezu an demselben Orte befinde. Das Theilchen b, das von 9 an eine Zeit lang stetig nach rechts ging, geht dem entsprechend von 70 an einige Zeit nach rechts, und ebenso beginnt für A und B in 73 eine Zeit der stetigen Wanderung nach rechts, entsprechend der Zeit 8 — 26, in der sie nach links gingen.

Bei 65 und 66 sind die Differenzen der Werth von mv nicht mehr so gross, als sie bei 1 und 2 waren; bei 128 und 129 werden sie wieder etwas kleiner sein, als bei 65 und 66 und daraus ergiebt sich, dass nach Verlauf von einigen Tausend Stössen eine vollständige Ausgleichung stattfinden muss.

In der drittletzten Zeile der Tabelle habe ich den mittleren Werth von mv, wie er sich für die Zeit 1 — 66 entziffert, angegeben. Man findet hier, dass dieser Mittelwerth in der dritten, fünften und siebenten Columne ein anderer ist, als der in der Columne 4, 6 und 8, welche Ungleichheit mit dem oben ausgesprochenen Satze, dass die Werthe in der ersten und zweiten, in der dritten und vierten u. s. w. Columne gleich seien, wenn die Zahl der Stösse eine gerade ist, nicht harmonirt. Es rührt dieses davon her, dass die Theilchen A, b und B zeitweise ihre Richtung nicht ändern; denn würde man diejenigen Glieder, in welchen das entgegengesetzte Zeichen eintreten sollte, von der Summe der übrigen abziehen, statt sie zu addiren, so würde die besprochene Gleichheit sofort eintreten. Da ich mir eine negative Bewegungsgrösse nicht denken kann, so nehme ich Anstand, diese Subtraction auszuführen, und ich kann mir diese eigenthümliche Erscheinung nicht anders erklären, als indem ich annehme, dass wir es hier mit einer Vergrösserung der Wärmemenge zu thun haben. Ich bringe die Erscheinung mit der bekannten Thatsache in Verbindung, dass die specifische Wärme der Körper bei wachsender Temperatur zunimmt.

Setzt man

$$mv^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots = L$$

und für den Fall des Eintretens des Ausgleiches der Temperatur

$$mv = m_1 v_1 = m_2 v_2 \ldots,$$

so wird

$$v_1 = \frac{m}{m_1} v, \quad v_2 = \frac{m}{m_2} v \text{ u. s. w.}$$

und daraus ergiebt sich

$$\frac{m^2 v^2}{m} + \frac{m^2 v^2}{m_1} + \frac{m^2 v^2}{m_2} + \ldots = L$$

$$7) \qquad mv = \sqrt{\frac{L}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots}}.$$

Berechnet man nun L und mv aus den in Tabelle VII Zeile 1 vorgeführten Daten, so erhält man

$$L = 785152,$$
$$mv = 441{,}66,$$

während die ursprüngliche mittlere Wärme, die sich aus der ersten Zeile durch einfache Addition ergiebt $= 440$ ist. Man findet also hier eine Vergrösserung der Wärmemenge, wenn zwei Körper von sehr verschiedener Temperatur gemischt werden, und an diesem Zuwachse trägt die Anwesenheit der Aethertheilchen α_1 und β_1 die Schuld, während die Theilchen A und B als mit grösserer Menge der materiellen Substanz versehen, im entgegengesetzten Sinne thätig sein würden.

Ueber die absolute Grösse des Wärmezuwachses wage ich zur Zeit eine Entscheidung nicht abzugeben. Wenn man nämlich nach der sogenannten Mischungsmethode, dem genauesten Mittel zur Bestimmung der specifischen Wärme, diese Grösse für einen Körper untersucht, so ist der gewöhnliche Vorgang der, dass man eine kleine Quantität des erwähnten Untersuchungskörpers in eine grössere Menge von Wasser von gegebener Temperatur bringt, und dann die hervorgebrachte (im Allgemeinen geringe) Temperaturänderung mit dem Thermometer bestimmt. Man beeilt sich zumeist dies zu thun, weil man Wärmeverluste nach aussen vermeiden will, und knüpft die Ablesung des Thermometers in der Regel an den Augenblick, in welchem das Instrument seinen höchsten Stand erreicht hat, also wieder zu fallen beginnt. Vergleicht man nun das Ergebniss der Tabelle VII mit dem Resultate der Gleichung 7), so findet man, dass vor geschehener Ausgleichung, also bei Beginn der Beobachtung (dargestellt durch die Tabelle) eine grössere Wärmemenge vorhanden ist, als nach dem Ausgleiche, der durch Gleichung 7) repräsentirt der Zustand ist, der nach einigen Tausend Stössen eintritt. Es ergiebt sich nun die Frage, ob man bei der eben angeführten Beobachtungsweise mit dem Falle, der durch die Tabelle dargestellt ist, zu thun hat, oder mit dem Falle der Gleichung 7). Man hat bei der Wärme in ein paar Secunden viele Millionen von Stössen, und dieses spricht für die Gleichung, während andererseits die Wärme von einem Atom B sich über viele Atome verbreiten muss und dazu wieder viele Millionen von Stössen braucht, was für den Fall der Tabelle VII spricht. Eine Beantwortung dieser Frage wäre daher zur Zeit noch als verfrüht zu erklären.

Es dürfte wohl selbstverständlich sein, dass alle die vorstehenden Betrachtungen über Wärmezunahme u. s. w. gemacht werden können, ohne dass man nöthig hätte, sich mit der Beantwortung der Frage zu beschäftigen, in welchem Verhältnisse die durch Thermometergrade bestimmten Temperaturen zu einander stehen, eine Frage, welche ich zur Zeit ganz unberührt lasse.

Wie man aus Tabelle VII leicht sehen kann, können, wenn einige Zeit hindurch bei ein paar benachbarten Massenatomen der Zeichenwechsel ausbleibt, diese sich möglicherweise ziemlich weit von einander entfernen. Im Allgemeinen wird die Entfernung wohl keine allzugrosse sein, denn wir haben die Zeichenfolge nur bei denjenigen Theilchen, deren Geschwindigkeit ihrer beträchtlichen Masse wegen an und für sich nicht gross ist.

Nichtsdestoweniger sind bei festen Körpern und tropfbaren Flüssigkeiten Fälle denkbar, wo die sonst so engen Grenzen der Molecularattraction überschritten werden. Aggregatzustandsänderungen oder chemische Zerlegungen werden die Folge davon sein.

Ist die Atomzahl in den zwei zusammengebrachten Körpern verschieden, so werden die bisherigen Resultate nicht geändert, wie dieses Tabelle VIII zeigt, in welcher das Atom $B\beta_1$ der Tabelle V durch ein weiteres Atom $c\gamma$ von gleicher Beschaffenheit mit $a\alpha$ ersetzt ist.

Wir haben hier den Fall, welcher in der Praxis bei der sogenannten Mischungsmethode in Anwendung kommt. Man nimmt eine grössere Quantität einer Flüssigkeit von bestimmter Temperatur ($a\alpha b\beta c\gamma$ der Tabelle) mischt dieselbe mit einer geringeren Quantität der Prüfungssubstanz ($A\alpha_1$) und bestimmt deren specifische Wärme aus der Endtemperatur.

Wendet man die Gleichung 7) auf diesen Fall an, so bekommt man für die erfolgte Ausgleichung der Temperatur

$$mv = \sqrt{\frac{678884}{\frac{3}{100} + \frac{1}{400} + 4}} = 410{,}31.$$

Nach erfolgter Ausgleichung ist also die Temperatur eines jeden Theilchens ausgedrückt durch $mv = 410{,}31$ und die Gesammtwärme aller 8 Theilchen ist daher $W = 3282{,}48$, während die ursprüngliche Wärmemenge, wie sich aus der ersten Zeile der Tabelle ergiebt, $W = 3280{,}00$ beträgt. Macht man also das Experiment, so ergiebt sich die specifische Wärme etwas höher, als sie nach dem Satze, dass die specifische Wärme dem Atomgewichte umgekehrt proportional sei, sich berechnen würde, und wir haben also hier eine der Ursachen der Ungenauigkeit dieses Satzes.

Bisher habe ich stets solche Fälle angenommen, bei denen die Aethermenge der verschiedenen Atome die nämliche war. Wechselt die Aetherquantität von einer Substanz zur andern, so ist eine Veränderung der Wärmemenge die nächste Folge. So viele nicht unmittelbar mit den Massenatomen zusammenhängende und mit ihnen sich bewegende Aetheratome und so viele Massenatome in einem Körper sind, so oft wiederholt sich das Product mv und damit vergrössert sich die Wärmemenge. Das Gewicht eines Körpers, d. i. die Anziehung, die er gegen die Erde erfährt, ist, wie

Tabelle VIII.

τ	a	α	A	α_1	b	β	c	γ
1	4,0000	— 400,00	1,1000	— 440,00	4,0000	— 400,00	4,0000	— 400,00
2	— 4,0000	400,00	— 1,1000	440,00	— 4,0000	400,00	— 4,0000	400,00
3	4,0000	— 400,20	0,9005	— 439,21	4,7921	— 400,00	4,0000	— 400,00
4	— 4,0040	400,20	— 1,2946	438,82	— 3,2236	401,57	— 4,0000	400,00
5	4,0040	— 400,79	0,7079	— 436,51	5,5297	— 401,54	4,0311	— 400,00
6	— 4,0117	400,78	— 1,4727	435,75	— 2,5311	404,54	— 3,9695	400,06
7	4,0117	— 401,72	0,5336	— 432,13	6,1477	— 404,39	4,1198	— 400,06
8	— 4,0226	401,71	— 1,6243	431,04	— 1,9818	408,56	— 3,8838	400,30
9	4,0226	— 402,95	0,3873	— 426,43	6,5929	— 408,16	4,2834	— 400,30
10	— 4,0336	402,95	— 1,7415	425,08	— 1,6200	413,13	— 3,7282	400,86
$m\,v$	401,13	401,13	434,50	434,50	404,19	404,19	400,16	400,16

ich an einem andern Orte* gezeigt habe, von der ihn begleitenden Aethermenge unabhängig, und wenn bei gleichbleibendem Gewichte die Zahl der sich für sich bewegenden Theilchen wächst, ein Fall, der bei der Zunahme der Aethermenge eintritt, so muss eine Vergrösserung der specifischen Wärme die nächste Folge sein, denn die Wärmemenge wächst mit der Zahl der freien Aether- und der Massentheilchen, das Gewicht wächst mit der Zahl der Massentheilchen allein, und die specifische Wärme muss daher mit der in der Gewichtseinheit enthaltenen Aethermenge wachsen, wobei ich, um Missverständnissen vorzubeugen, bemerke, dass ich unter freien Aethertheilchen sowohl den intermolecularen Aether als auch denjenigen verstehe, welcher zur Bildung der Dynamidenhüllen dient, während ich als gebundenen Aether nur diejenigen Aethertheilchen betrachte, welche, zur Sättigung der Massentheilchen dienend, in unmittelbarem Contacte mit denselben sind, mit ihnen sich bewegen und nur etwas die Menge ihrer materiellen Substanz ändern, sonst aber für die Wärmeerscheinungen ohne Belang sind.

Ist a die Zahl der in der Gewichtseinheit eines Körpers enthaltenen freien Aethertheilchen und α die Zahl der Massentheilchen, während a_1 und α_1 die gleiche Bedeutung für die Gewichtseinheit eines anderen Körpers haben, so verhalten sich bei gleicher Temperatur die Wärmemengen beider Körper

$$\frac{W}{W_1} = \frac{a + \alpha}{a_1 + \alpha_1}.$$

Stellt m das Atomgewicht des einen, m_1 das des andern Körpers vor und sollen die specifischen Wärmen sich umgekehrt wie die Atomgewichte verhalten, so wird

$$\frac{m_1}{m} = \frac{a + \alpha}{a_1 + \alpha_1}.$$

Nun verhält sich die Zahl α der in der Gewichtseinheit enthaltenen Massenatome des einen Körpers zu α_1 umgekehrt wie die Grösse des Atomgewichts, es ist also

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{m_1}{m} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{m_1}{m}\alpha_1,$$

es wird daher

$$8) \qquad \frac{m_1}{m} = \frac{a + \frac{m_1}{m}\alpha_1}{a_1 + \alpha_1} \quad \text{oder} \quad m_1 a_1 = m a.$$

Die Zahl der in der Gewichtseinheit enthaltenen Aethertheilchen verhält sich umgekehrt wie das Atomgewicht, direct wie die Zahl der Atome

* Diese Zeitschrift XI, 3, S. 180, III.

und jedes Atom führt eine gleiche Anzahl von Aethertheilchen mit sich.

Die Beobachtungen Regnault's haben gezeigt, dass bei den Körpern von analoger chemischer Zusammensetzung das Product aus der specifischen Wärme in die Atomgewichtszahl nahezu gleich sei, dass dasselbe aber ein anderes wird, wenn die Analogie der Zusammensetzung aufhört und daraus ergiebt sich: Bei analog zusammengesetzten Körpern ist die jedem Atome zukommende Aethermenge nahezu die gleiche, sie ist verschieden bei Verbindungen verschiedener Art und insoweit die Gleichheit des genannten Productes auch für die sogenannten einfachen Körper gilt, kann man schliessen, dass auch diese gleichartige Verbindungen seien.

Regnault erhielt bei zwei Versuchen als die specifische Wärme reinen schmiedbaren Kupfers 0,09501 und 0,09455, und dasselbe Kupfer zeigte, nachdem es kalt gehämmert worden war, 0,09360 und 0,09332. Durch das Hämmern wird die Dichtigkeit des Kupfers grösser, die Massentheilchen rücken also näher zusammen und dadurch werden Aethertheilchen ausgepresst, woraus eine Abnahme der specifischen Wärme folgt.

Ich muss nun auf die Darstellung des Krystallisationsvorganges verweisen, welche ich in dieser Zeitschrift* veröffentlicht habe. Nach dieser werden Krystallisationen vorzugsweise dann erfolgen, wenn die Aethertheilchen erst wenige Schichten um die Massenkerne gebildet haben, denn nur in diesem Falle sind gegenseitige Einwirkungen der Dynamiden möglich, die in verschiedenen Richtungen, d. h. je nach der gegenseitigen Stellung der Dynamiden verschieden sind, während die ausgebildete Dynamide nach allen Richtungen in gleicher Weise wirkt. Die Erscheinungen der Verschiebbarkeit der Dynamiden, des Widerstandes, den sie dem Bestreben, sie um einander herum zu drehen, in den Weg setzen, also die Härte, knüpfen sich ganz besonders an den Umstand, dass die Zahl der Aethertheilchen eine möglichst geringe wird. Aus diesem Grunde sehen wir denn auch bei dem Diamante die beiden Eigenschaften grosser Härte und starken Lichtbrechungsvermögens mit einander verbunden. Der geringen Menge der Aethertheilchen entsprechend hat auch der Diamant nach Regnault unter allen verschiedenen Formen der Kohle weitaus die geringste specifische Wärme, und die Versuche, durch Aenderung der Annahme des Atomgewichtes oder der Atomgruppirung eine Uebereinstimmung der specifischen Wärme des Diamantes und der übrigen Kohlenarten zu erzielen, dürften daher wenig Aussicht auf Erfolg haben. Bei dem Schwefel haben wir, wenn auch in minder hohem Grade, dieselbe Erscheinung. Frisch geschmolzener Schwefel hat eine grössere specifische Wärme als er sie ein

* Jahrg. XI. Heft 3.

paar Jahre später oder als natürlicher Krystall besitzt, weil der frisch geschmolzene Schwefel nach und nach in einen krystallinischen Zustand übergeht, mit welchem Vorgange eine Abscheidung von Aether verbunden ist. Ist ein fester Körper auch nicht krystallisirt, so ist doch die gegenseitige Einwirkung der Dynamiden nach verschiedenen Richtungen eine andere. Die Härte der festen Körper ist grösser als die Schwerewirkung der Erde, denn letztere vermag es nicht, die Theilchen des Körpers um einander zu drehen, während bei den Flüssigkeiten der umgekehrte Fall eintritt und die Schwerewirkung für die Gestalt derselben massgebend ist. Die Körper haben im flüssigen Zustande eine geringere Härte als so lange sie fest sind; dieser Umstand beruht darauf, dass die Dynamiden bei den Flüssigkeiten mehr Aetherschichten um sich haben und dieses hat wieder eine grössere specifische Wärme der Flüssigkeiten zur Folge, d. h. die Körper haben im geschmolzenen Zustande eine grössere specifische Wärme als im festen.

Die Luftarten sollten, da sie am meisten Aether enthalten, eigentlich weitaus die grösste specifische Wärme besitzen, doch ist dieses bekanntlich nicht der Fall und ich stehe hier vor einem Widerspruche, der ohne Hypothese zu lösen schwer ist. Wenn man einem beliebigen Quantum Luft gestattet, ein grösseres Volumen einzunehmen, so hat man in dem grösseren Raume die nämliche Luft und so und so viele Aethertheilchen dazu; soll nun eine Erwärmung stattfinden, so braucht man Wärme *a*) zur Erhöhung der Temperatur der Stoffe, welche vor der Ausdehnung da waren und *b*) zur Erhöhung der Temperatur der Aethertheilchen, welche bei der Volumänderung dazu gekommen sind. Man mag sich nun den Aether vorstellen wie man will, ein materieller Stoff wird er immer bleiben und so lange dieses der Fall ist, wird er auch Kraft nothwendig haben, wenn er in Bewegung gesetzt werden soll. Angenommen, man habe zwei Gefässe, deren eines Luft, deren anderes Aether enthält, so muss der Aether ebenso gut als die Luft eine specifische Wärme haben, und wenn bei Herstellung der Communication zwischen beiden Gefässen die Luft sich über beide vertheilt, so ist der Aether neben ihr auch noch da und die specifische Wärme von Luft + Aether muss doch grösser sein als die der Luft allein. Ich habe mir schon viele Mühe gegeben, die specifische Wärme des Aethers aus den vorhandenen Beobachtungen abzuleiten, doch war bisher alles umsonst. Nach Regnault ändert sich die specifische Wärme der Luft mit ihrer Dichtigkeit nicht und demzufolge wäre also die specifische Wärme des Aethers gleich Null. Die specifische Wärme des Aethers kann aber nicht gleich Null sein, sie hat im Gegentheile aller Wahrscheinlichkeit nach einen sehr grossen Werth, denn es ist die Zahl der Aethertheilchen jedenfalls eine sehr bedeutende, die Menge der materiellen Substanz eines Aethertheilchens ist eine sehr geringe und der Umstand, dass die Aethertheilchen nicht schwer sind, hat bei der Wärme nichts zu schaffen.

Um nun diesen Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung zu heben, will ich im Nachstehenden einen Satz aufstellen, den ich jedoch zur Zeit nur als Hypothese geben kann.

Bei der Bestimmung der specifischen Wärme der Luft nach der sogenannten Mischungsmethode wird diese in einem Gefässe erwärmt und dann in ein Kühlgefäss geleitet, in welchem ihr Gelegenheit geboten ist, ihre Wärme an Wasser abzugeben, aus dessen Temperaturerhöhung die specifische Wärme der Luft berechnet wird. Die dichte Luft enthält, wie sich aus ihrem stärkeren Lichtbrechungsvermögen ergiebt, weniger dichten Aether als dünne Luft, und da ausserdem bei gleichem Gewichte ihr Volumen kleiner ist, so lässt sich mit aller Bestimmtheit behaupten, dass neben dichter Luft weniger intermolecularer Aether sei als neben einem gleichen Gewichte dünner Luft. Comprimirt man die in einem luftdichten Gefässe befindliche Luft auf was immer für eine Weise, so enthält die Luft nach der Compression weniger Aether als vorher, und letzterer muss sich daher auf was immer für eine Weise zum entsprechenden Theile durch die Poren des Gefässes entfernt haben. Da man nun kein Blasen u. dgl. wahrnimmt, so lässt sich schliessen, dass ihm das Gefäss gar nicht einmal einen grossen Widerstand leistet, der Aether geht durch die Poren eines Gefässes wie die Luft durch die Maschen eines Netzes. Man denke sich nun ein cylindrisches Netz in der Luft befindlich und mit Luft gefüllt, an seiner Grundfläche befinde sich ein grösseres Loch und der Deckel sei durch einen verschiebbaren Kolben ersetzt. Drückt man nun den Kolben langsam in das Netz hinein, so wird der Raum in letzterem kleiner und die Luft muss hinaus. Wird diese wohl durch das Loch des Bodens des Netzes gehen oder durch dessen Maschen? Aller Wahrscheinlichkeit nach wird fast ausschliesslich das letztere geschehen und derselbe Fall tritt mit dem intermolecularen Aether ein, wenn man die specifische Wärme der Gasarten bestimmt, er geht gar nicht oder nur zum geringsten Theile durch das Kühlrohr, denn er findet Wege genug in den Poren des Gefässes und darum kann auch die Temperatur des Kühlgefässes durch ihn nicht erhöht werden.

Wir befinden uns inmitten eines Oceans von Aether, der in kein Gefäss eingeschlossen werden kann, weil es kein solches ohne Poren giebt, den wir aber aus demselben Grunde aus keinem Gefässe ausschliessen können. Wo ein ätherfreier Raum entsteht, da sucht von aussen Aether hinzudringen, denn die gegenseitige Abstossung der Aethertheilchen unter einander bewirkt, wie ich schon früher* gezeigt habe, einen Druck des äusseren Aethers gegen den leeren Raum. Aetherverdünnungen können jedoch, wie ich an demselben Orte gezeigt habe, bleibend gemacht werden, wenn die Massentheilchen um sich herum eine andere Gruppirung der

* Diese Zeitschrift Jahrg. XI. Heft 3.

Aethertheilchen bedingen als diese um ein im allgemeinen Raume befindliches Theilchen lagern. In diesem Falle drückt der äussere Aether eben so gut auf den verdünnten Raum, als es die atmosphärische Luft gegen einen luftverdünnten Raum thut. Die Cohäsion der Körper ist nichts anderes als das Ergebniss dieses Aetherdruckes und das Auseinanderreissen eines Körpers ist ganz analog dem Vorgange, welcher stattfindet, wenn wir den mehr oder weniger ausgepumpten Recipienten einer Luftpumpe von dem Teller abnehmen, während analog der Luft der Aether einem ihn durchschneidenden Körper einen nur äusserst geringen Widerstand leistet.

Kleinere Mittheilungen.

XX. Eine geometrische Eigenschaft der sechszehn Kugeln, welche vier beliebig gegebene Kugeln berühren. Von H. SCHUBERT, Stud. math. in Berlin.

Die Betrachtungen, welche der Herleitung dieser Eigenschaft als Basis dienen, möchten wohl zum grössten Theile bekannt sein. Doch sind sie hier, namentlich behufs Einführung übersichtlicher Bezeichnungen, in aller Kürze vorangeschickt.

I. Die Aehnlichkeits- und Chordalgebilde bei Kugeln.

1. Lehrsatz: Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte der drei Kugelpaare, welche sich aus drei Kugeln combiniren lassen, liegen in einer Geraden (der äusseren Aehnlichkeitsaxe), ebenso die beiden inneren zweier Paare und der äusseren des dritten Paares (den drei inneren Aehnlichkeitsaxen).

2. Lehrsatz: Von den sechs äusseren und sechs inneren Aehnlichkeitspunkten der sechs Kugelpaare, welche sich aus vier Kugeln combiniren lassen, liegen in einer Ebene:

a) die sechs äusseren;

b) die drei äusseren dreier Kugeln und die drei inneren der drei Kugelpaare, welche jede dieser Kugeln mit der vierten bildet;

c) der äusseren zweier Kugeln, der äusseren der beiden anderen und die vier inneren der übrigen vier Kugelpaare.

3. Lehrsatz: Die drei im Endlichen gelegenen Chordalebenen der drei Kugelpaare, welche sich aus drei Kugeln combiniren lassen, schneiden sich in einer Geraden (der Chordalgeraden).

4. Lehrsatz: Die sechs endlichen Chordalebenen der sechs Kugelpaare, welche sich aus vier Kugeln combiniren lassen, schneiden sich in einem Punkte (dem Chordalpunkte) *.

Wir bezeichnen nun immer die vier der Betrachtung unterliegenden Kugeln mit k_1, k_2, k_3, k_4, irgend eine von ihnen mit k_ν, irgend eine von

* Da die im Unendlichen gelegenen Chordalebenen, Chordalgeraden und Chordalpunkte im Folgenden nicht auftreten, so sind hier ihre Eigenschaften ausser Acht gelassen.

ihnen, die von k_ν verschieden ist, mit $k_{\nu'}$, demgemäss die Chordalebene von k_ν und $k_{\nu'}$ mit $e_{\nu\nu'}$, die Chordalgerade der drei Kugeln, zu welchen k_ν nicht gehört, mit c_ν, den Chordalpunkt der vier Kugeln mit D; ferner den äusseren / inneren Aehnlichkeitspunkt von k_ν und $k_{\nu'}$ mit $A_{\nu\nu'}$ / $J_{\nu\nu'}$, die äussere Aehnlichkeitsaxe der drei Kugeln, zu welchen k_ν nicht gehört, mit p_ν^ν, diejenige innere Aehnlichkeitsaxe der drei Kugeln ausser k_ν, welche $k_{\nu'}$ derartig bevorzugt, dass der auf ihr liegende äussere Aehnlichkeitspunkt Aehnlichkeitspunkt der beiden von $k_{\nu'}$ verschiedenen Kugeln ist, mit $p_\nu^{\nu'}$, also z. B. die A_{23}, J_{12}, J_{13} enthaltende innere Aehnlichkeitsaxe mit p_4^1. Nun lehrt der 2. Lehrsatz, dass es 8 Ebenen giebt, auf denen je 6 Aehnlichkeitspunkte und je 4 Aehnlichkeitsaxen liegen und liefert die unten folgende Tabelle, in welcher für diese 8 Aehnlichkeitsebenen geeignete Bezeichnungen eingeführt sind.

1. Tabelle.

Es liegen in einer Ebene:

e^0 :	p_1^1	p_2^2	p_3^3	p_4^4	und	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{23}	A_{24}	A_{34}
e^1 :	p_1^1	p_2^1	p_3^1	p_4^1	„	A_{23}	A_{24}	A_{34}	J_{12}	J_{13}	J_{14}
e^2 :	p_1^2	p_2^2	p_3^2	p_4^2	„	A_{13}	A_{14}	A_{34}	J_{21}	J_{23}	J_{24}
e^3 :	p_1^3	p_2^3	p_3^3	p_4^3	„	A_{12}	A_{14}	A_{24}	J_{31}	J_{32}	J_{34}
e^4 :	p_1^4	p_2^4	p_3^4	p_4^4	„	A_{12}	A_{13}	A_{23}	J_{41}	J_{42}	J_{43}
$e^{\frac{12}{34}}$:	p_1^2	p_2^1	p_3^4	p_4^3	„	A_{12}	A_{34}	J_{13}	J_{14}	J_{23}	J_{24}
$e^{\frac{13}{24}}$:	p_1^3	p_2^4	p_3^1	p_4^2	„	A_{13}	A_{24}	J_{12}	J_{14}	J_{32}	J_{34}
$e^{\frac{14}{23}}$:	p_1^4	p_2^3	p_3^2	p_4^1	„	A_{14}	A_{23}	J_{12}	J_{13}	J_{42}	J_{43}.

Diese 8 Aehnlichkeitsebenen zerfallen also in drei Gattungen, deren Unterschiede vorstehende Uebersicht erkennen lässt.

Die Tabelle zeigt ferner, dass sich je zwei dieser Ebenen entweder in einer Aehnlichkeitsaxe schneiden, z. B. e^0 und e^1 in p_1^1, e^1 und $e^{\frac{12}{34}}$ in p_2^1, oder in der Verbindungsgeraden eines Aehnlichkeitspunktes zweier Kugeln mit einem Aehnlichkeitspunkte der beiden anderen, z. B. e^0 und $e^{\frac{12}{34}}$ in $A_{12}A_{34}$, e^1 und e^2 in $A_{34}J_{12}$, $e^{\frac{12}{34}}$ und $e^{\frac{13}{24}}$ in $J_{14}J_{23}$. Unter den 56 Punkten, die wir erhalten, wenn wir den Schnittpunkt von je dreien der 8 Aehnlichkeitsebenen bestimmen, sind 48 Punkte Aehnlichkeitspunkte und 8 Punkte nicht. Jeder der 12 Aehnlichkeitspunkte kommt viermal als Schnittpunkt dreier der 8 Ebenen vor und zwar so, dass die vier zu einer solchen

Gruppe gehörigen Ebenen sich in **einem** Punkte und zwar einem Aehnlichkeitspunkte schneiden. Dies liefert die

2. Tabelle.

Es schneiden sich in:

$$\begin{array}{llll}
A_{12} : e^0\ e^3\ e^4\ e^{\frac{12}{34}}; & J_{12} : e^1\ e^2\ e^{\frac{13}{24}}\ e^{\frac{14}{23}} \\
A_{13} : e^0\ e^2\ e^4\ e^{\frac{13}{24}}; & J_{13} : e^1\ e^3\ e^{\frac{12}{34}}\ e^{\frac{14}{23}} \\
A_{14} : e^0\ e^2\ e^3\ e^{\frac{14}{23}}; & J_{14} : e^1\ e^4\ e^{\frac{12}{34}}\ e^{\frac{13}{24}} \\
A_{23} : e^0\ e^1\ e^4\ e^{\frac{14}{23}}; & J_{23} : e^2\ e^3\ e^{\frac{12}{34}}\ e^{\frac{13}{24}} \\
A_{24} : e^0\ e^1\ e^3\ e^{\frac{13}{24}}; & J_{24} : e^2\ e^4\ e^{\frac{12}{34}}\ e^{\frac{14}{23}} \\
A_{34} : e^0\ e^1\ e^2\ e^{\frac{12}{34}}; & J_{34} : e^3\ e^4\ e^{\frac{13}{24}}\ e^{\frac{14}{23}}.
\end{array}$$

Es bleiben also noch 8 Gruppen von je drei sich nicht in einem Aehnlichkeitspunkte schneidenden Ebenen übrig. Die Schnittgerade je zweier Ebenen einer solchen Gruppe ist aber die Verbindungsgerade eines Aehnlichkeitspunktes zweier der vier Kugeln mit einem Aehnlichkeitspunkte der beiden anderen. Achtmal drei derartige Verbindungsgeraden schneiden sich also in einem Punkte. Dies verdeutlicht die

3. Tabelle.

Es schneiden sich in einem Punkte

P :	$e^{\frac{12}{34}}$	$e^{\frac{13}{24}}$	$e^{\frac{14}{23}}$	oder	$J_{12}\ J_{34}$,	$J_{13}\ J_{24}$,	$J_{14}\ J_{23}$
P^1 :	e^2	e^3	e^4	"	$A_{12}\ J_{34}$,	$A_{13}\ J_{24}$,	$A_{14}\ J_{23}$
P^2 :	e^3	e^4	e^1	"	$A_{23}\ J_{41}$,	$A_{24}\ J_{31}$,	$A_{21}\ J_{34}$
P^3 :	e^4	e^1	e^2	"	$A_{34}\ J_{12}$,	$A_{31}\ J_{42}$,	$A_{32}\ J_{41}$
P^4 :	e^1	e^2	e^3	"	$A_{41}\ J_{23}$,	$A_{42}\ J_{13}$,	$A_{43}\ J_{12}$
$P^{\frac{12}{34}}$:	e^0	$e^{\frac{13}{24}}$	$e^{\frac{14}{23}}$	"	$J_{12}\ J_{34}$,	$A_{14}\ A_{23}$,	$A_{13}\ A_{24}$
$P^{\frac{13}{24}}$:	e^0	$e^{\frac{14}{23}}$	$e^{\frac{12}{34}}$	"	$J_{13}\ J_{24}$,	$A_{12}\ A_{34}$,	$A_{14}\ A_{23}$
$P^{\frac{14}{23}}$:	e^0	$e^{\frac{12}{34}}$	$e^{\frac{13}{24}}$	"	$J_{14}\ J_{23}$,	$A_{13}\ A_{24}$,	$A_{12}\ A_{34}$

II. Berührung der Kugeln.

Der Bestimmung der Berührungskugeln für vier gegebene Kugeln liegen folgende Sätze zu Grunde:

1. Lehrsatz:

Der Berührungspunkt zweier sich von aussen / innen berührenden Kugeln ist ihr innerer / äusserer Aehnlichkeitspunkt.	Die Berührungsebene zweier sich berührender Kugeln ist ihre Chordalebene.

2. Lehrsatz:

Berühren zwei Kugeln eine dritte gleichartig, d. h. beide von aussen oder beide von innen
ungleichartig, d. h. die eine von aussen, die andere von innen'

so geht die Verbindungsgerade der Berührungspunkte — die Berührungssehne — durch den äusseren / inneren Aehnlichkeitspunkt des Kugelpaares.

so liegt die Schnittgerade der Berührungsebenen, d. i. die Polare der Berührungssehne — die Berührungspolare — auf der Chordalebene des Kugelpaares.

3. Lehrsatz:

Berühren zwei Kugeln eine dritte gleichartig / ungleichartig,

so geht die Polarebene ihres äusseren / inneren Aehnlichkeitspunktes in Bezug auf die dritte Kugel durch die Berührungspolare.

so liegt der Pol ihrer Chordalebene in Bezug auf die dritte Kugel auf der Berührungssehne.

4. Lehrsatz:

Berührt jede von zwei Kugeln zwei andere gleichartig / ungleichartig, so geht die Chordalebene der beiden ersteren durch den äusseren / inneren Aehnlichkeitspunkt der beiden letzteren.

Es sind nun 16 Combinationen möglich, wie vier Kugeln von einer anderen berührt werden können, wenn wir die äussere und die innere Berührung unterscheiden. Von diesen sind achtmal zwei gerade einander entgegengesetzt, d. h. jede der vier Kugeln erleidet in solchen zwei Fällen ungleichartige Berührung. Kugeln nun, welche jede von den vier Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 ungleichartig berühren, nennen wir in Bezug auf diese ungleichartig conjugirt und verstehen unter gleichartig conjugirten Kugeln solche, welche jede der vier Kugeln gleichartig berühren. Dann ist klar, dass die sämmtlichen Berührungskugeln in 8 Gruppen conjugirter Kugeln zerfallen müssen. Und erst später wird sich ergeben, wie viel Kugeln eine solche Gruppe enthält. Alle einander conjugirten Kugeln bevorzugen nun, hinsichtlich der äusseren oder inneren Berührung, entweder keine der vier Kugeln, dies seien die Kugeln k^0, oder eine der vier Kugeln, dies seien k^1, k^2, k^3, k^4, oder zwei und zwei der vier Kugeln, dies seien $k^{\frac{12}{34}}$, $k^{\frac{13}{24}}$, $k^{\frac{14}{23}}$; wobei also einander conjugirte Kugeln nur eine Bezeichnung erhalten haben. Es bedeutet also z. B. $k^{\frac{13}{24}}$ sowohl jede Kugel, die

k_1 und k_3 von aussen, k_2 und k_4 von innen berührt, wie auch jede Kugel, die k_1 und k_3 von innen, k_2 und k_4 von aussen berührt. Irgend einen dieser acht Indices 0, 1, 2, 3, 4, $\frac{12}{34}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{14}{23}$, die übrigens identisch sind mit den Indices der acht Aehnlichkeitsebenen, wollen wir mit λ bezeichnen, demgemäss irgend einen der beiden Aehnlichkeitspunkte irgend zweier der conjugirten Kugeln k^λ mit H^λ, ihre Chordalebene mit f^λ,

die Berührungssehne irgend zweier conjugirter Kugeln k^λ in k_ν mit b^λ_ν, endlich den in Bezug auf k_ν bestimmten Pol der Aehnlichkeitsebene e^λ mit E^λ_ν.

die Berührungspolare irgend zweier conjugirter Kugeln k^λ für k_ν mit β^λ_ν, endlich die in Bezug auf k_ν bestimmte Polarebene des Chordalpunktes D mit d_ν.

Nach Lehrsatz 4

liegt dann H^λ auf allen Chordalebenen der vier Kugeln, fällt also mit D zusammen.

geht dann f^λ durch alle Aehnlichkeitspunkte, die auf e^λ liegen, fällt also mit e^λ zusammen.

Nach Lehrsatz 2

liegt aber H^λ, d. h. D auf b^λ_ν.

geht aber f^λ, d. h. e^λ durch β^λ_ν.

Nach Lehrsatz 3

liegt auf b^λ_ν auch der Pol von f^λ, d. h. e^λ in Bezug auf k_ν, also E^λ_ν.

geht durch β^λ_ν auch die Polarebene von H^λ, d. h. D in Bezug auf k_ν, also d_ν.

Es ist daher für irgend zwei conjugirte k^λ in jeder der vier Kugeln

die Berührungssehne als die Verbindungsgerade von D mit E^λ_ν eindeutig bestimmt.

die Berührungspolare als die Schnittgerade von e^λ mit d_ν eindeutig bestimmt.

Daraus folgt, dass die Anzahl der conjugirten Kugeln k^λ zwei, sämmtlicher Berührungskugeln also 16 ist. Nennen wir also die beiden conjugirten Kugeln vom Index λ k^λ und $\varkappa^\lambda$, so können k^λ und $\varkappa^\lambda$ nun gleichartig und ungleichartig conjugirt sein, was von der Lage von k_1, k_2, k_3, k_4 zu einander abhängt und damit zusammenfällt, dass über unser H^λ keine Bestimmung getroffen war, ob es äusserer oder innerer Aehnlichkeitspunkt sein sollte. Die beiden conjugirten Kugeln vom Index λ sind ferner imagi-

när zu nennen, wenn die zugehörigen Berührungsehnen ihre Kugeln nicht / Berührungspolaren ihre Kugeln schneiden.

III. Die sechszehn Berührungskugeln.

Aus den Lehrsätzen über die Berührung, sowie aus den angegebenen Constructionen der Berührungskugeln folgt sofort:

1. Lehrsatz: Die Aehnlichkeitsebene e^λ ist die Chordalebene von k^λ und $\varkappa^\lambda$.

2. Lehrsatz: Der Chordalpunkt D ist der äussere oder innere Aehnlichkeitspunkt von k^λ und $\varkappa^\lambda$, je nachdem letztere gleichartig oder ungleichartig conjugirt sind.

3. Lehrsatz: Der Schnittpunkt dreier Aehnlichkeitsebenen ist der gemeinsame Chordalpunkt der drei Paare conjugirter Berührungskugeln, welche dieselben drei Indices haben, wie jene drei Ebenen.

4. Lehrsatz: Haben vier Aehnlichkeitsebenen einen gemeinsamen Schnittpunkt, so ist dieser der gemeinsame Chordalpunkt der vier Paare conjugirter Berührungskugeln, welche dieselben Indices haben, wie jene vier Ebenen.

Nach den beiden letzten Sätzen erhalten wir zwei neue Tabellen, wenn wir in den Tabellen 2 und 3 des I. Abschnitts an Stelle jedes e^λ die entsprechenden k^λ, $\varkappa^\lambda$ setzen und gleichzeitig statt „schneiden sich in einem Punkte“ „haben zum gemeinsamen Chordalpunkte“ sagen. So erhalten wir 12 Gruppen von je 4 Paaren conjugirter Kugeln und 8 Gruppen von je 3 Paaren conjugirter Kugeln von der Beschaffenheit, dass die zu einer Gruppe gehörigen Kugeln einen gemeinsamen Chordalpunkt haben.

Haben nun n Kugeln einen gemeinsamen Chordalpunkt und ausserdem eine gemeinsame Berührungskugel, so giebt es immer eine der letzteren conjugirte Berührungskugel zu allen möglichen vier Kugeln, welche man aus den n Kugeln combiniren kann, weil die zugehörigen Berührungssehnen durch Verbindung des gemeinsamen Chordalpunktes mit den bekannten Berührungspunkten bestimmt sind. Alle die so erhaltenen Berührungskugeln sind aber in der That nur eine, da es sonst verschiedene Kugeln geben müsste, die zwei oder drei Kugeln in denselben Punkten berühren. Daher gilt der

5. Lehrsatz: Haben n Kugeln mit gemeinsamem Chordalpunkte eine gemeinsame Berührungskugel, so giebt es immer noch eine zweite Berührungskugel, welche jede der n Kugeln mit der ersten gleichartig oder ungleichartig berührt, ihr also, wie wir sagen können, gleichartig oder ungleichartig conjugirt ist in Bezug auf die n Kugeln.

Wir haben nun oben Gruppen von Kugeln mit gemeinsamem Chordalpunkte kennen gelernt. Alle Kugeln einer solchen Gruppe werden von

jeder der vier Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 gleichzeitig berührt. Es muss daher nach dem 5. Lehrsatze zu jeder dieser vier Kugeln eine in Bezug auf jede Gruppe conjugirte Berührungskugel geben. Berücksichtigen wir nun noch, dass für eine Gruppe von Kugeln, deren gemeinsamer Chordalpunkt ein Aehnlichkeitspunkt der Kugeln k_ν und $k_{\nu'}$ ist, diese beiden Kugeln selbst als einander conjugirte erscheinen werden, so schliessen wir, dass es für jede der 12 Gruppen von vier Paaren conjugirter Kugeln zwei neue Berührungskugeln giebt, welche den beiden der vier Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 conjugirt sind, welche andere Indices haben, als der Aehnlichkeitspunkt, der als gemeinsamer Chordalpunkt der Gruppe auftritt. Es giebt daher 24 solcher Kugeln. Dagegen muss es für jede der 8 Gruppen von je drei Paaren conjugirter Kugeln, deren gemeinsamer Chordalpunkt kein Aehnlichkeitspunkt, sondern ein P^λ ist, noch zu jeder der vier Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 eine conjugirte Berührungskugel geben. Solche Kugeln giebt es daher 32. Es gilt also schliesslich folgender Satz:

> „Die 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren, haben eine solche Lage, 1) dass man 12 Gruppen von je 8 Kugeln aus ihnen bilden kann, so dass es, abgesehen von den 4 ursprünglichen Kugeln, immer 2 Kugeln giebt, von denen jede die sämmtlichen 8 Kugeln einer solchen Gruppe berührt, und 2) dass man 8 in jenen Gruppen nicht schon enthaltene Gruppen von je 6 Kugeln bilden kann, so dass es, abgesehen von den 4 ursprünglichen Kugeln, immer 4 Kugeln giebt, von denen jede alle 6 Kugeln einer solchen Gruppe berührt.“

In etwas anderer Form lautet der Satz:

> „Die 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren, liegen so, dass sich 24 neue Kugeln finden lassen, von denen jede 8 von jenen 16 Kugeln berührt, und 32 von den 24 verschiedene Kugeln, von denen jede 6 von jenen 16 Kugeln berührt.“

Man construirt diese 56 Kugeln, indem man durch Verbindung des Chordalpunktes der zu berührenden 6 oder 8 Kugeln mit den zugehörigen Berührungspunkten auf den 4 ursprünglichen Kugeln die Berührungssehnen bestimmt. Eine andere von der Kenntniss der zu berührenden Kugeln unabhängige Construction liefert die Betrachtung, dass die Chordalebene der gesuchten Kugel x und derjenigen der 4 ursprünglichen Kugeln, k_ν, welcher sie in Bezug auf irgend eine Gruppe conjugirt sein soll, den Chordalpunkt D enthalten muss, und dass die Verbindungsgerade des Mittelpunktes von k_ν mit dem Chordalpunkte der Gruppe, der ja Aehnlichkeitspunkt der conjugirten Kugeln k_ν und x ist, Centrale der letzteren sein muss. Dadurch ist ein Aehnlichkeitspunkt und die Chordalebene von k_ν und x als eine durch D zur Centrale senkrecht gelegte Ebene bestimmt. Die Kugel

aber, welche mit einer gegebenen einen gegebenen Aehnlichkeitspunkt und eine gegebene Chordalebene haben soll, ist dann leicht zu construiren. Diese Construction sowohl, wie auch der Umstand, dass jede der 56 Kugeln irgend einer der vier ursprünglichen, also einer reellen Kugel conjugirt ist, liefern den Beweis, dass jene 56 Kugeln stets reell sind, wenn auch mehrere oder alle Kugeln, welche sie berühren sollen, imaginär sind.

Anmerkung: Zu dem Satze, welcher als das Schlussresultat der vorstehenden Untersuchung erscheint, giebt es natürlich ein Analogon für die acht Kreise, welche drei Kreise berühren. Diese liegen nämlich so, dass jede der sechs Gruppen von je zwei Paaren conjugirter Berührungskreise, in welche die acht Kreise zerfallen, einen neuen gemeinsamen Berührungskreis hat.

XXI. Metrische Relationen zwischen den Radien der 16 Kugeln, welche 4 Kugeln berühren. Von H. Schubert, Stud. math. in Berlin.

Unter den 16 Kugeln, welche die vier beliebig gegebenen Kugeln k_1, k_2, k_3, k_4 berühren, sind achtmal zwei gleichartig oder ungleichartig conjugirt, d. h. jede der gegebenen Kugeln wird von solchen zwei Kugeln entweder gleichartig oder ungleichartig berührt. Hinsichtlich der äusseren oder inneren Berührung bevorzugen von diesen acht Paaren conjugirter Berührungskugeln 1 Paar $k^0 \varkappa^0$ keine der 4 gegebenen Kugeln, 4 Paare $k^1\varkappa^1$, $k^2\varkappa^2$, $k^3\varkappa^3$, $k^4\varkappa^4$ eine, 3 Paare $k^{\frac{12}{34}}\varkappa^{\frac{12}{34}}$, $k^{\frac{13}{24}}\varkappa^{\frac{13}{24}}$, $k^{\frac{14}{23}}\varkappa^{\frac{14}{23}}$ zwei und zwei der gegebenen Kugeln. Zwischen den Radien dieser 16 Berührungskugeln müssen 6 von einander unabhängige Relationen bestehen, weil die Grösse und Lage der gegebenen 4 Kugeln zu einander durch 10 Bestimmungsstücke vollständig gegeben ist. 5 dieser sechs Relationen aufzustellen, gestattet die folgende Untersuchung. Hat irgend eine von den gegebenen Kugeln, k_ν, die Mittelpunktscoordinaten a_ν, b_ν, c_ν, den Radius r_ν, so ist die Bedingung dafür, dass sie von einer Kugel mit den Mittelpunktscoordinaten x, y, z und dem Radius ϱ berührt wird: $(x-a_\nu)^2 + (y-b_\nu)^2 + (z-c_\nu)^2 = (\varrho \pm r_\nu)^2$, wo $+r_\nu$ für die äussere, $-r_\nu$ für die innere Berührung zu wählen ist. Soll also jede der 4 gegebenen Kugeln (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2), (a_3, b_3, c_3, r_3), (a_4, b_4, c_4, r_4) von der Kugel (x, y, z, ϱ) berührt werden, so müssen 4 Gleichungen von jener Form erfüllt werden, aus denen man durch Elimination von x, y, z eine Gleichung für ϱ erhält, die nur vom zweiten Grade ist, weil durch Subtraction je zweier der 4 Gleichungen die zweiten Potenzen der Unbekannten x, y, z, ϱ fortfallen. Ertheilen wir dann den 4 Radien ν_1, ν_2, ν_3, ν_4 das entgegengesetzte Vorzeichen, was nichts anderes heisst, als ϱ das entgegengesetzte Vorzeichen geben, so erhalten wir eine zweite Gleichung zweiten

Grades für ϱ, deren beide Wurzeln die Wurzeln der ersten Gleichung mit entgegengesetztem Vorzeichen sind. Es ist danach deutlich, dass die beiden absoluten Werthe der 4 Wurzeln dieser beiden Gleichungen den beiden Radien zweier conjugirter Berührungskugeln angehören, und zwar gleichartig conjugirter, wenn die Vorzeichen der beiden Wurzeln jeder der beiden Gleichungen dieselben sind, ungleichartig conjugirter, wenn jene Vorzeichen verschieden sind. Je nach der Wahl der Vorzeichen der 4 gegebenen Radien erhalten wir nun 8 solche Paare von Gleichungen, deren 16 Wurzeln die Radien der 16 Berührungskugeln sind.

Die Radien r_1, r_2, r_3, r_4 wählen wir nun zuerst alle positiv und subtrahiren je 2 der 4 Gleichungen von der angegebenen Form. Dann resultiren drei von einander unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y, z, ϱ. Wenn nun im Folgenden neu auftretende Buchstaben immer Grössen bezeichnen, welche nur die Mittelpunktscoordinaten und die Quadrate, aber nicht die ersten Potenzen der Radien der gegebenen Kugeln enthalten, Grössen also, die bei Veränderung des Vorzeichens dieser Radien unverändert bleiben, so lauten die durch Elimination aus den 3 Gleichungen ersten Grades zwischen x, y, z, ϱ erhaltenen Ausdrücke für $x-a_1, y-b_1, z-c_1$:

$$d+\varrho\,(d_1 r_1+d_2 r_2+d_3 r_3+d_4 r_4).$$

Setzt man diese drei Werthe in die Gleichung

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=(\varrho+r_1)^2$$

ein, so erhält man, wenn mit $F_1(r)$ und $f_1(r)$ künftig ein Ausdruck von der Form

$$e_1 r_1+e_2 r_2+e_3 r_3+e_4 r_4,$$

mit $F_2(r)$ und $f_2(r)$ ein Ausdruck von der Form

$$g_{12} r_1 r_2+g_{13} r_1 r_3+g_{14} r_1 r_4+g_{23} r_2 r_3+g_{24} r_2 r_4+g_{34} r_3 r_4$$

bezeichnet wird, schliesslich

$$\varrho^2\,[\delta+F_2(r)]+\varrho\,[F_1(r)]+\varepsilon=0.$$

Wählt man jetzt r_1, r_2, r_3, r_4 negativ statt positiv, so kommt

$$\varrho^2[\delta+F_2(r)]-\varrho\,[F_1(r)]+\varepsilon=0.$$

Also ist sicher, wenn die Radien von k^0 und $\varkappa^0$, ϱ_0 und ϱ'_0 sind, und ϱ_0 und ϱ'_0 mit gleichem Vorzeichen behaftet werden, wenn k^0 und $\varkappa^0$ gleichartig, mit verschiedenem, wenn k^0 und $\varkappa^0$ ungleichartig conjugirt sind:

$$\varrho_0\cdot\varrho'_0=\frac{\varepsilon}{\delta+F_2(r)},\quad (\varrho_0+\varrho'_0)^2=\left[\frac{F_1(r)}{\delta+F_2(r)}\right]^2.$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{\varrho_0+\varrho'_0}{\varrho_0\,\varrho'_0}\right)^2=\left[\frac{F_1(r)}{\varepsilon}\right]^2$$

oder

$$\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho'_0}\right)^2=[f_1(r)]^2.$$

Ferner folgt aus

$$\varrho_0 \varrho'_0 = \frac{\delta}{\xi + F_2(r)}, \quad \frac{1}{\varrho_0 \varrho'_0} = w + f_2(r).$$

Nennen wir also das Product der reciproken Radien zweier conjugirter Kugeln k^λ und $\varkappa^\lambda$ q_λ, das Quadrat ihrer Summe c_λ, wobei zu berücksichtigen, dass die Vorzeichen der beiden Radien bei gleichartig conjugirten k^λ und $\varkappa^\lambda$ gleich, bei ungleichartig conjugirten k^λ und $\varkappa^\lambda$ ungleich zu machen sind, so ist jetzt:

$$q_0 = h_{12} r_1 r_2 + h_{13} r_1 r_3 + h_{14} r_1 r_4 + h_{23} r_2 r_3 + h_{24} r_2 r_4 + h_{34} r_3 r_4 + w,$$
$$\tau_0 = (t_1 r_1 + t_2 r_2 + t_3 r_3 + t_4 r_4)^2.$$

Daraus erhält man die 7 übrigen q und die 7 übrigen τ durch Veränderung der Vorzeichen von r_1, r_2, r_3, r_4, also z. B. q_1, indem man in dem Ausdrucke für q_0 nur r_1 negativ setzt, was damit zusammenfällt, dass man nur r_2, r_3, r_4 negativ setzt. Schreiben wir nun der Kürze halber für jedes $h_{\nu\nu'} r_\nu r_{\nu'}$ immer $n_{\nu\nu'}$, und für jedes $t_\nu r_\nu$ immer l_ν, so erhalten wie folgende zweimal 8 Gleichungen:

$$q_0 = + n_{12} + n_{13} + n_{14} + n_{23} + n_{24} + n_{34} + w,$$
$$q_{\frac{12}{34}} = + n_{12} - n_{13} - n_{14} - n_{23} - n_{24} + n_{34} + w,$$
$$q_{\frac{13}{24}} = - n_{12} + n_{13} - n_{14} - n_{23} + n_{24} - n_{34} + w,$$
$$q_{\frac{14}{23}} = - n_{12} - n_{13} + n_{14} + n_{23} - n_{24} - n_{34} + w,$$
$$q_1 = - n_{12} - n_{13} - n_{14} + n_{23} + n_{24} + n_{34} + w,$$
$$q_2 = - n_{12} + n_{13} + n_{14} - n_{23} - n_{24} + n_{34} + w,$$
$$q_3 = + n_{12} - n_{13} + n_{14} - n_{23} + n_{24} - n_{34} + w,$$
$$q_4 = + n_{12} + n_{13} - n_{14} + n_{23} - n_{24} - n_{34} + w;$$
$$\tau_0 = (+ l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_{\frac{12}{34}} = (- l_1 - l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_{\frac{13}{24}} = (- l_1 + l_2 - l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_{\frac{14}{23}} = (- l_1 + l_2 + l_3 - l_4)^2,$$
$$\tau_1 = (- l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_2 = (+ l_1 - l_2 + l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_3 = (+ l_1 + l_2 - l_3 + l_4)^2,$$
$$\tau_4 = (+ l_1 + l_2 + l_3 - l_4)^2.$$

Durch Elimination der rechts stehenden Grössen ergeben sich aus den ersten acht Gleichungen eine, aus den zweiten acht Gleichungen vier unabhängige Relationen zwischen den Radien der 16 Berührungskugeln. Diese fünf von einander unabhängigen Relationen sind folgende:

I. $$q_0 + q_{\frac{12}{34}} + q_{\frac{13}{24}} + q_{\frac{14}{23}} = q_1 + q_2 + q_3 + q_4,$$

II. $$\tau_0 + \tau_{\frac{12}{34}} + \tau_{\frac{13}{24}} + \tau_{\frac{14}{23}} = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4,$$

$$\text{III, IV, V.}\quad \left(\tau_0+\tau_{\substack{12\\34}}-\tau_{\substack{13\\24}}-\tau_{\substack{14\\23}}\right)^2-(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)^2$$
$$=\left(\tau_0+\tau_{\substack{13\\24}}-\tau_{\substack{14\\23}}-\tau_{\substack{12\\34}}\right)^2-(\tau_1+\tau_3-\tau_4-\tau_2)^2$$
$$=\left(\tau_0+\tau_{\substack{14\\23}}-\tau_{\substack{12\\34}}-\tau_{\substack{13\\24}}\right)^2-(\tau_1+\tau_4-\tau_2-\tau_3)^2$$
$$=\frac{\left(\tau_0+\tau_{\substack{12\\34}}-\tau_{\substack{13\\24}}-\tau_{\substack{14\\23}}\right)\left(\tau_0+\tau_{\substack{13\\24}}-\tau_{\substack{14\\23}}-\tau_{\substack{12\\34}}\right)\left(\tau_0+\tau_{\substack{14\\23}}-\tau_{\substack{12\\34}}-\tau_{\substack{13\\24}}\right)}{\tau_0+\tau_{\substack{12\\34}}+\tau_{\substack{13\\24}}+\tau_{\substack{14\\23}}}$$
$$-\frac{(\tau_1+\tau_2-\tau_3-\tau_4)(\tau_1+\tau_3-\tau_4-\tau_2)(\tau_1+\tau_4-\tau_2-\tau_3)}{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4}.$$

Die Gleichungen III, IV lassen sich auch schreiben:

$$\left(\tau_0-\tau_{\substack{12\\34}}\right)\left(\tau_{\substack{13\\24}}-\tau_{\substack{14\\23}}\right)=(\tau_1-\tau_2)(\tau_3-\tau_4),$$
$$\left(\tau_0-\tau_{\substack{13\\24}}\right)\left(\tau_{\substack{14\\23}}-\tau_{\substack{12\\34}}\right)=(\tau_1-\tau_3)(\tau_4-\tau_2),$$
$$\left(\tau_0-\tau_{\substack{14\\23}}\right)\left(\tau_{\substack{12\\34}}-\tau_{\substack{13\\24}}\right)=(\tau_1-\tau_4)(\tau_2-\tau_3),$$

welche drei Gleichungen nur zwei unabhängige Relationen darstellen. Von der Richtigkeit jener fünf Gleichungen kann man sich leicht überzeugen. In I ist nämlich jede Seite $=4w$, in II $=4(l_1^2+l_2^2+l_3^2+l_4^2)$, in III, IV, V $=256\, l_1 l_2 l_3 l_4$.

XXII. Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven. Von Emil Weyr, Assistenten bei der Lehrkanzel für Mathematik am Polytechnikum zu Prag. (Hierzu Tafel VIII, Fig. 1—5.)

1. Wenn man von einem festen Punkte O auf die Tangenten einer Curve C Perpendikel fällt, so erfüllen deren Fusspunkte die Fusspunktcurve (*podaire*) F der Curve C. Der Punkt O heisst der Pol und die Curve C die Directrix.

Das Entstehungsgesetz der Fusspunktcurven lässt es natürlich erscheinen, die Directrix C als Enveloppe einer Geraden — ihrer Tangente — zu betrachten.

Dies vorausgesetzt, entspricht jeder Tangente t von C ein Punkt p von F, nämlich der Fusspunkt des von O auf t gefällten Perpendikels.

Ist die Directrix C von der k^{ten} Klasse, so ist ihre Fusspunktcurve F im Allgemeinen von der $2k^{\text{ten}}$ Ordnung und besitzt im Pole O einen k-fachen Punkt. Die k Tangenten dieses Punktes sind senkrecht auf den von O aus an C gehenden k Tangenten.

Es versteht sich von selbst, dass die besondere Natur der Directrix auch Eigenthümlichkeiten der Fusspunktcurve bedingen wird.

So entspricht einer Doppeltangente der Directrix ein Doppelpunkt der Fusspunktcurve und einer Inflexionstangente der Directrix eine Spitze der

Fusspunktcurve. Die Inflexionstangenten der Fusspunktcurve entstehen jedoch, wie später gezeigt werden soll, in ganz anderer Art.

Diese Eigenthümlichkeiten der Fusspunktcurven zu untersuchen, soll nicht der Zweck des Folgenden sein. Wir wollen uns vielmehr unter ganz allgemeinen Voraussetzungen die Construction des Krümmungskreises der Fusspunktcurven in irgend einem ihrer Punkte zur Aufgabe stellen.

2. Wie schon in 1) erwähnt wurde, soll die Directrix C als Enveloppe betrachtet werden. Dann erhält man auf jeder Tangente t von C durch das Fällen der Senkrechten aus O einen Punkt p der Fusspunktcurve F.

Zwei auf einander folgende Tangenten t, t_1 der Directrix liefern zwei auf einander folgende Punkte p, p_1 der Fusspunktcurve F.

Kennt man also den Berührungspunkt π der Tangente t, so kann man leicht die Tangente θ des Punktes p construiren. Die betreffende Construction ist eine bekannte Sache und mag nur des Zusammenhanges mit dem Nachfolgenden wegen kurz erwähnt werden.

Ist (Taf. VIII, Fig. 1) C die Directrix, O der Pol und t eine Tangente von C, so ist der Fusspunkt p des von O auf t gefällten Perpendikels ein Punkt der Fusspunktcurve F. Ist π der Berührungspunkt der Tangente, so können wir die Punkte π und p als entsprechende Punkte bezeichnen.

Beschreibt man über $\overline{O\pi}$ als Durchmesser einen Kreis K, so wird dieser des rechten Winkels bei p halber nothwendig durch den Punkt p hindurchgehen. Die Tangente θ dieses Kreises im Punkte p ist nun zugleich die Tangente der Fusspunktcurve im Punkte p. Die Normale N der Fusspunktcurve im Punkte p, welche durch den Mittelpunkt c des Kreises K gehen muss, schneidet daher diesen Kreis in demselben Punkte, wie die Normale ν der Directrix im Punkte π.

3. Um den Krümmungskreis oder, was auf dasselbe hinauskommt, dessen Mittelpunkt für irgend einen Punkt der Fusspunktcurve F zu finden, betrachte man drei auf einander folgende Tangenten t, t_1, t_2 (Taf. VIII, Fig. 2) der Directrix. Vom Pole O lassen sich auf diese Tangenten drei Perpendikel fällen, deren Fusspunkte p, p_1, p_2 drei auf einander folgende Punkte der Curve F sind. Durch diese drei Punkte p, p_1, p_2 lässt sich ein Kreis R legen, welcher, wenn die drei Punkte unendlich nahe zu einander rücken, zum Krümmungskreise der Fusspunktcurve im Punkte p wird.

Das Zusammenrücken der drei Punkte p, p_1, p_2 wird man am einfachsten dadurch bewerkstelligen, dass man die beiden Tangenten t_1, t_2 immer mehr und mehr gegen die Tangente t rücken lässt, wodurch auch deren Berührungspunkte π_1, π_2 sich dem Berührungspunkte π der letzteren nähern werden.

Es handelt sich nun um die Grenzlage des Kreises R. Um rasch zu derselben zu gelangen, möge Einiges über Kegelschnitte vorausgeschickt werden.

4. Wenn man von einem Brennpunkte eines Kegelschnittes auf dessen Tangenten Perpendikel fällt, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise, welcher über der, die Brennpunkte enthaltenden Axe als Durchmesser beschrieben werden kann. Dieser Kreis ist die Fusspunktcurve des Kegelschnittes bezüglich jedes seiner Brennpunkte als Pol.

Fällt man also von einem Punkte O (Taf. VIII, Fig. 3) auf die drei Seiten t, t_1, t_2 eines Dreiseits Perpendikel und legt durch deren drei Fusspunkte p, p_1, p_2 einen Kreis R, so ist dies der über der Axe jenes Kegelschnittes beschriebene Kreis, dessen Brennpunkt O ist und welcher die drei Linien t, t_1, t_2 zu Tangenten hat.

Dieser Kreis R trifft die drei Seiten t, t_1, t_2 in drei weiteren Punkten p', p'_1, p'_2. Wenn man in denselben auf die Dreiecksseiten Perpendikel errichtet, so müssen sich diese in dem zweiten Brennpunkte O' des besagten Kegelschnittes schneiden.

Die Gerade $\overline{OO'}$ ist die Axe des Kegelschnittes (der Richtung nach) und der Halbirungspunkt M der Strecke $\overline{OO'}$ ist der Mittelpunkt desselben so wie jener des Kreises R.

5. Denkt man sich nun die drei Tangenten der Directrix C aus Fig. 2 an Stelle der Dreiecksseiten in Fig. 3 gesetzt, so wird der in Fig. 2 mit R bezeichnete Kreis dieselbe Rolle spielen wie der gleichbezeichnete in Fig. 3; so dass wir also folgenden Satz aufstellen können:

> „Legt man durch die, dreien Tangenten der Directrix entsprechenden drei Punkte der Fusspunktcurve einen Kreis, so ist dessen Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt jenes Kegelschnittes, welcher die drei Tangenten berührt und den Pol der Fusspunktcurve zum Brennpunkte hat.“

Wenn die drei Tangenten unendlich nahe zu einander rücken, etwa in die Lage von t, so werden die Punkte p_1, p_2 nach p und π_1, π_2 nach π rücken; der Kreis R wird zum Krümmungskreis der Fusspunktcurve im Punkte p und der mehrerwähnte Kegelschnitt wird die Directrix im Punkte π osculiren, weil er mit ihr daselbst drei aufeinanderfolgende Tangenten gemein hat.

Wir gelangen also zu folgendem Hauptresultate:

> „Ist t eine Tangente der Directrix C, deren Berührungspunkt π ist, und entspricht dieser Tangente der Punkt p der Fusspunktcurve F, so ist der Krümmungsmittelpunkt M von F in p der Mittelpunkt jenes Kegelschnittes, welcher den Pol O zum Brennpunkte hat und die Directrix C im Punkte π einfach osculirt.“

6. Zu demselben Resultate hätten wir auch unmittelbar durch folgende Betrachtung gelangen können.

Construirt man für einen Pol O die beiden Fusspunktcurven F, F_1 der zwei Curven C, C_1, so liefert jede gemeinschaftliche Tangente von C und C_1 einen gemeinschaftlichen Punkt von F und F_1. Zweien auf einander folgenden gemeinschaftlichen Tangenten von C und C_1 entsprechen zwei auf einander folgende Schnittpunkte von F und F_1, d. h.

„Wenn sich die beiden Directricen C, C_1 berühren, so berühren sich auch deren Fusspunktcurven F, F_1, und zwar an der entsprechenden Stelle."

Haben die beiden Directricen drei auf einander folgende Tangenten gemein, d. h. wenn sich die Directricen einfach osculiren, so haben die beiden Fusspunktcurven drei auf einander folgende Punkte gemein; sie osculiren einander ebenfalls.

„Wenn die beiden Directricen einander osculiren, so thun es an der entsprechenden Stelle auch die Fusspunktcurven."

Wie man die Sache weiter fortsetzen könnte, ist klar. Für uns ist jedoch nur der letzte Satz von Wichtigkeit.

Wenn man nämlich annimmt, dass die Directrix C_1 ein Kegelschnitt wird, welcher im Punkte O einen Brennpunkt besitzt und im Punkte π die Directrix C osculirt, so wird nach dem letzten Satze dessen Fusspunktcurve F_1 die Fusspunktcurve F im entsprechenden Punkte p osculiren. Nun ist die Fusspunktcurve F_1 des Kegelschnittes C_1 bezüglich des Brennpunktes O der über der Axe von C_1 beschriebene Kreis R, und somit ist F_1 oder R der Osculationskreis der Curve F im Punkte p.

Da schliesslich der Mittelpunkt dieses Kreises mit jenem des Kegelschnittes C_1 zusammenfällt, so ist der am Ende von 5) aufgestellte Satz hier zum zweiten Male bewiesen.

7. Wenn der die Directrix C im Punkte π osculirende Kegelschnitt, dessen Brennpunkt der Pol O ist, eine Parabel wird, so wird der Osculationskreis der Fusspunktcurve F im Punkte p die Scheiteltangente dieser Parabel, also eine gerade Linie. In diesem Falle ist der Punkt p ein Inflexionspunkt von F. Wir erhalten also folgenden, die Inflexionstangenten der Fusspunktcurven betreffenden Satz:

„Die Fusspunktcurve F einer Curve C bezüglich des Poles O besitzt so viele Inflexionstangenten, als es Parabeln giebt, welche O zum Brennpunkte haben und die Directrix C osculiren; die Inflexionspunkte sind die den Berührungstangenten dieser Parabeln entsprechenden Punkte."

8. In dem in 5. und 6. bewiesenen Satze liegen zugleich die Mittel für die Construction der Krümmungsmittelpunkte einer Fusspunktcurve.

Diese Construction kann besonders dann einfach ausgeführt werden, wenn man den Krümmungskreis der Directrix zu bestimmen weiss, was wir auch voraussetzen wollen.

Sei in Taf. VIII, Fig. 4, K der Krümmungskreis der Directrix C im Punkte π, und O der Pol der Fusspunktcurve F.

Der Fusspunkt p der von O auf die Tangente t in π gefällten Senkrechten ist der dem Punkte π entsprechende Punkt von F, für welchen wir nun den Krümmungskreis R bestimmen wollen.

Der Kegelschnitt C_1, welcher in O einen Brennpunkt besitzt und C in π osculirt, wird auch K in π osculiren, oder mit anderen Worten, K ist der Krümmungskreis des Kegelschnittes C_1. Um den Mittelpunkt M dieses Kegelschnittes zu finden, welcher der von uns verlangte Krümmungsmittelpunkt der Fusspunktcurve im Punkte p ist, werden wir seine durch den Brennpunkt O gehende Axe construiren.

Für diese Axe erhält man durch Umkehrung der bekannten Construction des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten folgende Bestimmungsart:

Man fälle vom Centrum c des Kreises K auf den Leitstrahl $\overline{o\pi}$ ein Perpendikel, und aus dessen Fusspunktcurve a ein Perpendikel auf $\overline{c\pi}$, welches diese Linie in einem Punkte b trifft.

Der Punkt b mit O verbunden liefert die Axe des Kegelschnittes C_1, dessen Mittelpunkt M auf derselben liegen muss. Nun muss dieser Mittelpunkt als Krümmungscentrum von p auf der Normale N der Curve F im Punkte p liegen, welche Normale man erhält, wenn man p mit dem Halbirungspunkte m von $\overline{o\pi}$ verbindet. Der Schnittpunkt der Linien N und ob ist das gesuchte Krümmungscentrum M des Punktes p, und folglich der aus M mit $\overline{Mp}$ beschriebene Kreis R der Krümmungskreis der Fusspunktcurve im Punkte p.

9. Wäre der Kreis K die Directrix selbst, so würde sich die Construction der einzelnen Krümmungsmittelpunkte oder der Evolute von F dadurch wesentlich abkürzen, dass die beiden Punkte a, m auf zwei festen Kreisen bleiben; nämlich a auf dem über $\overline{oc}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise und m auf einem anderen Kreise, welcher mit K den Punkt O zum Aehnlichkeitscentrum besitzt.

10. Die in 8. angeführte Construction erfährt eine Umänderung für die durch den Pol O gehenden Zweige der Fusspunktcurve.

Ist nämlich t (Fig. 5) eine von O aus an die Directrix C gehende Tangente, so ist die in O auf t errichtete Senkrechte θ die Tangente eines durch O gehenden Zweiges der Fusspunktcurve F. Nun lässt sich leicht zeigen, dass der über $\overline{o\pi}$ als Durchmesser beschriebene Kreis R der Krümmungskreis der Fusspunktcurve, resp. des betrachteten Zweiges im Punkte O ist. Dabei bedeutet wie früher π den Berührungspunkt der Tangente t.

Der freundliche Leser wird dies sofort einsehen, wenn er zwei Nachbartangenten der Tangente t betrachtet und sie hierauf unendlich nahe zu t rücken lässt.

11. Schliesslich sei noch bemerkt, dass man in umgekehrter Weise den Krümmungskreis der Directrix construiren könne, wenn man jenen der Fusspunktcurve zu bestimmen weiss.

Es sind also in der vorhergehenden Methode nicht allein die Constructionen der Krümmungsmittelpunkte von Fusspunktcurven, sondern auch jene für Directricen enthalten.

(Aus den Sitzungsberichten der Wiener Akademie, Febr. 1869.)

XXIII. Zur Theorie des Potenziales. (Hierzu Taf. VIII, Fig. 6 und 7).

Herr Prof. Dr. Clausius führt in seiner schönen Abhandlung über „die Potenzialfunction und das Potenzial" auf ca. 24 Seiten einen streng wissenschaftlichen Beweis für den bekannten Satz über die Werthe des Green'schen Ausdruckes

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

wenn der Potenzialpunkt (x, y, z), auf welchen sich die Potenzialfunction V bezieht, ausserhalb oder innerhalb des agenserfüllten Raumes, insbesondere aber in unendlicher Nähe an der Grenzfläche des letzteren liegt. Es lässt sich aber zeigen, dass der erwähnte Beweis bei gleicher wissenschaftlicher Strenge bedeutend kürzer geführt werden kann.

Dieses nachzuweisen ist der Gegenstand der folgenden Zeilen.

I.

Wir denken uns das Agens beliebig im Raume vertheilt und setzen blos voraus, dass die Dichtigkeit desselben in jedem Punkte endlich ist; ferner nehmen wir an, die Dichtigkeit des Agens sei an irgend einer Stelle innerhalb einer unendlich kleinen mit dem Radius δ' beschriebenen Kugel gleich Null und ändere sich von der unendlich kleinen Oberfläche dieser Kugel aus in beliebiger Weise, ohne jedoch (unserer Voraussetzung gemäss) unendlich gross zu werden.

Innerhalb dieser Kugel (siehe Fig. 6) beschreiben wir mit einem unendlich kleinen Radius $\delta < \delta'$, für welchen $1 - \frac{\delta}{\delta'}$ eine beliebig kleine aber endliche Grösse ist, eine zweite concentrische Kugel und setzen fest, dass der Potenzialpunkt M, dessen auf ein rechtwinkliges Axensystem $OXYZ$ bezogene Coordinaten (x, y, z) sein mögen, in der zweiten Kugel vom Radius δ jede beliebige Stelle einnehmen, aus derselben jedoch nicht heraustreten darf.

Nimmt man in der Oberfläche der grösseren mit dem Radius δ' beschriebenen Kugel einen festen Punkt A an, legt durch denselben als neuen Ursprung ein dem ursprünglichen paralleles Axensystem $AXYZ$, bezeichnet ferner mit ϱ die Distanz AN eines beliebigen Punktes N des agenserfüllten Raumes vom Punkte A, mit ϑ den Winkel der AN mit der Axe

der $+x$, mit ω den Winkel der Ebene ANX des Winkels ϑ mit der Ebene der XY; mit k die blos von den (auf den Ursprung O bezogenen) rechtwinkeligen Coordinaten (ξ, η, ζ) des Punktes N abhängige Dichte des Agens im Punkte N; endlich mit r die Distanz MN des Potenzialpunktes vom Punkte N, so ist $k\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\omega$ das Massenelement und

$$1) \qquad V = S\left[\frac{k\varrho^2 \sin\vartheta}{r} d\varrho \, d\vartheta \, d\omega\right]$$

die Potenzialfunction des Agens bezüglich des Punktes M.

Man übersieht sofort (und hierin liegt der Schwerpunkt unseres Beweises), dass hier nach den gemachten Bestimmungen der Quotient $\frac{\varrho}{r}$ für jeden Punkt N des agenserfüllten Raumes **endlich** bleibt; dass daher wegen der Endlichkeit von k, ϱ und $\sin\vartheta$ auch der Factor $\frac{k\varrho^2 \sin\vartheta}{r}$ vor $d\varrho \, d\vartheta \, d\omega$ endlich ist; und dass die Coordinaten des Potenzialpunktes M (x, y, z) nur in der Grösse

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

vorkommen, da $\varrho, \vartheta, \omega, \xi, \eta, \zeta$ und k von x, y, z unabhängig sind.

Man kann somit das Potenzial V unbedenklich einmal partiell nach einer der Grössen x, y, z dadurch differentiiren, dass man die betreffende Differentiation unterhalb des Summenzeichens S, welches eine über den ganzen agenserfüllten Raum sich erstreckende Summation (beziehungsweise Integration) bezeichnet, ausführt. Thut man dies, so ergiebt sich

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = S\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} k\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\omega\right], \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = S\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} k\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\omega\right], \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = S\left[\dfrac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} k\varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\omega\right]. \end{cases}$$

Hier ist innerhalb der Summenzeichen

$$\varrho^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{\varrho^2}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos(\widehat{r, x}),$$

$$\varrho^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{\varrho^2}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos(\widehat{r. y}),$$

$$\varrho^2 \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{\varrho^2}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2 \cos(\widehat{r. z}).$$

Da nun die Richtcosinus der Distanz r und der Quotient $\frac{\varrho}{r}$ endliche Grössen sind, so erhellt augenblicklich, dass die Factoren vor $d\varrho\, d\vartheta\, d\omega$ innerhalb der Summenzeichen in den rechten Theilen des Gleichungssystems 2) ebenfalls endlich sind, dass man also die Gleichungen des letzteren Systems noch einmal respective nach x, y, z differentiiren kann, indem man die betreffenden Differentiationen rechts vom Gleichheitszeichen unterhalb des Summenzeichens S ausführt.

Differentiirt man solchergestalt die erste Gleichung des Systems 2) noch einmal partiell nach x, die zweite partiell nach y, die dritte partiell nach z, und summirt man die so resultirenden Gleichungen, so erhält man

$$\varDelta V = S\left[\varDelta\left(\frac{1}{r}\right).\, k\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\omega\right],$$

oder wegen

$$\varDelta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 0,$$

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

d. h.: „Ist ein beliebig begrenzter Raum mit einem Agens erfüllt, dessen Dichte in jedem Punkte endlich, aber sonst beliebig ist, so verschwindet der Green'sche Ausdruck $\varDelta V$, sobald um den Potenzialpunkt x, y, z eine unendlich kleine Kugel gelegt gedacht werden kann, innerhalb welcher kein Agens enthalten ist, oder mit anderen Worten, innerhalb welcher die Dichte des Agens gleich Null ist."

II.

Es sei wieder ein agenserfüllter beliebig begrenzter Körper A gegeben, in welchem das Agens in jedem Punkte eine endliche sonst beliebige Dichte hat.

In diesem Körper denken wir uns an einer beliebigen Stelle (selbst in unendlicher Nähe an der Oberfläche) eine unendlich kleine Kugel beschrieben, in welcher das Agens die constante Dichte k_0 besitzen soll. Es handelt sich nun darum, den Werth des Green'schen Ausdruckes $\varDelta V$ für den Fall zu bestimmen, dass der Potenzialpunkt $M(x, y, z)$ innerhalb der letzterwähnten Kugel frei beweglich gedacht wird.

Um diesen Fall auf den unter I. behandelten zurückzuführen, nehmen wir in endlicher Entfernung vom Potenzialpunkte einen festen Punkt B (mit den rechtwinkeligen Coordinaten (a, b, c) an und beschreiben um denselben als Centrum eine Kugel, welche die unendlich kleine Kugel (in der sich der Potenzialpunkt frei bewegt) ganz umschliesst.

Diese Kugel B denken wir uns homogen mit dem Agens von der constanten Dichte $-k_0$ erfüllt und über den Körper A gelegt (siehe Fig. 7).

Unter dieser Voraussetzung erhält das Agens in dem aus den Körpern A und B zusammengesetzten Körper $(A+B)$ innerhalb der unendlich kleinen den Potenzialpunkt einschliessenden Kugel die Dichte $k_0 - k_0 = 0$, d. h. der Körper $(A+B)$ erhält hinsichtlich des Potenzialpunktes dieselbe Beschaffenheit wie der unter I. betrachtete agenserfüllte Raum.

Ist nun V das Potenzial des Körpers A, U das Potenzial der Kugel B bezüglich M, so ist $(U+V)$ das Potenzial des Körpers $(A+B)$ bezüglich des Punktes (x, y, z), und es wird nach dem unter I. gefundenen Satze

$$3)\quad \begin{cases} \Delta(U+V) = \Delta U + \Delta V = 0, \\ \Delta V = -\Delta U. \end{cases}$$

Beachtet man hier, dass die Kraftcomponenten der homogenen Kugel B von der Dichte $(-k_0)$ bezüglich des Punktes (x, y, z) bekanntlich

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \tfrac{4}{3}\pi k_0 (x-a),$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \tfrac{4}{3}\pi k_0 (y-b),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \tfrac{4}{3}\pi k_0 (z-c)$$

sind und differentiirt man die erste von diesen Gleichungen partiell nach x, die zweite partiell nach y, die dritte partiell nach z, so ergiebt sich durch Addition der so entstehenden Gleichungen

$$\Delta U = 4\pi k_0$$

und [siehe 3)]

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k_0,$$

d. h.: „Ist ein beliebig begrenzter Raum mit einem Agens erfüllt, dessen Dichte in jedem Punkte endlich, aber sonst beliebig ist, so hat der Green-sche Ausdruck ΔV den Werth $-4\pi k_0$, so lange sich der Potenzialpunkt (x, y, z) innerhalb einer um ihn gelegt gedachten unendlich kleinen Kugel bewegt, innerhalb welcher das Agens die constante Dichtigkeit k_0 besitzt.“

Der hier ausgesprochene Satz enthält offenbar den unter I. bewiesenen Lehrsatz als speciellen Fall (für $k_0 = 0$) in sich, und lehrt, dass sich der Green'sche Ausdruck bei einer beliebigen Bewegung des Potenzialpunktes M im Raume so lange stetig ändert, so lange als die Dichte des Agens im Potenzialpunkte bei der betreffenden Bewegung stetig bleibt, jedoch sofort unbestimmbar wird, wie der Potenzialpunkt bei seiner Bewegung durch eine Stelle hindurchgeht, in welcher die Dichte unstetig wird.

Prag, am 1. Januar 1869.

Dr. A. K. Grünwald.



XXIV. Ueber die scheinbare und absolute Grösse der Sonne. Von Dr. Ludwig Matthiessen in Husum. (Hierzu Tafel VIII, Fig. 8.)

Da durch die Resultate der sorgfältigen Beobachtungen der Sonnenflecke während der drei letzten Jahre die Photosphärentheorie immer mehr an Haltbarkeit zu verlieren scheint und nur noch von Faye vertreten wird, so knüpfen sich an die neuere Ansicht der Schlackentheorie von Zöllner und der Wolkentheorie von Kirchhof und Spörer auch Fragen mathematischer Natur. Wenn schon jetzt entschieden ist, dass unsere Sonnenscheibe ein in Weissglühhitze befindlicher flüssiger undurchsichtiger Körper ist, umgeben von einer gasförmigen Hülle (*corona*) von colossalen Dimensionen, aber geringer Leuchtkraft und niedrigerer Temperatur, so kann die Sonne den Durchmesser von 184000 Meilen, den man ihr nach den neuesten Bestimmungen zuschreibt, nicht besitzen und es muss diese Vergrösserung eine Folge der Refraction der Sonnenstrahlen in der eigenen Atmosphäre sein. Dazu kommt, dass man wenig geneigt ist, der Sonnenmasse die hieraus resultirende geringe Dichtigkeit von nur ungefähr 1,6 der Dichte des Wassers zuzuschreiben, ein Umstand, der die Verfechter der Photosphärentheorie hauptsächlich bestimmt, an ihrer Ansicht festzuhalten. Weit unter die Dichtigkeit des Eisens möchte wohl kaum die Dichte der Sonnenkugel zu setzen sein, und diese würde ihr schon zugeschrieben werden müssen, wenn es sich durch Beobachtungen nachweisen liesse, dass ihr wahrer Durchmesser nur $^4/_9$ des scheinbaren betrage. Es findet nun aber unter jeder Bedingung eine Vergrösserung statt.

Um diese Ansicht ausser allen Zweifel zu setzen und zu begründen, gehen wir aus von einem physikalischen Versuche, den man auch zu einer sehr einfachen, ziemlich genauen Messungsmethode der Brechungsexponenten von Flüssigkeiten einrichten kann. Lässt man in der Mitte eines Glases mit Wasser eine hölzerne Kugel schwimmen, so sieht man den im brechenden Medium befindlichen Theil derselben genau um das 1,336fache linear vergrössert. Bei diesem Versuche ist erforderlich, dass man einen Becher von dünnem Glase wählt, wozu sich am besten Kochgläser eignen, und dass der Durchmesser des Glases den der Kugel mindestens um den dritten Theil übertreffe. Aehnlich wird es sich auch mit der scheinbaren und absoluten Grösse der Sonnenkugel verhalten; ihr Durchmesser muss bis auf das n-fache vergrössert erscheinen, wenn n den Brechungsexponenten der Corona bezeichnet. Ferner erkennt man leicht bei demselben Experimente, dass man eine bedeutend grössere Fläche als die Halbkugel übersieht; dasselbe muss bei der Betrachtung der Sonnenscheibe der Fall sein und man wird höchst wahrscheinlich aus sorgfältigen Beobachtungen über die relative Geschwindigkeit der Bewegung der Sonnenflecke vorzugsweise am Rande der Scheibe zur Zeit des 8. Juni und 9. Decembers hierzu wichtige Belege sammeln können. Die Flecken werden einige Tage länger als die halbe Rotationsdauer der Sonne sichtbar sein müssen.

Nun ist freilich über die lichtbrechende Kraft der Sonnenatmosphäre nichts bekannt, indessen wird hier als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen eine auf Vergleiche mit terrestrischen Verhältnissen gestützte Hypothese vorläufig genügen. Nach den übereinstimmenden Zeugnissen verschiedener Beobachter hat die Sonnenatmosphäre eine immense Höhe. Nach Foucault ergab eine während der totalen Finsterniss 1860 in Spanien aufgenommene Photographie die Breite der Corona gleich der Grösse von drei Sonnenhalbmessern, wogegen Weyer direct dieselbe gleich einem Sonnenhalbmesser schätzte. Struve und Schidlowski schätzten 1842 die Breite gleich $^3/_4$ Sonnendurchmessern. Secchi fand auf seinen zu Desierto aufgenommenen Photographien, dass die Corona ihre grösste Ausdehnung in der Richtung des Sonnenäquators, die kleinste in der Richtung der Polaraxe hatte. Dies deutet offenbar auf einen Gleichgewichtszustand, auf Niveauflächen in der Corona, also auf ihre physische Natur hin.

Auf eine materielle Beschaffenheit weist auch die Beobachtung des Directors der Warschauer Sternwarte Prazmowski zu Briviesca in Spanien (1860) hin, dass nämlich das Licht der Corona überall stark polarisirt ist in einer Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Folgen wir nun den Angaben von Prof. Weyer und Struve und nehmen *a priori* eine scheinbare Vergrösserung des Sonnendurchmessers an, so würde die Höhe der Sonnenatmosphäre mindestens 150000 Meilen betragen. Dabei würde die Gravitation (Fallgeschwindigkeit) auf der Sonne nicht mehr 423 Fuss, sondern mindestens 1600 Fuss betragen; d. i. das Hundertfache von der auf unserer Erde. Nun beträgt der Kochpunkt des Wassers auf der Erde 100° C. bei einem Atmosphärendruck; bei 100facher Schwerkraft würde der Kochpunkt auf fast 300° erhöht werden. Wenn man weiter annimmt, dass bei mindestens 500° und etwa 1000 Atmosphären die beiden Aggregatzustände für das Wasser in einander übergehen und dann, wie sich auch aus Cagniard de la Tour's Versuchen mit Aether ergeben hat, bei constantem Volumen die Spannkräfte der Temperaturzunahme nahezu proportional bleiben, so würde bei der Weissglühhitze von 2000° die Spannkraft nicht den Druck von 4000 Atmosphären übersteigen. Nun nimmt der Luftdruck mit der Tiefe der Atmosphäre in einer starkwachsenden Proportion nach der Function

$$B = C \cdot e^h$$

zu, so dass auf der Erdkugel in einer Tiefe von 10 Meilen unter der Oberfläche der Luftdruck schon über 8000 Atmosphären betragen würde und die Luft in dieser Tiefe eine Dichtigkeit annehmen müsste, welche die des Wassers überschreitet. Dies entspräche dem Drucke einer Erdatmosphäre von nur der doppelten Höhe, die man ihr zuzuschreiben pflegt.

Vergleichen wir mit allen diesen terrestrischen Verhältnissen die immensen Verhältnisse auf der Sonne und rechnen hinzu, dass in Analogie der Versuche von Masson und Jamin mit durchsichtigen Massen über-

haupt die durchsichtigen Schichten der Corona in hohem Grade diatherman sein müssen und nur die untersten Schichten der leitenden Wärme exponirt sind, welche auch noch durch den sphäroidalen Zustand zurückgehalten wird, so ist kaum noch zu bezweifeln, dass die weissglühende Sonnenkugel von einer glühenden Wasserschicht bedeckt ist, die durch den ungeheuren Atmosphärendruck in flüssigem Zustande erhalten wird und dass diese von einer äusserst comprimirten Luftschicht bedeckt ist, welche gleichfalls an Dichtigkeit die Dichte des Wassers eher weit übertrifft, als ihr nachsteht. Aus der Existenx einer Wasserschicht und ihrer Zersetzung an dem metallreichen glühenden Kerne würden sich auch die wasserstoffreichen Protuberanzen erklären lassen, welche als durch die Wasserdecke emporschiessende Wasserstoffsäulen vielleicht die Flecke erzeugen und durch Entzündung mit dem freien Sauerstoff der Gasatmosphäre helle Linien in ihrem Spectrum zeigen. Das ganze Phänomen erinnert sehr an die Thätigkeit unserer Vulkane, welche auch Wasserstoffsäulen aushauchen.

Da nun wegen der obengedachten schnellen Zunahme des Luftdrucks von oben nach unten gestattet sein wird, anzunehmen, dass jene Dichtigkeit der Corona mindestens bis zu einer Höhe von 50000 Meilen sich erhebt, mit einem Brechungsexponenten, der sicherlich den des Flintglases übersteigt und wohl fast an den des Diamanten reicht, so scheint hierdurch die Annahme einer scheinbaren Vergrösserung des Sonnendurchmessers vollständig gerechtfertigt.

Um vorstehende Ideen mathematisch zu fixiren, sei in Tafel VIII, Fig. 8 AB der wahre, CD der scheinbare Sonnendurchmesser, $EPFR$ die Peripherie der lichtbrechenden Corona, mit einer anfangs langsam, bald aber rapid wachsenden Dichtigkeit und einem entsprechend wachsenden Brechungsvermögen. Dabei kommt es nur auf den Brechungsexponenten der unteren Schichten und eine hinreichende Dichte derselben an. Es sei also den obigen Auseinandersetzungen gemäss $n = 2{,}25$ der mittlere Brechungsexponent, fU einer der von der Erde aus wahrgenommenen Randstrahlen, welche auf dem Wege $abcdef$ zur Oberfläche der Corona gelangen. Dann ist

$$\sin SfU : \sin afM = 2{,}25$$

und ferner

$$\sin SfU = \sin NfM = MN : Mf,$$
$$\sin afM = aM : Mf,$$

folglich $MN = 2{,}25\,aM$ der scheinbare Sonnenhalbmesser.

Bezeichnet man den wahren Sonnenhalbmesser aM mit r, die wahre Dichtigkeit der Sonne mit d, die der Corona mit 1 (d. i. gleich der des Wassers), so ist nahezu

$$\tfrac{4}{3} r^3 \pi \,.\, (d-1) + \tfrac{4}{3} (2{,}25 r)^3 \pi = \tfrac{4}{3} (2{,}25 r)^3 \pi \,.\, 1{,}6.$$

Mithin würde unter diesen Voraussetzungen $d = 7{,}75$ betragen.

Nun schweben wir allerdings in Betreff des Brechungsexponenten vollständig im Dunkeln. Wir wollen aber noch kurz einen Weg andeuten, auf welchem man möglicherweise zur Kenntniss desselben gelangen kann. Wir haben schon bei jenem physikalischen Versuche darauf aufmerksam gemacht, dass man unter allen Umständen einegrössere Fläche als die Halbkugel übersieht. Wir wollen noch zeigen, in welchem Abhängigkeitsverhältnisse dieser Excess zum Brechungsexponenten steht. Dieser Excess ist nämlich eine Function von dem scheinbaren Sonnenhalbmesser, dem Halbmesser der Corona und dem Brechungsexponenten n derselben.

Mit Zugrundelegung der obigen Annahmen, nämlich: dem berechneten Sonnenhalbmesser von 90000 : 2,25 = 40000 Meilen und dem Halbmesser der Corona zu 90000 Meilen, ist

$$\sin afM = \frac{40000}{90000} = 0,444,$$

$$\sin SfM = 2,25 \,.\, 0,444 = 1,000.$$

Mithin würde betragen:

$$\text{Bogen } BZ = r \,.\, \arcsin 1 = 90^0\, 0',$$
$$\text{Bogen } Za = r \,.\, \arccos 0,444 = 63^0\, 30'$$

und folglich

$$\text{Bogen } Ba = 153^0\, 30',$$

d. h. man würde vom Aequator $2\,(153^0\,30' - 90^0\,0') = 127^0\,0'$ mehr als 180^0 überblicken können.

Dies ist aber bei dem Brechungsexponenten $n = 2,25$ das Maximum des Excesses. Dass man aber, wie bekannt, einen solchen Ueberschuss nicht bemerkt, rührt von der grösseren Breite der Corona her, sie beträgt zufolge den mitgetheilten Beobachtungen mindestens 150000 geogr. Meilen (Struve). Setzen wir also ihren Kugelhalbmesser gleich 200000 geogr. Meilen, so ist jetzt

$$\sin afM = \frac{40000}{200000} = 0,200,$$

$$\sin SfM = 2,25 \,.\, 0,2 = 0,450.$$

Mithin würde betragen:

$$\text{Bogen } BZ = r \,.\, \arcsin 0,450 = 26^0\, 50',$$
$$\text{Bogen } Za = r \,.\, \arccos 0,200 = 78^0\, 30'$$

und folglich

$$\text{Bogen } Ba = 95^0\, 20',$$

d. h. man müsste vom Aequator $2\,(95^0\,20' - 90^0\,0') = 10^0\,40'$ mehr als 180^0 überblicken können, was wir für sehr möglich halten. Das Minimum des Excesses ist Null, wenn der Radius der sichtbaren inneren Kugel verschwindend klein ist gegen den Halbmesser der brechenden Dunstkugel. Man übersieht also nur die Halbkugel, wenn entweder die Dunstkugel sehr gross ist, oder dieselbe kein Brechungsvermögen besitzt.

Man ist nun auch im Stande, umgekehrt aus der Vergrösserung des sichtbaren Theiles der Oberfläche den Brechungsexponenten zu finden. Bezeichnet nämlich u die sichtbare Länge des Aequators, r den wahren, ϱ den scheinbaren Halbmesser der Sonne, R den Halbmesser der Dunstkugel, so ist

$$u = 2r \left\{ \arcsin n \cdot \frac{r}{R} + \arccos \frac{r}{R} \right\},$$

$$n = \varrho : r,$$

folglich

$$n = \frac{2\varrho}{u} \left\{ \arcsin \frac{\varrho}{R} + \arccos \frac{r}{nR} \right\}.$$

Da u, ϱ und R durch Beobachtung gefunden werden, so lässt sich hieraus n berechnen und folglich auch der wahre Durchmesser r. Diese Entdeckungen sind vielleicht späteren Zeiten vorbehalten; so viel aber scheint gewiss zu sein, dass unter allen Umständen eine scheinbare Vergrösserung der Sonnenkugel stattfindet, nicht blos wegen der Irradiation, sondern vorzugsweise wegen der Refraction der Randstrahlen innerhalb der Corona.

Es giebt nun aber noch eine andere leichtere Methode der Beobachtung, welche hoffen lässt, eine Beziehung zwischen den Elementen n, r, R und ϱ zu entdecken, nämlich die Beobachtung und Messung der scheinbaren heliocentrischen Winkelgeschwindigkeit der Flecke oder der Fackeln in der Nähe des Centrums der Sonnenscheibe. Ich führe hier die Sonnenfackeln an, weil laut brieflicher Mittheilung Herr Hofrath Schwabe in Dessau diese für feste Gegenstände auf der Sonnenoberfläche hält. Sehr schöne Photographien, die ihm vom Baron Warren de la Rue (Kew-Observatorium) zugesandt sind, lassen eine kreisförmige Gestalt der meisten Fackeln deutlich erkennen, wodurch sie den Mondgebirgen zu gleichen scheinen. Da grosse Züge von Sonnenflecken immer von vielen Sonnenfackeln begleitet sind, so könnte man geneigt sein, die Fackeln für Kratergebirge, die Protuberanzen (Flecke?) für Wasserdampf- oder Wasserstoffsäulen zu halten. Nun folgt aus physikalischen Gründen, dass die scheinbare heliocentrische Winkelgeschwindigkeit der Flecke oder Fackeln in der Nähe des Centrums der Sonnenscheibe bei einer vorhandenen Refraction der Strahlen in der Corona geringer sein müsse, als sie nach Zugrundelegung der mittleren Periode von 25,34 Tagen eigentlich sein würde.

Ist nämlich r der wahre Halbmesser der Sonne, ϱ der scheinbare, ϱ_0 der scheinbare Halbmesser in der Richtung der Sehaxe, R der Halbmesser der lichtbrechenden Corona, d die Dicke derselben, n ihr Brechungsvermögen, a der Abstand des Bildes eines Punktes der Sonnenoberfläche von der Oberfläche der lichtbrechenden Schicht, so ist für irgend einen Punkt der Centrale der Sehaxe

$$f = \frac{naRr - rd\{(n-1)a - R\}}{n(n-1)a(r-R) + (n-1)d\{(n-1)a - R\} - nRr}.$$

Nun ist für den Mittelpunkt der Sonnenscheibe $f=0$, mithin

$$a = \frac{-dR}{nR - d(n-1)}$$

und wegen $d = R - r$

$$a = \frac{-(R-r)R}{r(n-1)+R}.$$

Das Bild oder der scheinbare Ort des Mittelpunktes der Sonnenscheibe befindet sich also innerhalb der lichtbrechenden Schicht und sein scheinbarer Abstand ϱ_0 vom Kugelmittelpunkte ist stets kleiner als der scheinbare Halbmesser ϱ des Sonnenrandes. Die Sonne muss dem Beobachter daher stets als ein von vorne abgeplattetes Rotationsellipsoid erscheinen. Um die Verhältnisse zu veranschaulichen, gehen wir wiederum von einem concreten Falle aus.

Bezeichnet ν_0 die beobachtete heliocentrische Winkelgeschwindigkeit einer Fackel zur Zeit des 8. Juni oder 9. Decembers, ν die berechnete, so ist offenbar

$$\varrho_0 : \varrho = \nu_0 : \nu.$$

Sei $n = 2{,}00$, $R = \varrho = nr$, also $R = 2r$, so ist $a = -\frac{2}{3}r$, $\varrho_0 = \frac{4}{3}r$ und wegen $\varrho = 2r$

$$\varrho_0 : \varrho = 2 : 3 = \nu_0 : \nu,$$

d. h. die scheinbare heliocentrische Winkelgeschwindigkeit würde nur $\frac{2}{3}$ der berechneten betragen.

Umgekehrt lässt sich offenbar n aus ν_0 und ν bestimmen. Dabei sind 3 Fälle zu berücksichtigen, nämlich $R \gtreqless nr$.

1. Sei $R = nr$, so ist $R = \varrho = nr$, $\nu_0 : \nu = \varrho_0 : \varrho$, mithin

$$\varrho_0 = \varrho \frac{\nu_0}{\nu} = nr \frac{\nu_0}{\nu},$$

$$R = \varrho_0 - a = nr \frac{\nu_0}{\nu} + \frac{(R-r)R}{r(n-1)+R},$$

folglich

$$n = \frac{R}{r}\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) + 1, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{r}{R}(n-1) + 1$$

und ferner

$$\varrho_0 = \frac{Rrn}{r(n-1)+R} = r\frac{n^2}{2n-1},$$

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{2n-1}{n}, \quad n = \frac{\nu_0}{2\nu_0 - \nu}. \tag{1}$$

In diesem Falle erreicht der scheinbare Durchmesser der Sonnenscheibe sein Maximum, nicht aber der scheinbare Durchmesser der Sonne in der Richtung ihrer Centrale (Sehaxe).

2. Sei $R > nr$, so ist $\varrho = nr$; ϱ_0 erhält aber einen grösseren Werth als im vorerwähnten Falle, was sich leicht aus der Relation

$$\varrho_0 = R + a = \frac{Rrn}{r(n-1)+R}$$

ergiebt, indem für $R = \infty$, $\varrho_0 = rn = \varrho$ wird, die Sonne also als vollkommene Kugel erscheint.

Ist nun $m > 1$ und $R = mnr$, also $m = R : \varrho$, so ist

$$\varrho_0 = \frac{rmn^2}{mn+n-1}, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{mn+n-1}{mn},$$

$$2) \qquad n = \frac{\nu_0}{\nu_0 - m(\nu - \nu_0)}.$$

3. Sei $R < nr$, so ist $\varrho < nr$ und $= R$. Auch nimmt ϱ_0 ab, so dass an der Grenze $R = r$, auch $\varrho_0 = r$, sowie $\varrho = r$ werden. Ohne eine lichtbrechende Schicht muss also ebenfalls die Sonne in ihrer wahren Gestalt und Grösse erscheinen. Nun sei $R = pnr$, worin $p < 1$, dann ist:

$$\varrho_0 = \varrho \frac{\nu_0}{\nu} = R \frac{\nu_0}{\nu},$$

$$R = \varrho_0 - a = R \frac{\nu_0}{\nu} + \frac{(R-r)R}{r(n-1)+R},$$

$$n = \frac{R-r}{r\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right)}, \quad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{R-r}{rn} + 1,$$

$$\varrho_0 = \frac{Rrn}{r(n-1)+R} = \frac{rpn^2}{pn+n-1},$$

$$3) \qquad \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{pn+n-1}{n}, \quad n = \frac{\nu_0}{\nu_0(p+1) - \nu}.$$

Für $m = p = 1$ gehen die Formeln 2) und 3) in 1) über. Für $\nu_0 = \nu$ ergeben alle drei Formeln natürlich die Bedingung $n = 1$; für $\nu_0 < \nu$ hingegen $n > 1$; für $\nu_0 > \nu$ würde sich aber kein physikalischer Grund auffinden lassen, da n unmöglich < 1 sein kann. Wir schliessen diese Theorie mit einer Zusammenstellung der für Messungen geeigneten Relationen für n:

$$a) \qquad R = nr; \quad n = \frac{2\varrho}{u}\left\{\arcsin 1 + \arccos \frac{1}{n}\right\} = \frac{\nu_0}{2\nu_0 - \nu};$$

$$b) \quad R > nr; \quad n = \frac{2\varrho}{u}\left\{\arcsin \frac{\varrho}{R} + \arccos \frac{\varrho}{nR}\right\} = \frac{\nu_0}{\nu_0 - \frac{R}{\varrho}(\nu - \nu_0)};$$

$$c) \quad R < nr; \quad n = \frac{2\varrho}{u}\left\{\arcsin 1 + \arccos \frac{1}{n}\right\} = \frac{\nu_0}{\nu_0(p+1) - \nu}.$$

XXV. Zur Abbildung des Rechtecks auf der Kreisfläche. Von Dr. E. Jochmann in Liegnitz.

Die Fläche eines Rechtecks kann, wie H. Schwarz (Borchardt's Journal LXX) gezeigt hat, mit Hilfe der elliptischen Functionen auf einer Halbebene oder auf der Kreisfläche conform abgebildet werden. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, auf einige einfache geometrische Eigenschaften der orthogonalen Curvensysteme vom vierten Grade hinzuweisen, zu welchen diese Abbildung Veranlassung giebt. Dieselben entsprechen grösstentheils den analogen Eigenschaften der verwandten von Siebeck (Borchardt's Journal LVII und LIX) untersuchten Curvensysteme.

Stehen die Seiten des gegebenen Recktecks im Verhältniss von $2\mathfrak{K}:\mathfrak{K}'$, so wird nach Schwarz die Abbildung des Rechtecks auf der Halbebene vermittelt durch die Function

$$t = \sin am\, u, \quad (mod\, \mathfrak{k}),$$

wenn der Modul $\mathfrak{k}$ dem Periodenverhältniss $\frac{\mathfrak{K}' i}{\mathfrak{K}}$ entsprechend bestimmt wird. Den Parallelen zu den Rechteckseiten entsprechen also in dieser Abbildung die von Siebeck untersuchten Curvensysteme für $\sin am\, u$, den Eckpunkten des Rechtecks die Brennpunkte jener Curvensysteme.

Durch die Substitution

$$s = \frac{1 + it\sqrt{\mathfrak{k}}}{i + t\sqrt{\mathfrak{k}}}$$

geht man von der Abbildung auf der Halbebene zur Abbildung auf einer Kreisfläche vom Halbmesser 1 über, deren Mittelpunkt dem Mittelpunkte des Rechtecks entspricht. Setzt man für t seinen Werth, so wird

$$s = \frac{1 + i\sqrt{\mathfrak{k}} \sin am\, u}{i + \sqrt{\mathfrak{k}} \sin am\, u} = \frac{2\sqrt{\mathfrak{k}} \sin am\, u}{1 + \mathfrak{k} \sin^2 am\, u} - i \frac{1 - \mathfrak{k} \sin^2 am\, u}{1 + \mathfrak{k} \sin^2 am\, u}$$

und es entsprechen den Eckpunkten des Rechtecks

$$+\mathfrak{K}, \qquad -\mathfrak{K}, \qquad +\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' i, \qquad -\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' i$$

die Bildpunkte

$$+\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\mathfrak{k}} - i\frac{1-\mathfrak{k}}{1+\mathfrak{k}}, \quad -\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\mathfrak{k}} - i\frac{1-\mathfrak{k}}{1+\mathfrak{k}}, \quad +\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\mathfrak{k}} + i\frac{1-\mathfrak{k}}{1+\mathfrak{k}}, \quad -\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\mathfrak{k}} + i\frac{1-\mathfrak{k}}{1+\mathfrak{k}}.$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man mittelst der Landen-schen Transformation vom Modul $\mathfrak{k}$ zum Modul

$$k = \frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}}{1+\mathfrak{k}}$$

und zum Argument

$$v = (1 + \mathfrak{k})\, u$$

übergeht. Es wird dann (Jacobi, Fundam. p. 96):

$$\frac{2\sqrt{\mathfrak{k}}\,\sin am\,(u,\,\mathfrak{k})}{1+\mathfrak{k}\,\sin^2 am\,(u,\,\mathfrak{k})} = k \sin am\,(v,\,k),$$
$$\frac{1-\mathfrak{k}\,\sin^2 am\,(u,\,\mathfrak{k})}{1+\mathfrak{k}\,\sin^2 am\,(u,\,\mathfrak{k})} = \Delta\, am\,(v,\,k),$$

mithin

$$s = k \sin am\,(v,\,k) - i\Delta\, am\,(v,\,k).$$

Das Verhältniss der Rechteckseiten wird durch das Periodenverhältniss:

$$\frac{K'}{K} = \frac{\mathfrak{K}'}{2\,\mathfrak{K}}$$

ausgedrückt. Setzt man noch:

$$v = w + K'i,$$

so wird:

1) $$s = \frac{1-\cos am w}{\sin am w} = tang\left(\frac{1}{2}\,am\,w\right),\quad (mod\ k)$$

und den Eckpunkten des Rechtecks

2) $$K+K'i,\quad K-K'i,\quad -K+K'i,\quad -K-K'i$$

entsprechen die auf der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser 1 liegenden Bildpunkte

3) $$k+k'i,\quad k-k'i,\quad -k+k'i,\quad -k-k'i.$$

Ist nun:

$$s = \xi + \eta i \quad w = x + yi,$$

mithin

1*) $$\left\{\begin{array}{l} \xi+\eta i = \dfrac{1-\cos am\,(x+yi)}{\sin am\,(x+yi)}, \\ \xi-\eta i = \dfrac{1-\cos am\,(x-yi)}{\sin am\,(x-yi)}, \end{array}\right.$$

und setzt man zur Abkürzung:

4) $$\left\{\begin{array}{llll} s & = \sin am x, & \sigma i & = \sin am y i, \\ c = \sqrt{1-s^2} & = \cos am x, & \gamma = \sqrt{1+\sigma^2} & = \cos am y i, \\ d = \sqrt{1-k^2 s^2} & = \Delta\, am x, & \delta = \sqrt{1+k^2\sigma^2} & = \Delta\, am y i, \end{array}\right.$$

so ergeben sich durch Addition, Subtraction und Multiplication der Gleichungen 1*) die Ausdrücke:

5) $$\left\{\begin{array}{l} \xi = \dfrac{s\delta(\gamma-c)}{s^2+\sigma^2} = \dfrac{s\delta}{\gamma+c}, \\ \eta = \dfrac{\sigma d(\gamma-c)}{s^2+\sigma^2} = \dfrac{\sigma d}{\gamma+c}, \\ \xi^2+\eta^2 = \dfrac{(\gamma-c)^2}{s^2+\sigma^2} = \dfrac{\gamma-c}{\gamma+c}. \end{array}\right.$$

Des Folgenden wegen ist eine Bemerkung in Betreff der Vorzeichen von ξ und η erforderlich. Da stets $\gamma^2 > c^2$, so wird das Vorzeichen des Factors $(\gamma - c)$ durch das von γ bestimmt. Da ferner für beliebige Werthe

des rein imaginären Arguments yi, γ und δ gleiches Vorzeichen haben, so ist $\delta(\gamma-c)$ stets positiv, das Vorzeichen der Coordinate ξ stimmt also stets mit dem von s überein, während das Vorzeichen von η durch das des Productes $\sigma\gamma$ bestimmt wird, da d für jeden Werth des reellen Arguments x positiv bleibt.

Um die Gleichungen der orthogonalen Curvensysteme zu erhalten, welche den Parallelen zu den Rechteckseiten entsprechen, hat man zwischen den Ausdrücken für ξ und η entweder die nur von y abhängigen Grössen σ, γ, δ oder die nur von x abhängigen s, c, d mit Hilfe der Relationen 4) zu eliminiren. Bemerkt man, dass

$$\xi^2+\eta^2-1=-\frac{2c}{\gamma+c}$$

ist, so erhält man leicht:

$$6)\qquad \begin{cases} a. & (\xi^2+\eta^2-1)^2-4\dfrac{c^2}{s^2}\,\xi^2+4\dfrac{k^2c^2}{d^2}\,\eta^2=0, \\[2ex] b. & (\xi^2+\eta^2-1)^2+4\dfrac{k'^2}{\delta^2}\,\xi^2-4\dfrac{1}{\sigma^2}\,\eta^2=0, \end{cases}$$

oder auch in Polarcoordinaten, indem

$$\xi=\varrho\cos\varphi,\quad \eta=\varrho\sin\varphi$$

gesetzt wird:

$$6^*)\qquad \begin{cases} a. & \left(\varrho-\dfrac{1}{\varrho}\right)^2=4c^2\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{s^2}-\dfrac{k^2\sin^2\varphi}{d^2}\right), \\[2ex] b. & \left(\varrho-\dfrac{1}{\varrho}\right)^2=4\left(\dfrac{\sin^2\varphi}{\sigma^2}-\dfrac{k'^2\cos^2\varphi}{\delta^2}\right). \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen enthält nur noch die von dem Parameter x abhängigen Grössen c, s und d, die zweite die von y abhängigen Grössen σ und δ. Dieselben sind also die gesuchten Eliminationsgleichungen. Da x und y reell sind, so variirt s^2 zwischen den Grenzen 0 und 1, σ^2 dagegen zwischen 0 und $\pm\infty$. Da die Gleichungen 6) nur gerade Potenzen von ξ und η enthalten, so sind die Curven symmetrisch in Beziehung auf beide Coordinatenaxen. Aus den Gleichungen 6*) ist leicht ersichtlich, dass jede derselben (abgesehen von dem Grenzfall $s=0$ oder $\sigma=0$) in zwei getrennte geschlossene Zweige zerfällt. Damit nämlich die erste dieser Gleichungen reelle Werthe für ϱ zulasse, muss der auf der rechten Seite in der Klammer stehende Ausdruck positiv oder Null, also

$$7a)\qquad \tan g^2\varphi \leqq \frac{d^2}{k^2s^2}$$

sein. So lange diese Ungleichheit erfüllt ist, liefert die in Beziehung auf ϱ^2 quadratische Gleichung zwei reelle Werthe von ϱ^2, deren jedem zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von ϱ entsprechen. Da die Wurzeln der Gleichung (wenn s nicht gleich Null ist) weder Null noch unendlich werden können, so folgt daraus, dass jedem gegebenen Werthe von s^2 zwei

getrennte geschlossene Curvenzweige entsprechen, welche in den durch obige Ungleichheit bestimmten Winkelräumen liegen. Es mag noch bemerkt werden, dass das Product der beiden Wurzelwerthe, welche die Gleichung 6*) für ϱ^2 liefert, jederzeit der Einheit gleich ist, oder dass die Gleichung ungeändert bleibt, wenn man ϱ mit $\frac{1}{\varrho}$ vertauscht. Es folgt daraus, dass, wenn das ganze Curvensystem durch reciproke Radien in Beziehung auf den um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Halbmesser $r=1$ beschriebenen Grundkreis transformirt wird, jede Curve sich selbst als Bild wieder erzeugt. Diese Eigenschaft haben die Curven 6) mit einem Theil der von Siebeck untersuchten Curvensysteme gemein (vergl. Siebeck a. a. O. § X). Für den Grenzwinkel

$$\varphi_0 = arctang\left(\pm \frac{d}{k\,s}\right)$$

werden beide Wurzeln der Gleichung für ϱ^2 der Einheit gleich. Jeder der beiden Curvenzweige wird also von den unter dem Winkel $\pm\varphi_0$ gegen die Abscissenaxe geneigten Geraden im Punkte $\varrho=1$ berührt. Nach den obigen Bemerkungen über die Vorzeichen entspricht jedem gegebenen Werthe des Parameters x nur einer der beiden in Beziehung auf die y-Axe symmetrisch gelegenen Curvenzweige, und zwar im Allgemeinen, wenn

$$4nK < x < (4n+2)K$$

ist, der auf der Seite der positiven ξ, dagegen wenn

$$(4n-2)K < x < 4nK$$

ist, der auf der Seite der negativen ξ gelegene Curvenzweig.

Auf gleiche Weise überzeugt man sich, dass jede der durch die zweite Gleichung 6*b) dargestellten Curven in zwei getrennte geschlossene Zweige zerfällt, welche in den durch die Ungleichheit

$$7b)\qquad tang^2\varphi > \frac{k'^2\sigma^2}{\delta^2}$$

bestimmten entgegengesetzten Winkelräumen liegen und von den Grenzlinien dieser Winkelräume in den Punkten $\varrho=1$ berührt werden. Jedem Werthe des Parameters y entspricht derjenige der beiden gegen die x-Axe symmetrisch gelegenen Curvenzweige, welche durch das Vorzeichen des Productes σy bestimmt ist, also der auf der Seite der positiven η gelegene Zweig, wenn

$$4nK' < y < (4n+2)K',$$

der auf der negativen Seite gelegene Zweig, wenn

$$(4n-2)K' < y < 4nK'$$

ist. Denkt man sich auf der zu einer Rechteckseite parallelen unbegrenzten Geraden $x=const.$ einen Punkt P beliebig bewegt, so durchläuft sein Bild p den entsprechenden Zweig der Curve 6a) einmal im positiven Sinne,

so oft der Punkt P im Sinne der wachsenden y um die Strecke $4K'$ fortschreitet. Ebenso wird der der Geraden $y = const.$ entsprechende Zweig der Curve 6b) einmal im positiven Sinne durchlaufen, so oft der auf jener Geraden bewegte Punkt im Sinne der wachsenden x um die Strecke $4K$ fortschreitet.

Es bleibt noch übrig, die Grenzfälle

$$s = 0, \quad s = \pm 1, \quad \sigma = 0, \quad \sigma = \pm \infty$$

zu betrachten.

Für $x = 0$ oder im Allgemeinen für $x = \pm 2nK$ wird $s = 0$. Die Gleichung 6a) reducirt sich in diesem Falle auf $\xi = 0$, oder jeder dieser Geraden entspricht als Bild die reelle Abscissenaxe.

Für $y = \pm 2nK'$ wird $\sigma = 0$ und die Gleichung 6b) reducirt sich auf $\eta = 0$.

Für $x = (4n \pm 1) K$ wird $s = \pm 1$, $c = 0$, $d = k'$. Die Gleichung 6a) wird:

$$(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 = 0.$$

Bemerkt man dabei, dass die Ungleichheit 7a) sich in diesem Grenzfall auf

$$tang^2 \varphi \leqq \frac{k'^2}{k^2}$$

reducirt, so ergiebt sich die Curve 6a) in zwei getrennte Theile der mit dem Halbmesser 1 um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kreislinie degenerirt, von denen der eine durch die Punkte $k + k'i$, $k - k'i$, der andere durch die Punkte $-k + k'i$, $-k - k'i$ begrenzt wird, welche 4 Punkte 3) den Eckpunkten des Rechtecks 2) entsprechen. Jeder dieser Kreisbögen entspricht einer der beiden parallelen Rechteckseiten $x = + K$, $x = - K$.

Für $y = (4n \pm 1) K'$ werden σ und δ unendlich. Gleichung 6b) reducirt sich ebenfalls auf:

$$(\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 = 0,$$

stellt aber mit Rücksicht auf die Ungleichheit 7b), da

$$lim. \frac{\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1}{k^2},$$

nur die beiden Kreisbögen dar, für welche

$$tang^2 \varphi \geqq \frac{k'^2}{k^2}$$

ist und welche den beiden Rechteckseiten $y = \pm K'$ entsprechen.

Bezeichnet man nach dem Vorgange von Siebeck als Brennpunkte des durch die Gleichung

$$s = f(w)$$

dargestellten Doppelsystems orthogonaler Curven die Punkte, in welchen

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w} = 0$$

wird, so sind die Punkte 3), welche den Eckpunkten des Rechtecks ent-

sprechen, Brennpunkte des vorliegenden Systems. Dieselben mögen der obigen Reihenfolge nach mit P_1, P_2, P_3, P_4 und die von einem beliebigen Punkte P nach denselben gezogenen Brennstrahlen mit R_1, R_2, R_3, R_4 bezeichnet werden. Sind ξ, η die Coordinaten des Punktes P, so hat man z. B.

$$R_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + 1 = 2k\xi - 2k'\eta,$$

und wenn zur Abkürzung

$$C = \frac{\gamma + c}{2}$$

gesetzt wird, so findet man leicht mit Rücksicht auf die Werthe 5):

$$8)\quad \begin{cases} CR_1^2 = \gamma - ks\delta - k'd\sigma, \\ CR_2^2 = \gamma - ks\delta + k'd\sigma, \\ CR_3^2 = \gamma + ks\delta - k'd\sigma, \\ CR_4^2 = \gamma + ks\delta + k'd\sigma. \end{cases}$$

Multiplicirt man die vier Gleichungen der Reihe nach mit der ersten, so lassen sich die Ausdrücke auf der rechten Seite leicht in die Form von vollständigen Quadraten setzen und man erhält:

$$\begin{aligned} C^2 R_1^2 R_1^2 &= (\gamma - ks\delta - k'd\sigma)^2, \\ C^2 R_1^2 R_2^2 &= (\delta - ks\gamma)^2, \\ C^2 R_1^2 R_3^2 &= (d\gamma - k'\sigma)^2, \\ C^2 R_1^2 R_4^2 &= (d\delta - kk's\sigma)^2. \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich, wenn man die Gleichungen 8) der Reihe nach mit CR_2^2, CR_3^2, CR_4^2 multiplicirt und indem man die Quadratwurzeln auszieht und die Vorzeichen mit Rücksicht darauf bestimmt, dass die Brennstrahlen stets positiv gerechnet werden müssen, findet man folgende äquivalente Proportionen:

$$9)\quad \begin{cases} & R_1 & : & R_2 & : & R_3 & : & R_4, \\ = & \gamma - ks\delta - k'd\sigma & : & \delta - ks\gamma & : & d\gamma - k'\sigma & : & d\delta - kk's\sigma, \\ = & \delta - ks\gamma & : & \gamma - ks\delta + k'd\sigma & : & d\delta + kk's\sigma & : & d\gamma + k'\sigma, \\ = & d\gamma - k'\sigma & : & d\delta + kk's\sigma & : & \gamma + ks\delta - k'd\sigma & : & \delta + ks\gamma, \\ = & d\delta - kk's\sigma & : & d\gamma + k'\sigma & : & \delta + ks\gamma & : & \gamma + ks\delta + k'd\sigma. \end{cases}$$

(Wenn γ und δ positiv sind, so sind, wie man sich leicht überzeugt, die Glieder dieser Verhältnisse stets positiv; wenn γ und δ negativ sind, sind sämmtliche Glieder negativ.)

Aus diesen Proportionen leitet man ferner leicht die folgenden Relationen ab:

$$10)\quad \begin{cases} a. & \dfrac{R_2 + R_1}{R_4 + R_3} = \dfrac{R_4 - R_3}{R_2 - R_1} = \dfrac{1 - ks}{d} = \dfrac{d}{1 + ks}, \\ b. & \dfrac{R_2 + R_1}{R_4 - R_3} = \dfrac{R_4 + R_3}{R_2 - R_1} = \dfrac{\gamma + \delta}{k'\sigma} = \dfrac{k'\sigma}{\gamma - \delta}, \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} a. & \dfrac{R_3+R_1}{R_4-R_2}=\dfrac{R_4+R_2}{R_3-R_1}=\dfrac{1+d}{ks}=\dfrac{ks}{1-d}, \\ b. & \dfrac{R_3+R_1}{R_4+R_2}=\dfrac{R_4-R_2}{R_3-R_1}=\dfrac{\gamma-k'\sigma}{\delta}=\dfrac{\delta}{\gamma+k'\sigma}, \end{cases}$$

Da die mit a bezeichneten Gleichungen nur die Grössen d und s, die mit b bezeichneten nur σ, γ und δ enthalten, so können dieselben als Eliminationsgleichungen betrachtet werden, welche den Curven angehören, die einerseits einem constanten Werthe des Parameters x, andererseits einem constanten Werthe von y entsprechen. In der That gelangt man wieder zu den Gleichungen 6), wenn man die Gleichungen 10), 11) rational macht. In letzterer Form drücken dieselben aber eine merkwürdige geometrische Eigenschaft der Curvensysteme aus: Die Curven erscheinen nämlich als geometrische Oerter der Punkte, für welche die Summe oder Differenz der nach zwei benachbarten Brennpunkten gezogenen Strahlen zur Summe oder Differenz der nach den beiden anderen Brennpunkten gezogenen Strahlen in einem constanten Verhältniss steht. Es ergiebt sich daraus unmittelbar eine Erzeugungsweise der Curven durch zwei Schaaren homofocaler Kegelschnitte, welche um je zwei benachbarte Brennpunkte beschrieben und einander durch die Bestimmung eines constanten Axenverhältnisses zugeordnet werden.

Eliminirt man zwischen der Gleichung

$$6a)\qquad (\xi+\eta^2-1)^2-4\frac{c^2}{s^2}\xi^2+4\frac{k^2c^2}{d^2}\eta^2=0$$

und ihrer Ableitung

$$(\xi^2+\eta^2-1)(\xi d\xi+\eta d\eta)-2\frac{c^2}{s^2}\xi d\xi+2\frac{k^2c^2}{d^2}\eta d\eta=0$$

die von x abhängigen Grössen $\frac{c^2}{s^2}$ und $\frac{c^2}{d^2}$ mit Hilfe der identischen Relation:

$$\frac{d^2}{c^2}-k'^2\frac{s^2}{c^2}=1,$$

so erhält man die allen Curven des Systems 6a) gemeinschaftliche Differentialgleichung, welche nach einigen einfachen Reductionen in der Form erscheint:

$$12)\quad \begin{cases} 2\xi\eta(\xi^2-\eta^2+k'^2-k^2)(d\xi^2-d\eta^2) \\ -d\xi d\eta\,[\xi^4+\eta^4-\sigma\xi^2\eta^2+2(k'^2-k^2)(\xi^2-\eta^2)+1]=0. \end{cases}$$

Zu derselben Gleichung gelangt man, indem man zwischen der Gleichung 6b) und ihrer Ableitung die Grössen σ und δ eliminirt. Dieselbe stellt also die gemeinschaftliche Differentialgleichung der beiden Curvensysteme 6) dar. In der That ist dieselbe in Beziehung auf $\frac{d\eta}{d\xi}$ quadratisch

und liefert für jeden Punkt ξ, η zwei reelle Wurzeln, deren Product -1 ist, wodurch die Eigenschaft der Orthogonalität beider Curvensysteme ausgedrückt wird.

Bezeichnet τ den Winkel, welchen die Tangente im Punkte ξ, η mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, so ist:

$$tang\,\tau=\frac{d\eta}{d\xi},$$

mithin

$$tang\,2\tau=\frac{2d\xi\,d\eta}{d\xi^2-d\eta^2}=\frac{4\xi\eta(\xi^2-\eta^2+k'^2-k^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2-4\xi^2\eta^2+2(k'^2-k^2)(\xi^2-\eta^2)+1}.$$

Es seien α, β, γ, δ die Winkel, welche die vom Punkte P nach den Brennpunkten gezogenen Brennstrahlen mit der positiven Richtung der x-Axe einschliessen. Wird dabei in jedem Brennstrahl die Richtung vom Punkte P nach dem Brennpunkt als positiv betrachtet und werden die von den positiven Richtungen beider Schenkel eingeschlossenen Winkel selbst als positiv oder negativ gerechnet, je nachdem sie oberhalb oder unterhalb der Abscissenaxe liegen, so ist

$$tang\,\alpha=\frac{\eta-k'}{\xi-k},\qquad tang\,\gamma=\frac{\eta-k'}{\xi+k},$$

$$tang\,\beta=\frac{\eta+k'}{\xi-k},\qquad tang\,\delta=\frac{\eta+k'}{\xi+k},$$

woraus folgt:

$$tang\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\frac{4\xi\eta(\xi^2-\eta^2-k'^2-k^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2-4\xi^2\eta^2+2(k'^2-k^2)(\xi^2-\eta^2)+1},$$

oder

$$tang\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=tang\,2\tau,$$

mithin entweder

$$\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

oder

$$\tau=\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

eine Eigenschaft, welche die Curven mit den von Siebeck untersuchten Curven gemein haben.

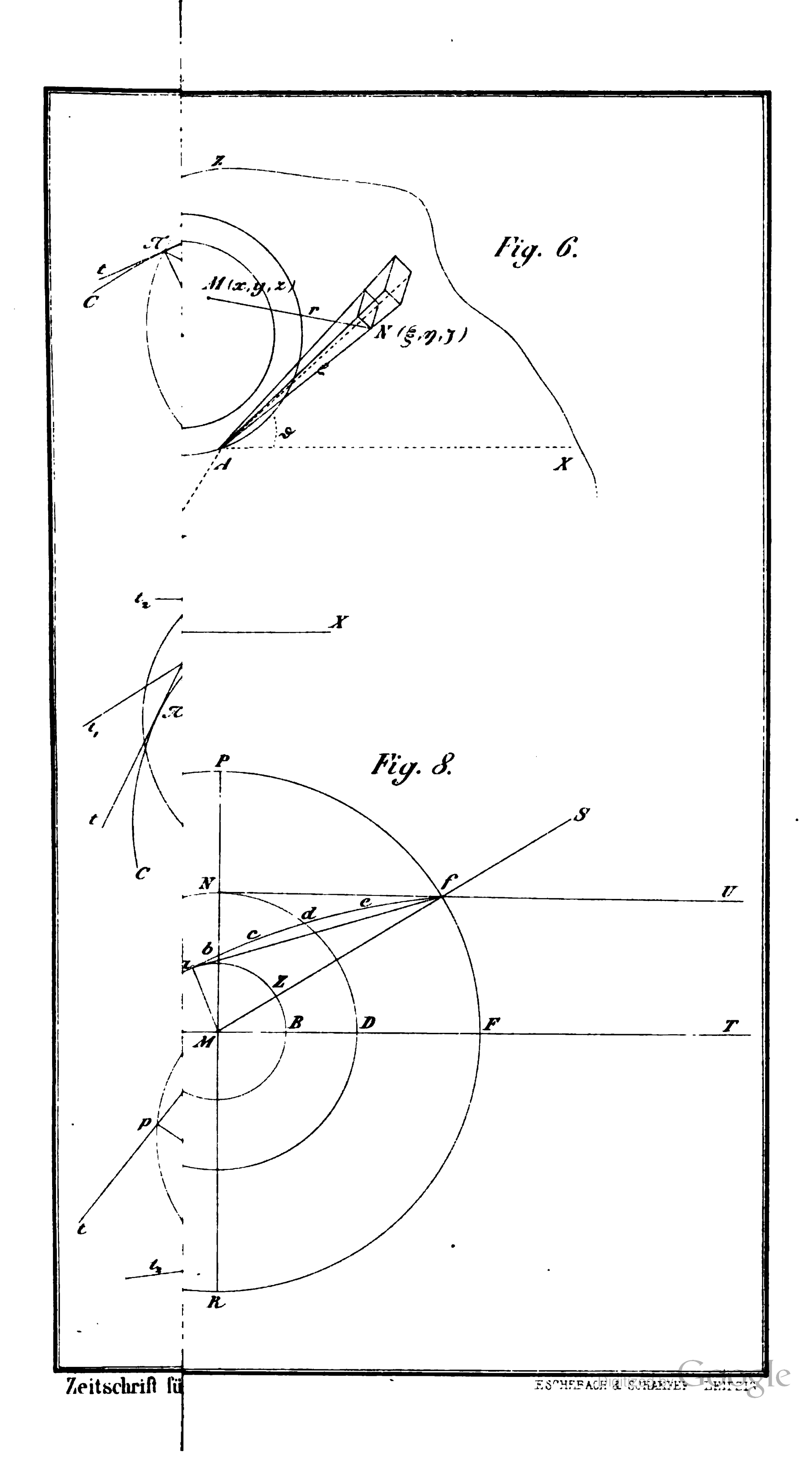
Im Fall eines Quadrats wird $K=K'$ und $k=k'=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Die Gleichungen 6) oder 10), 11) bestimmen auch hier die Curvensysteme, welche den Parallelen zu den Seiten des Quadrats entsprechen. Um die Curven zu erhalten, welche den Parallelen zu den Diagonalen des Quadrats entsprechen, hat man die Coordinatenaxen in der Ebene der x und y den Diagonalen parallel zu legen. Einer Drehung des Coordinatensystems um 45^0 entspricht aber die Multiplication des Arguments $w=x+yi$ mit $\sqrt{i}=1\pm i$. Man hat demnach

$$\xi + \eta i = \frac{1 - \cos am\,(w - w\,i)}{\sin am\,(w - w\,i)}$$

zu setzen, woraus sich nach einigen Reductionen mit Rücksicht auf den Werth des Moduls $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ leicht ergiebt

$$(1 - i)\,(\xi + \eta i) = \frac{\sin am\,w}{\Delta\,am\,w} = \sqrt{2}\cos am\,(K - w).$$

Führt man also auch in der Bildebene der ξ und η ein Coordinatensystem ein, welches gegen das ursprüngliche um 45^0 gedreht ist, so ist ersichtlich, dass die den Parallelen zu den Diagonalen des Quadrats entsprechenden Curvensysteme mit den von Siebeck untersuchten Curven identisch sind, die der Function $\cos am\,z$ für den Modul $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ entsprechen. Zwischen den von Siebeck untersuchten und den oben behandelten Curvensystemen folgt daraus für diesen Werth des Moduls die Beziehung, dass beide einander unter dem constanten Winkel von $\pm \frac{\pi}{4}$ durchschneiden.



E. SCHREBACH & SCHARVEY LEIPZIG

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Vierzehnter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1869.

Inhalt.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von Dr. O. Schlömilch, K. S. Hofrath etc. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner.

Vorrede: In einer zwanzigjährigen Lehrerpraxis hat sich bei mir eine reichhaltige Sammlung grösstentheils neuer Aufgaben und Beispiele aus der höheren Analysis gebildet, deren Veröffentlichung ich hiermit aus zwei Gründen unternehme; einerseits, weil eine beträchtliche Menge von neuem didaktischen Material immerhin willkommen sein wird, andererseits, weil selbst die bekanntesten Werke dieser Richtung sehr empfindliche Lücken zeigen. In der Sohncke'schen Aufgabensammlung z. B. fehlen Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen ganz und gar, von Reihenentwickelungen findet man nur die gewöhnlichen in jedem Lehrbuche stehenden Beispiele, jedoch ohne Angabe der Gültigkeitsgrenzen, die Doppelintegrale sind durch ein einziges Beispiel, dreifache Integrale gar nicht vertreten, die Integration der Differentialgleichungen ist mit völligem Stillschweigen übergangen — kurz, es fehlen gerade diejenigen Partieen, ohne welche man in der Mechanik, mathematischen Physik u. s. w. auch nicht einen Schritt thun kann. Diesen Mängeln dürfte das vorliegende Werkchen abhelfen, jedoch sind dabei die übrigen Theile der Analysis keineswegs stiefmütterlich behandelt worden.

Bei den Aufgaben über die Differentiation entwickelter Functionen einer Variabelen (§§. 2—6) schien es mir zweckmässig, häufig die verschiedenen, zum Ziele führenden Wege anzudeuten und dadurch dem Studirenden die Mittel zur Controle seiner Rechnung an die Hand zu geben, auch habe ich kleine Rechnungsvortheile bei jeder sich darbietenden Gelegenheit erwähnt. In §. 5 findet sich eine Reihe von Fragen, welche den Studirenden zur Uebung in der Transformation cyclometrischer Functionen veranlassen sollen. Die Aufgaben sind übrigens soweit als möglich stufenweis, von leichten zu schwereren fortschreitend,

geordnet; bei der ersten Aufgabe jeder Art ist die Lösung etwas ausführlicher gezeigt, bei den übrigen Aufgaben sind nur, wo es nöthig schien, Andeutungen zur Lösung gegeben. Hier und da wird man auch neue wissenschaftliche Kleinigkeiten finden, wie z. B. in den Abschnitten über isokline Normalen und reciproke Maxima und Minima.

Dem vorliegenden ersten Theile hoffe ich einen zweiten, Aufgaben aus der Integralrechnung enthaltenden Theil rasch folgen zu lassen.

Studien über die Bessel'schen Functionen. Von Dr. EUGEN LOMMEL (gegenwärtig Professor der Physik an der Universität Erlangen). Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner 1868.

Das vorliegende 9 Druckbogen umfassende Werkchen giebt weit mehr, als der bescheidene Titel „Studien" erwarten lässt; es ist vielmehr eine vollständige Monographie der Bessel'schen Functionen, welche letztere bekanntlich bei Störungsrechnungen und in der Wärmetheorie eine hervorragende Rolle spielen. Als Bessel'sche Function der Variabelen z und des Index ν definirt der Verfasser jede Function, welche den folgenden drei Gleichungen genügt

$$1)\qquad f(z,\nu)=\frac{z}{2\nu}\left[f(z,\nu-1)+f(z,\nu+1)\right],$$

$$2)\qquad \frac{d\left[z^{-\frac{1}{2}\nu}f(\sqrt{z},\nu)\right]}{dz}=-\tfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}(\nu+1)}f(\sqrt{z},\nu+1)$$

oder

$$\frac{df(x,\nu)}{dx}=\frac{\nu}{x}f(x,\nu)-f(x,\nu+1),$$

$$3)\qquad \frac{d\left[z^{\frac{1}{2}\nu}f(\sqrt{z},\nu)\right]}{dz}=\tfrac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(\nu-1)}f(\sqrt{z},\nu-1)$$

oder

$$\frac{df(x,\nu)}{dx}=-\frac{\nu}{x}f(x,\nu)+f(x,\nu-1),$$

von denen jede eine Folge der beiden anderen ist. Da ferner diese Gleichungen für $f(x,\nu)=y$ auf die Differentialgleichung

$$4)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

hinauskommen, so kann es nur zwei Arten Bessel'scher Functionen geben, welche durch $\underset{(x)}{J^\nu}$ und $\underset{(x)}{Y^\nu}$ unterschieden werden. Für den Fall,

dass der Index ν weder Null noch eine positive oder negative ganze Zahl ist, lautet das vollständige Integral von Nr. 4

$$y = A\,J^{\nu}_{(x)} + B\,J^{-\nu}_{(x)};$$

ist dagegen ν eine positive oder negative ganze Zahl $= n$, so liefert die vorstehende Formel wegen

$$J^{-n}_{(x)} = (-1)^n\, J^{n}_{(x)}$$

nur ein particuläres Integral und es findet sich dann als vollständiges Integral

$$y = A\,J^{n}_{(x)} + B\,Y^{n}_{(x)}.$$

Hieraus folgt, dass in den Functionen erster Art ν jeden reellen Werth erhalten darf, was der Verfasser zuerst bemerkt und im dritten Abschnitt seiner Schrift sehr geschickt benutzt hat, und dass den Functionen zweiter Art nur für ganze Indices eine Bedeutung zukommt. Hinsichtlich der letzteren Functionen differirt übrigens die Lommel'sche Definition von der Neumann'schen, was seinen Grund darin hat, dass Neumann besonderen Werth auf die Analogie zwischen den Kugelfunctionen und den Bessel'schen Functionen legt; die Lommel'sche Definition hat ohne Zweifel den Vorzug, von anderen Theorien ganz unabhängig zu sein und sich einzig und allein auf die Differentialgleichung 4) zu stützen, sie dürfte daher den Analytikern am besten zusagen.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit den Bessel'schen Functionen erster Art und entwickelt die vielen zum Theil sehr merkwürdigen Eigenschaften derselben, wobei selbstverständlich auch die Mittel zur numerischen Berechnung der genannten Functionen besprochen werden. In gleicher Weise giebt der zweite Abschnitt eine Untersuchung der Bessel'schen Functionen zweiter Art. Von besonderem Interesse dürfte der dritte Abschnitt sein, in welchem gezeigt wird, wie sich verschiedene lineare Differentialgleichungen durch Bessel'sche Functionen integriren lassen. Beispielsweise erwähnen wir die bekannte Riccati'sche Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x^k y = 0;$$

ist hier $\frac{1}{k+2}$ eine gebrochene Zahl, so lautet das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$y = \sqrt{x}\left(A\,J^{\nu}_{(\xi)} + B\,J^{-\nu}_{(\xi)}\right),$$

worin zur Abkürzung

$$\nu = \frac{1}{k+2}, \quad \xi = \frac{2}{k+2}\, x^{\frac{1}{2}k+1}$$

gesetzt ist; wenn dagegen ν eine ganze Zahl ausmacht, so tritt an die Stelle des vorigen Werthes von y der folgende

$$y = \sqrt{x}\left(A \underset{(\xi)}{J^{\nu}} + B \underset{(\xi)}{Y^{\nu}}\right),$$

wo ν und ξ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Die Eleganz dieses Resultates dürfte in die Augen fallen und namentlich zu Gunsten der vom Verfasser gegebenen Definition der Functionen zweiter Art sprechen. Anhangsweis theilt der Verfasser die Hansen'sche Tafel der Functionen erster Art mit und giebt zu deren Gebrauche die nöthigen Erläuterungen.

Das Mitgetheilte wird hinreichen, um der Lommel'schen Schrift, welche sich überdies durch eine sehr klare Darstellung auszeichnet, das Interesse der Mathematiker zuzuwenden.

Schlömilch.

Die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft. Von Dr. J. C. Fresenius, Lehrer a. d. höheren Bürgerschule zu Frankfurt a. M. Wiesbaden, Kreidel's Verl. 1868.

Auf empirisch-psychologischem Wege sucht der Verfasser in der Einleitung die Mittel zu gewinnen, wodurch sich die Frage, wie wir zu den Grundbegriffen der Geometrie gelangt sind, beantworten lässt; an die im ersten Abschnitte gegebene Discussion dieser Frage knüpft der Verfasser im zweiten Abschnitte die Prüfung der Bedingungen, welchen die weitere Verarbeitung und Verbindung dieser Begriffe, namentlich die Gleichsetzung, unterworfen ist, und untersucht endlich im dritten Abschnitte die Mittel zur Ueberzeugung, d. h. die Beweise und deren Zusammenfassung zu einer naturgemässen Methode. Wenn Referent auch nicht sagen kann, dass ihm durch die vorliegende Schrift alle hierher gehörenden Räthsel gelöst worden seien, so muss er dem Verfasser doch die Anerkennung zollen, dass derselbe einen werthvollen Beitrag zur Grundlegung der Geometrie geliefert hat. Seine psychologischen und mathematischen Erörterungen sind durchgängig klar und sogar mit viel stylistischer Eleganz dargestellt; sie verdienen ohne Zweifel eine weitere Discussion, welche hier freilich zu weit führen würde. Nur in mathematischer Beziehung möge erinnert sein, dass Gleichungen wie

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \infty^2 = \frac{1}{3}\infty^3$$

keinen bestimmten Sinn haben und immer durch Grenzenformeln wie

$$Lim\ \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$$

ersetzt werden können und auch ersetzt werden müssen, sobald es sich um Anwendungen derselben handelt.

SCHLÖMILCH.

Theorie der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nebst deren Bahnbestimmung. Von Dr. JOH. FRISCHAUF, Professor an der Universität Graz. Graz, Leuschner und Lubensky, 1868.

Von den Kepler'schen Gesetzen ausgehend entwickelt der Verfasser 1. die Formeln zur Ortsbestimmung eines in bekannter Bahn sich bewegenden Planeten; 2. die Relationen zwischen mehreren Orten einer Bahn; 3. die Relationen, welche einen einzelnen Ort im Raume betreffen; 4. Relationen zwischen mehreren Orten im Raume. Daran knüpfen sich die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen (nach Gauss) und die Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geocentrischen Beobachtungen (nach Olbers). Zufolge des im Vorwort bezeichneten Zweckes: „eine für Jedermann, der sich die gewöhnlichsten Kenntnisse aus der Mathematik angeeignet hat, verständliche Darstellung der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen nebst den hierzu nothwendigen Sätzen der theoretischen Astronomie zu geben", wird man in dem Schriftchen keine neuen Forschungen suchen und nur fragen, ob der Verfasser sein Ziel erreicht hat. Diese Frage dürfte unbedingt zu bejahen sein; die Theorie ist sehr präcis und vollkommen klar auseinandergesetzt und überall durch Zahlenbeispiele erläutert. Namentlich Studirenden, welche sich nicht speciell der Astronomie widmen, aber doch die oben erwähnten Hauptprobleme in gedrängter Darstellung behandelt sehen wollen, möge die vorliegende, nur 50 Seiten zählende Schrift bestens empfohlen sein.

SCHLÖMILCH.

Freie Perspective in ihrer Begründung und Anwendung. Von G. A. PESCHKA, Professor am Polytechnikum zu Brünn, und E. KOUTNY, Privatdocent ebendaselbst. Hannover, Rümpler 1868.

Die Verfasser erwähnen zwar im ersten Capitel die sogenannte Durchschnittsmethode, welche voraussetzt, dass Grundriss und Aufriss des perspectivisch abzubildenden Gegenstandes vollständig gezeichnet vorliegen, gehen aber dann zur sogenannten freien Perspective über und begründen dieselbe durch eine selbständige Theorie der Centralprojection. Hierbei

werden die Aufgaben, welche die descriptive Geometrie mittelst zweier rechtwinkeligen Projectionen zu lösen pflegt (z. B. den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu finden), direct mittelst der Centralprojection behandelt, wodurch in einer sehr grossen Anzahl von Fällen wesentliche Vortheile für die Praxis des perspectivischen Zeichnens gewonnen werden. Anwendungen hiervon geben die Verfasser in sehr reichem Maasse, namentlich werden die perspectivischen Darstellungen ebener und räumlicher Curven, ebener und krummer Flächen nebst den Berührungsebenen der letzteren, die Durchschnitte zweier krummen Flächen etc. ausführlich durchgesprochen. Das letzte Capitel beschäftigt sich mit den Schattenconstructionen; in einem Anhange ist die perspectivische Darstellung architektonischer Gegenstände besonders erörtert, was aus praktischen Rücksichten geschehen sein mag. Das Buch empfiehlt sich durch klare, wenn auch hie und da etwas breite Darstellung ebenso wie durch seine vorzügliche typographische Ausstattung, bei welcher namentlich die in den Text gedruckten 336 Holzschnitte das höchste Lob verdienen. Referent glaubt nicht zu irren, wenn er das vorliegende Werk für das beste neuere Lehrbuch der Perspective erklärt.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 15. November bis 15. December 1868.

Periodische Schriften.

Berichte und Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B. 4. Bd. 4 Heft und 5. Bd. 1. Heft. Freiburg, Diernfellers Univers.-Buchhdlg. 1⅓ Thlr.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. 5. Thl. 1. Heft. Basel, Schweighauser. ¾ Thlr.

Reine Mathematik.

Dölp, H., Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung. Giessen, Ricker. ⅔ Thlr.

Gernerth, A., Grundlehren der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Wien, Gerold. 24 Ngr.

Teirich, V., Lehrbuch der Geometrie. 2. Aufl. Wien, Gerold. 2 Thlr.

Ott, K. v., Grundzüge der neueren Geometrie oder Geometrie der Lage. 2. Ausg. Böhmisch-Leipa, Hamann. 1 Thlr.

Weyr, E., Ueber die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und confocale Systeme solcher Flächen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Matzek, F., Beitrag zur Construction von Berührungsebenen an Rotationsflächen. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Weyr, E., Erweiterung des Satzes von Désargues nebst Anwendungen. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Staudigl, N., Grundriss der Reliefperspective. Wien, Seidel und Sohn. 1 Thlr.

Matzek, J., Construction der Curven bestimmter Beleuchtungsintensität an Rotationsflächen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Schell, A., Allgemeine Theorie des Polarplanimeters. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

Börsch, O, Anleitung zur Berechnung der rechtwinkeligen sphärischen Coordinaten der Dreieckspunkte u. s. w. mit besonderer Rücksicht auf d. trigon. Aufn. d. vorm. Kurf. Hessen. Kassel, Württenberger. ½ Thlr.

HAGEN, G., Ueber die Bewegung des Wassers in Strömen. (Akad.) Berlin, Dümmler. ¼ Thlr.

FRANKENHEIM, M., Zur Krystallkunde. 1. Bd. Charakteristik der Krystalle. Leipzig, Barth. 1⅔ Thlr.

TAIT, F. G., *Sketch of thermodynamics; a treatise of mechanical power of heat.* London, Hamilton. 5 sh.

Physik.

MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 7. Aufl. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg. 5 Thlr.

DOVE, H. W., Ueber den Sturm vom 17. November 1866. Berlin, Dümmler. ⅔ Thlr.

PUSCHL, C., Das Strahlungsvermögen der Atome als Grund der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Körper. Wien, Gerold. 2⅔ Thlr.

DITSCHEINER, L., Ueber die durch planparallele Glasplatten hervorgerufenen Talbot'schen Interferenzstreifen. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

LOSCHMIDT, J., Ableitung eines Potentiales bewegter elektrischer Massen aus dem Potentiale für den Ruhezustand. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

KÖHLER, L., Ueber das Verhältniss der Sonnenlichtstrahlen zu den Erdwärmestrahlen. Mitau, Besthorn. ⅓ Thlr.

HANN, J., Zur Charakteristik der Winde des adriatischen Meeres. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

HANN, J., Die Temperaturabnahme mit der Höhe als eine Function der Windrichtung. (Akad.) Wien, Gerold. ⅕ Thlr.

GOBLET, H., *Theory of light, or how we see and what we see. London, Chapman.* 10 sh.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, von Dr. E. WINKLER, ord. Professor der Ingenieurbaukunde am Polytechnikum in Prag. Erster Theil. Prag, Dominicus.

Je mehr durch die Wirksamkeit der polytechnischen Schulen die Wissenschaftlichkeit der Techniker gehoben wird, desto wichtiger erscheint es, den letzteren Lehrbücher in die Hand zu geben, in denen dieselben nicht blos ein Receptbuch für die Lösung der verschiedenen, ihnen am häufigsten vorkommenden Aufgaben erblicken, sondern aus denen sie die Ueberzeugung schöpfen, dass bei dem raschen Entwickelungsgange der mathematischen Ingenieurwissenschaft nur eine gründliche theoretische Bildung sie gegen die Gefahr schützen kann, mit dem Verschwinden der alten Auflagen jener Bücher auch ihre in der Schule erworbenen Kenntnisse unbrauchbar werden zu sehen.

Der unglückliche und wohl nie endigende Streit zwischen den sogenannten Theoretikern und den sogenannten Praktikern hat seinen Grund gewiss nicht blos in der Unkenntniss oder dem vornehmen Uebersehen der Bedingungen, an welche die wirkliche Lösung der Aufgabe in Bezug auf Zweck und Mittel gebunden ist, sondern auch in dem, grösstentheils durch den Bildungsgang verschuldeten Umstande, dass die Praktiker dem rein theoretischen Resultate nicht genügendes Vertrauen zu schenken vermögen. Man glaubt eben in der Wissenschaft nur dann an Etwas, wenn man es von Grund aus versteht.

Zur Schlichtung dieses Streites, zum Studium der Elasticität und Festigkeitslehre, welche für die Technik eine unbestreitbare Wichtigkeit hat, von dem aber meist eingebildete Schwierigkeiten abzuhalten pflegen, wird das eingangserwähnte ausgezeichnete Buch gewiss in hohem Grade beitragen. Dasselbe setzt als mathematische Bildung nur diejenige, die jetzt an allen polytechnischen Schulen geboten wird, voraus, und indem es an vorhandene Werke und Abhandlungen anschliesst, bietet es auch sehr viel Neues und Anregendes, wie aus der folgenden Inhaltsübersicht erhellt.

Der wissenschaftlichen Anlage entsprechend behandelt der erste Abschnitt die allgemeine Theorie der Elasticität. Im I. Capitel desselben werden die Gleichgewichtsbedingungen der inneren Kräfte, die an einem unendlich kleinen, rechtwinkligen Parallelepiped angreifen, gegeben. Die Untersuchung der Spannungen, welche ein beliebig geneigtes Flächenelement afficiren, führt auf das sogenannte Spannungsellipsoid und auf die in Richtung der Axen des letzteren wirkenden Hauptspannungen. Als wesentlich neu erscheint die Bestimmung der Maximalschubspannungen, die in sechs Ebenen wirkend gefunden werden, von denen jede durch eine Axe des Spannungsellipsoids geht und den von den beiden anderen Axen gebildeten Winkel halbirt.

Nachdem im 2. Capitel die Formänderungen, d. h. die Längenänderungen, sowie die Gleitungen und Volumänderungen parallelepipedischer und kugelförmiger Körperelemente durch die Verrückungen eines ihrer Punkte nach Richtung der Coordinatenaxen ausgedrückt worden, entwickelt das 3. Capitel die Beziehungen zwischen diesen Formveränderungen und den dieselbe hervorbringenden Normalspannungen und Schubspannungen, wodurch man schliesslich zu den Differentialgleichungen für die Formänderungen isotroper Körper gelangt. Auch für anisotrope Körper wird der Gang der Rechnung kurz angegeben.

Im 4. Capitel werden zunächst vom Gesichtspunkte der Moleculartheorie die allgemeinen Beziehungen zwischen den Spannungen und den Formveränderungen entwickelt und dann speciell Körper mit 3 auf einander senkrechten Elasticitätsaxen, mit einer Elasticitätsaxe und endlich isotrope Körper untersucht. Für den Werth m, welcher das Verhältniss der Längenänderung in Richtung der Stabaxe zu der Längenänderung der Querschnittsdimensionen anzeigt, giebt die Moleculartheorie die Zahl 4. Da jedoch derselbe nicht vollständig mit den Versuchswerthen übereinstimmt, so räth der Verfasser, denselben gleich 3 oder 4 zu nehmen, je nachdem einer oder der andere die grössere Sicherheit giebt.

Im 5. Capitel werden die Grundbegriffe der allgemeinen Festigkeitslehre: Elasticitätsgrenze, Bruch, Sicherheit, Grenz- und Festigkeitscoefficient, gegenüber der in dieser Beziehung oft vorkommenden Unklarheit, gesichtet und festgestellt. Neu ist die Einführung der Bezeichnung „Ideale Hauptspannung“ für diejenige Hauptspannung, welche die grösste Längenänderung hervorbringen würde, wenn sie in der Richtung dieser Aenderung wirkte und in anderen Richtungen keine Spannungen wirkten.

Den Inhalt des zweiten Abschnittes bildet die Normal- und Schubelasticität“. Das 5. Capitel entwickelt die Gesetze für die Normalelasticität gerader Stäbe. Neu ist in der Formel für die Zugfestigkeit der Drähte die Berücksichtigung des Umstandes, dass durch die Fabrikation der letzteren sich auf der Oberfläche derselben eine Kruste bildet,

welche fester als der Kern ist. Auch findet sich hier, zum ersten Male, eine Untersuchung zweier sich drückender runder Körper, welche im Eisenbahn- und Brückenbau zu wichtigen Anwendungen Veranlassung giebt.

Im 7. Capitel wird die einfache Schubelasticität besprochen. Nach der strengen Theorie ergeben sich auch hier 2 Hauptspannungen, die in einer auf die Trennungsebene senkrechten und zur Richtung der Kräfte parallelen Ebene unter einem Winkel von 45° gegen die Trennungsebene wirken.

Der dritte Abschnitt behandelt die Biegungselasticität gerader Stäbe im Allgemeinen und enthält viel Neuerungen und Erweiterungen. Als solche sind anzuführen: Ein Satz über die Trägheitsmomente proportionaler Querschnitte, die Bedingung für das Verbleiben der neutralen Axe in der Kraftebene, die Untersuchung über die Grösse der Schubspannungen in irgend einer, zur Axe des Körpers parallelen Ebene, ganz besonders der Schubspannung T_2, welche senkrecht zur Kraftebene wirkt und deren Bestimmung in anderen Lehrbüchern der Elasticität nicht zu finden ist, endlich die Berechnung der, ebenfalls meist stiefmütterlich behandelten transversalen Normalspannung. Im 9. Capitel wird bei der Behandlung der Formänderung des Stabes auch die Deformirung der Querschnitte berücksichtigt. Interessant ist auch die Untersuchung über die Formänderung der Axe bei schiefer Belastung.

Das 10. Capitel bespricht die Bruchfestigkeit der Stäbe. Die Festigkeitsbedingungen innerhalb der Elasticitätsgrenze werden mit grosser Strenge aufgestellt. Es wird aber auch der Versuch gemacht, diese Bedingungen für den Bruch zu benutzen, wobei jedoch statt der Coefficienten K und $\mathfrak{K}$ der zulässigen Inanspruchnahme andere Coefficienten (Bruchcoefficienten) einzuführen sind, die in der Weise von der Querschnittsform und von der Belastung abhängig gewählt werden, dass die innerhalb der Elasticitätsgrenze geltenden Gleichungen auch hier noch ihre Richtigkeit behalten. Diese Abhängigkeit der Bruchcoefficienten wird für proportionale, für symmetrische und für unsymmetrische Querschnitte durchgeführt.

Es folgen nun im vierten Abschnitte die Untersuchungen von durch Transversalkräfte belasteten Stäben. Im 11. Capitel wird die Belastung als bestimmt vorausgesetzt. Ausser den bekannten Fällen findet man hier den gleichförmig belasteten Stab mit überragenden Enden (Anwendung bei Maassstäben für geodätische Basismessungen), sowie den mit einer ungleichförmig vertheilten Last bedeckten Stab über einer Oeffnung.

Capitel 12 behandelt bedingte Belastungsfälle. Die Enden der Stäbe werden horizontal und schief eingemauert vorausgesetzt und die Untersuchung wird auf Stäbe mit variabelem Querschnitte, sowie auf Körper von constanter Festigkeit ausgedehnt.

Die Capitel 13 bis 18 enthalten eine sehr sorgfältig durchgearbeitete Theorie der continuirlichen Träger sowohl mit gleichen als auch mit ungleich langen Feldern. Durch eine grosse Anzahl von Tabellen wird die Anwendung der Resultate sehr erleichtert. Sind auch manche, für den Brückenbau wichtige Belastungsfälle des Raumes halber weggelassen, so findet man dafür einige ganz neue Voraussetzungen sowohl in Bezug auf die Vertheilung der Last, als auch auf die Anordnung der Querschnitte aufgenommen. Hierher gehört z. B. die Belastung des continuirlichen Trägers durch eine isolirte Last, die Untersuchung des Einflusses der Querschnittsveränderlichkeit bei Trägern über 2, 3 und 4 Felder, die Besprechung der continuirlichen Träger von constanter Festigkeit und die Analyse des Einflusses der Stützensenkungen. Als überraschendes Resultat mag hier nur die Thatsache erwähnt werden, dass bei continuirlichen Trägern von constanter Festigkeit über 2 Felder eine Senkung der Mittelstütze gar keinen und bei 3 Feldern nur einen sehr geringen Vortheil gewährt.

In dem fünften Abschnitte, Capitel 19, werden diejenigen Belastungsfälle betrachtet, bei welchen auch centrisch oder excentrisch wirkende Axialkräfte vorkommen. Die theoretischen Formeln werden für Stäbe von constantem und auch von veränderlichem Querschnitt entwickelt, wonach eine Untersuchung über Körper von constanter Knickfestigkeit folgt. Da die entwickelten, rein theoretischen Formeln nur dann anwendbar sind, wenn man die Lage des Angriffspunktes der Axialkraft genau kennt, in der Praxis dies aber nicht immer der Fall ist, so giebt der Verfasser auch eine, vom Angriffspunkte unabhängige theoretisch-empirische Formel an, die mit den bekannten Versuchen von Hodgkinson gut übereinstimmt.

Hierauf folgen in Capitel 20 diejenigen Belastungsfälle, bei denen Axial- und Transversalkräfte zugleich vorkommen. Man findet hier viel neue Resultate, die sowohl in strenger, als auch in für die Anwendung genügend angenäherter Form gegeben werden. Eine sehr interessante Untersuchung enthält §. 195 über die Inanspruchnahmegesetze eines auf einer horizontalen elastischen Unterlage ruhenden und in einzelnen Punkten durch isolirte Gewichte belasteten Balkens. Die Anwendung hiervon findet man z. B. beim Langschwellensystem der Eisenbahnen.

Der sechste Abschnitt beschäftigt sich mit dem Zusammenhange der Querschnittsformen und den Elasticitätsbedingungen der Stäbe. Zunächst wird im Capitel 21 der rechteckförmige Querschnitt untersucht und das Grössenverhältniss zwischen der Hauptspannung und der idealen Hauptspannung festgestellt, sowie auch analysirt, wann die eine und wann die andere als Maximalspannung auftritt. Die Form der Körper gleichen Widerstandes wird nicht, wie man dies gewöhnlich findet, blos speciell für die Normalspannungen, sondern, strenger und allgemeiner, für den jedesmaligen grössten Werth der Hauptspannung bestimmt, wobei das

Maximum der letzteren, je nach dem Verhältniss der Transversalkraft Q zum Biegungsmomente M, entweder in der neutralen Faser, oder in der von der neutralen Axe entferntesten Faser stattfinden kann. Hiernach werden die Formen gleichen Widerstandes complicirter, aber richtiger.

Die Untersuchung über den Einfluss der geneigten Lage des Querschnitts führt auf das Resultat, dass das Biegungsmoment am kleinsten wird, wenn die Diagonale des Rechtecks senkrecht auf der Kraftebene steht. Auch erhält die Biegungsebene die geneigteste Lage, wenn die eine Diagonale vertical steht; die andere Diagonale ist dann senkrecht zur Biegungsebene gerichtet und bildet die neutrale Axe.

Ausserdem wird noch der Werth für die transversale Normalspannung gegeben, der sich sehr klein herausstellt und demnach vernachlässigt werden kann.

Aehnliche Untersuchungen für den elliptischen Querschnitt bilden das 22. Capitel. Hier kann, im Gegensatz zum vorigen Fall, der Werth der in einer Parallelebene zur Längsaxe des Stabes senkrecht zu letzterer gerichteten Schubspannung T_2 eine beträchtliche Grösse erreichen und darf daher nicht vernachlässigt werden.

Hierauf folgt die Analyse einer Reihe von verschiedenen, in der Praxis oft vorkommenden, theils von geraden, theils von krummen Linien begrenzten Querschnittsformen.

Von besonderer Wichtigkeit für die Anwendung und viel Neues enthaltend sind die Capitel 24 bis 27, welche die idealen, d. h. blos aus zwei Gurten bestehenden, ferner die symmetrischen und die unsymmetrischen I-Querschnitte behandeln. Eine Reihe von Resultaten in Bezug auf die constante Festigkeit solcher Träger unter verschiedenen Belastungsverhältnissen, sowie bei verschiedenen Querschnittsconstructionen, unter Zugrundelegung der in den früheren Abschnitten entwickelten strengen Elasticitätslehre, liefern eine bedeutende Erweiterung der Theorie solcher Träger, während die Angaben für die ökonomischeste Construction der letzteren für den Ingenieur von grossem Interesse sind.

Indem im 27. Capitel der untere Gurt $=0$ gesetzt wird, geht ein Theil der für I-Träger gewonnenen Resultate in solche für T-Träger über.

Der siebente Abschnitt enthält die genaue Biegungstheorie gerader Stäbe. Eine ganz allgemeine, genaue Bestimmung der Spannungen und Formänderungen bei gegebener Form und Belastungsweise des Körpers ist bekanntlich zur Zeit noch nicht geglückt. Es müssen daher auch hier solche Annahmen über die Form und die Belastungsweise gemacht werden, welche eine genaue Theorie zulassen.

Es wird daher zunächst vorausgesetzt, dass die äusseren Kräfte nur auf die Endquerschnitte, nicht aber auf die Mantelfläche und das Innere des Körpers wirken und dass die Mittelkraft der auf eine Endfläche wirkenden Kräfte durch den Schwerpunkt derselben gehe. Ferner wird die An-

nahme gemacht, dass auf eine zur Axe des Körpers parallelen Ebene keine andere Spannung wirke, als eine zur Axe des Körpers parallele Schubspannung und dass endlich der Körper prismatisch und symmetrisch in Beziehung auf eine Ebene sei, in welcher die Mittelkräfte der auf die Endflächen wirkenden Kräfte liegen, und aus einer isotropen Masse bestehe. Dieses sogenannte „De Saint-Venant'sche Problem" wird, ähnlich wie dies Clebsch gezeigt hat, gelöst, wobei jedoch die bei der Integration der Differentialgleichungen auftretende und von der Form des Querschnittes abhängige Function Θ nicht blos für den elliptischen Querschnitt entwickelt wird, sondern auch umgekehrt diejenigen Querschnittsformen discutirt werden, welche einer gegebenen Form jener Function entsprechen und demnach auch eine genaue Behandlung zulassen. Auf diese Weise werden einige theoretische Normalfälle geschaffen, welche einen Vergleich mit den gewöhnlich vorkommenden Querschnittsflächen gestatten. Ein solcher Vergleich der durch die genaue und die angenäherte Theorie gefundenen Formeln für die Normal- und Schubspannung, sowie für die Deformation der Querschnitte wird durchgeführt.

Der achte Abschnitt handelt über die Normalelasticität einfach gekrümmter Stäbe. Es ist klar, dass zur Beanspruchung blos auf Normalelasticität eine gewisse Beziehung zwischen der Form der Axe des Körpers und dem Belastungsgesetz existiren muss. Daher findet man hier Untersuchungen über Stützlinie, Kettenlinie, Belastungscurven bei gegebener Stützlinie u. s. w.

Sehr viel Neues sowohl in der Behandlungsweise, als auch in den Resultaten bringt der neunte Abschnitt, welcher von der Biegungselasticität einfach gekrümmter Stäbe handelt. Mit grosser Strenge werden zunächst die genauen Formeln für die Spannungen und Deformirungen entwickelt und daraus die einfacheren, gewöhnlich ausreichenden abgeleitet. Von Vortheil erweist sich die Einführung des Querschnittkernes in die Untersuchung, insofern durch die Lage der Stützlinie in Bezug zu diesem Kerne die Inanspruchnahmen der einzelnen Theile des Querschnittes bedingt werden. Von besonderer Wichtigkeit für die Berechnung von Bogenbrücken ist der §. 295, in welchem, je nach der Lage der Stützlinie gegen die Gurte eines idealen I-förmigen Bogenträgers (Gitterträger), die Inanspruchnahmen der Gurte bestimmt werden, und der §. 296, in welchem die Inanspruchnahme der Träger mit vollem I-Querschnitt (Blechträger) auf die einfacher zu berechnende Inanspruchnahme der idealen I-förmigen Träger zurückgeführt wird.

Als Anwendungen für bestimmte Belastung werden die Berechnungen eines Kettenhakens, eines Kolbenringes und einer Spiralfeder gegeben.

Eine genaue und ausführliche Theorie von Bogenträgern hat es in der deutschen Literatur bis jetzt noch nicht gegeben, während die Unter-

suchungen von Bresse in seiner „*Mécanique appliquée*“ nicht erschöpfend genug sind.

Eine solche Theorie findet man in den Capiteln 35 bis 38 für Bögen mit Kämpfer und Scheitelgelenken, mit Kämpfergelenken allein, sowie auch, zum ersten Male, für Bögen ohne Gelenk mit eingespannten Kämpfern durchgeführt. Die Inanspruchnahmen, sowie die Deformationen werden für flache parabelförmige, kreisförmige und beliebig gekrümmte Bogenträger mit constantem oder veränderlichem Querschnitte, für isolirte sowohl, als auch für gleichförmig vertheilte Belastung untersucht und durch zahlreiche Tabellen, sowie graphische Darstellungen für die Anwendung zurechtgelegt. Wichtige Dienste erweisen hierbei die vom Referenten zum ersten Male angewandten Kämpferdrucklinien, sowie die vom Verfasser eingeführten Kämpferdruckumhüllungslinien, welche beide eine dankbare Anwendung der Construction zur Erleichterung der Rechnung gestatten.

Das 39. Capitel behandelt den Einfluss der Temperatur auf Bogenträger. Diese Untersuchungen sied, ebenso wie die über ringförmige Körper im 40. Capitel, nach den früheren Aufsätzen des Verfassers bearbeitet und enthalten die von demselben gefundenen neuen Resultate.

Den Schluss des Buches bildet ein Anhang, in welchem einige, bei der Berechnung der gekrümmten Träger häufig vorkommende Integral- und Reihenformeln, sowie eine kleine Anzahl von goniometrischen Tabellen gegeben werden.

Somit enthält dieser erste Band alle diejenigen Theile der Elasticitätslehre, die hauptsächlich für den Bauingenieur und den Architekten von Wichtigkeit sind. Der zweite Theil soll die übrigen, für die Technik wichtigen Theile der Elasticitätstheorie behandeln.

Uebrigens bildet der erste Band ein für sich abgeschlossenes Ganzes und kann nach Obigem sowohl den Studirenden als auch den ausübenden Technikern und Baumeistern aufs Wärmste empfohlen werden.

In Bezug auf die Fortsetzung des Werkes, deren baldiges Erscheinen lebhaft zu wünschen ist, mag hier noch schliesslich der Wunsch nach einer strengern Correctur des Drucksatzes und einer etwas eleganteren Ausführung der Tafeln ausgesprochen werden.

Dr. W. Fränkel,
Geprüfter Ingenieur und ord. Lehrer am Polytechnikum zu Dresden.

Das Strahlungsvermögen der Atome, als Grund der physikalischen und chemischen Eigenschaften der Körper, von Carl Puschl, Capitular des Benedictinerstiftes Seitenstetten. 324 S. Wien, Gerold.

Der Verfasser giebt in diesem Buche eine, wenn auch noch nicht in allen Beziehungen vollendete, so doch sehr reichhaltige Ausführung einer neuen, die Constitution der körperlichen Materie betreffende Hypothese,

welche die Beachtung der Physiker im höchsten Grade verdient, da durch dieselbe einerseits viele Erscheinungen einfacher als nach den herrschenden Meinungen erklärt werden, andererseits aber auch viele bisher gar nicht oder nur ungenügend gelöste Räthsel hier eine klare Lösung finden. Der beschränkte Raum gestattet nur einige Andeutungen über die Grundgedanken zu geben.

Der Verfasser geht von dem Verhältniss der Körperatome zum Aether aus und stellt jene nicht als absolut untheilbar, sondern als vom Aether allseitig umgebene, für denselben aber undurchdringliche Continua hin. Der Aether als ein elastisches Fluidum muss auf jedes von ihm umschlossene Atom von allen Seiten einen Druck ausüben, und diese Wechselwirkung der Atome und des Aethers ist das Fundament, auf welches alle weiteren Entwickelungen gebaut sind. Sie macht die herrschende Ansicht, dass die Atome auch an und für sich eine Wirkung auf einander ausüben, vollkommen überflüssig, und dies ist entschieden als ein Hauptvorzug der neuen Hypothese anzuerkennen, da jene Ansicht immer unbegreiflich bleiben wird. Die unleugbaren Beziehungen, welche zwischen den Atomen eines Körpers bestehen und welche zur Annahme von Anziehungs- und Abstossungskräften zwischen den Atomen geführt haben, erweisen sich vielmehr auf eine ungezwungene Weise als Folgen jener Wechselwirkung. Dass nun durch die Aufhebung eines Theiles von der Grundlage der verbreiteten Anschauung auch die Resultate, zu denen der Verfasser gelangt, den verbreiteten theilweise widersprechen müssen, versteht sich von selbst; aber deshalb die neue Hypothese als unhaltbar zurück zu weisen, würde um so weniger gerechtfertigt sein, als die Annahme von den Atomen als solchen innewohnenden Kräften nicht das bietet, was man von ihr fordern muss. Denn einerseits hat letztere mit einer Reihe von neuen Ergebnissen der Experimentalforschung nicht in Einklang zu treten vermocht, andererseits sind alle Versuche, daraus den gasförmigen Zustand der Materie vollständig zu erklären, bis heute unzulänglich geblieben.

Mit Recht geht daher der Verfasser bei der Entwickelung seiner Hypothese von den Gasen aus, prüft an ihnen die Richtigkeit allgemein theoretischer Folgerungen, und an der Hand der erhaltenen Resultate unternimmt er dann eine Betrachtung der das Volumen bestimmenden Kräfte in flüssigen und festen Körpern. Dass dabei aus mancher bisher als Ausnahme behandelten Erscheinung ein allgemeines Gesetz hervorgeht, und umgekehrt Sätze, denen man bisher eine allgemeine Geltung zuschrieb, nur als specielle Fälle erscheinen, kann denjenigen nicht befremden, welcher mit der Geschichte der Wissenschaften vertraut ist. Vielmehr liegt eine wohlthuende Erweiterung der Anschauung darin, wenn z. B. aus der Hypothese des Verfassers folgt, dass die bekannte Entdeckung Fizeau's am Jodsilber keine vereinzelte Thatsache ist, sondern dass es unter bestimm-

ten Bedingungen Körper geben kann, auf welche die Wärme zusammenziehend wirkt.

Gerade dieses letztere Ergebniss verschafft der neuen Hypothese eine noch weitergreifende Bedeutung, indem sie ein klärendes Licht auf die Veränderungen der Grösse und Gestalt und den Lauf der Kometen wirft. Die bereits von Arago als allgemein angenommene und seitdem vielfach bestätigte Thatsache, dass die Kometen bei Annäherung zur Sonne sich zusammenziehen und bei Entfernung von derselben sich ausdehnen, erhält so wohl die einfachste aller denkbaren Erklärungen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Darstellung eine klare und übersichtliche ist.

Dresden, den 28. December 1868.

Dr. Gustav Hoffmann.

Physik, für den Schulunterricht bearbeitet von Prof. Dr. L. Kambly. 171 Seiten mit 161 Abbildungen. Breslau, Hirt.

Der Verfasser hat ebenso, wie jeder Lehrer der Physik, erkannt, dass ein den Bedürfnissen und Anforderungen der Schule entsprechender Leitfaden der Physik fehlt, trotzdem dass sich eine Unzahl von Machwerken neuerdings diesen Titel angemasst haben, welche anstatt dem Schüler zu nützen, ihm einen doppelten Schaden zufügen, indem sie denselben einerseits denkfaul machen und andererseits ihm eine unnöthig hohe Geldausgabe verursachen. Jenem Mangel abzuhelfen, ist das genannte Werkchen des Verfassers ganz geeignet. Es zeigt auf jeder Seite den erfahrnen Pädagogen, und als Hauptvorzüge heben wir besonders die Uebersichtlichkeit und den logischen Zusammenhang hervor, beides Eigenschaften, die, so nothwendig sie sind, doch selbst in sehr verbreiteten Lehrbüchern der Physik vergebens gesucht werden.

Dabei wollen wir für eine zweite Auflage des Werkchens nicht unerwähnt lassen, dass einige der Abbildungen hätten durchaus wegbleiben können, da sie Apparate darstellen, die zum physikalischen Unterrichte unbedingt vorhanden sein müssen. Dafür aber hätten die biographischen Notizen wenigstens insofern erweitert werden können, dass bei den bedeutendsten Physikern, wie z. B. bei Galilei, nicht nur das Todesjahr, sondern auch Zeit und Ort der Geburt und der Schauplatz ihrer Thätigkeit angegeben wurde.

Dresden, den 31. December 1868.

Dr. Gustav Hoffmann.

Lehrbuch der Physik für Realanstalten und Gymnasien, sowie zum Selbstunterricht, von Prof. Dr. Greiss. 2. Aufl., Wiesbaden.

Der Verfasser hat im Titel dieses Buches entschieden einen Missgriff gethan. Ein Buch, welches zum Selbstunterrichte bestimmt ist, kann nicht

zugleich ein vorzügliches Schulbuch sein und umgekehrt. Ferner ist das physikalische Lehrziel der Realschulen so sehr von dem der Gymnasien verschieden, dass nicht ein und dasselbe Buch beiden Anstalten genügen kann. Referent ist jedoch nach genauer Durchsicht des Werkes zu der Ueberzeugung gelangt, dass dasselbe zum Selbstunterrichte empfohlen werden kann. Freilich hätte auch in Rücksicht auf diesen Zweck Manches klarer dargestellt werden sollen. So wird, um nur ein Beispiel anzuführen, nach der Darstellung des Verfassers jeder Laie zu der irrigen Vorstellung gelangen, dass die auf der Glasscheibe einer Elektrisirmaschine erregte Elektricität durch die Zuleiter auf den Conductor übergeführt werde, zumal da er durch das, was über die Influenzelektrisirmaschine (höchst unpassender Name!) von Holtz gesagt ist, darin bestärkt wird. Hier hätte das elektrische Verhalten von Spitzen und Kanten vorausgehen sollen, um die Ladung des Conductors als das Resultat einer Influenz zu erkennen.

Dresden, den 3. Januar 1869.

Dr. Gustav Hoffmann.

Bibliographie

vom 15. December 1868 bis 15. Februar 1869.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1867. Berlin, Dümmler. 9⅓ Thlr.

Mathematische Annalen, herausgeg. von A. Clebsch und C. Neumann. 1. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 5⅓ Thlr.

Berliner astronomisches Jahrbuch für 1871 mit Ephemeriden der Planeten (1).—(105) für 1869. Herausgeg. von W. Förster unter Mitwirk. von Powalky u. Becker. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch für 1871 zur Bestimmung von Länge, Breite und Zeit zur See mittelst astronomischer Beobachtungen. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

Annalen der Sternwarte zu München. 6. Supplementband (Meteorologische Beobachtungen von 1857 — 1866 und Resultate daraus). München, Franz. 1⅔ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, herausgeg. von C. Jelinek und C. Fritsch. Neue Folge, 3. Bd. Jahrg. 1866. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. 4. Bd., No. 1. Wien, Braumüller. pro compl. 2⅔ Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie u. Geographie. Redigirt von E. Heis. Neue Folge. 12. Jahrg. No. 1. Halle, Schmidt. pro compl. 3 Thlr.

Annuario marittimo per l'anno 1869, *compilato presso l'I. R. governo centrale marittimo.* 19. *annata.* Triest, liter.-artist. Anstalt. 1⅓ Thlr.

Reine Mathematik.

Bremiker, C., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalen. Neue Ausg. 3. Lief. (Schluss.) Berlin, Nicolai. 12½ Ngr.

Féaux, B., Buchstabenrechnung und Algebra. 5. Aufl. Paderborn, Schöningh. 17½ Ngr.

DIENGER, J., Die Sätze von Bürmann und Lagrange. Prag. Calvesche Univers-Buchhandlung. ⅓ Thlr.

HERMES, Ueber eine Gattung von geradlinigen Flächen vierten Grades. Berlin, Weber's Verl.-Conto. 8 Ngr.

FÉAUX, B., Lehrbuch der elementaren Planimetrie. 4. Aufl. Paderborn, Schöningh. ¾ Thlr.

WITTSTEIN, TH., Lehrbuch der Elementarmathematik. II. Band, 2. Abth. Stereometrie. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 21 Ngr.

ROTTOK, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Hamburg, Jowien. ½ Thlr.

Angewandte Mathematik.

WOLF, R., Taschenbuch für Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 4. Aufl. Zürich, Schulthess. 1½ Thlr.

WALTER, A., Ueber die Anwendung der Hamilton'schen Methode auf die Grundgleichungen der mathematischen Theorie der Elasticität. Berlin, Calvary u. Comp. 16 Ngr.

WEISBACH, J., Der Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln etc. 5. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr. 4 Ngr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 2. Theil: Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen. 4. Aufl. 11. u. 12. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

Physik.

LANG, V. v., Einleitung in die theoretische Physik. 2. Lieferung. (Schluss.) Licht. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

MÜLLER-POUILLET, Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 7. Aufl. 2. Band. Braunschweig, Vieweg. 5 Thlr.

SPILLER, PH., Grundriss der Physik. 4. Aufl. Berlin, Heymann's Verlag. 2 Thlr.

HUGGINS, W., Ergebnisse der Spectralanalyse in Anwendung auf die Himmelskörper. Deutsch mit Zusätzen v. W. Klinkerfues. 2. Abdr. Leipzig, Quandt u. Händel. ⅔ Thlr.

TYNDALL, J., Der Schall. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Helmholtz und G. Wiedemann. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

LOSCHMIDT, J., Die Elektricitätsbewegung im galvanischen Strome. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

OETTINGEN, A. v., Meteorologische Beobachtungen angestellt zu Dorpat im Jahre 1867. Dorpat, Gläser. 18 Ngr.

HIRN, G. A., *Théorie mécanique de la chaleur. Conséquences philosophiques et metaphysiques de la thermodynamique.* Leipzig, A. Dürr. 10 *frcs.*

Literaturzeitung.

Recensionen.

Der Schall. Acht Vorlesungen gehalten in der Royal-Institution von JOHN TYNDALL. Autorisirte deutsche Ausgabe, herausgegeben durch H. Helmholtz und G. Wiedemann. 8. 404 Seiten. Mit 169 in den Text gedruckten Holzstichen. Preis 2 Thaler. Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn in Braunschweig.

Nach dem allgemeinen Beifall, welchen schon das erste Werk dieses Verfassers „Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung" in seiner deutschen Uebertragung gefunden hat, durfte man dem Schall mit ziemlichen Erwartungen entgegensehen; um so mehr ist es gewiss ein nicht zu unterschätzendes Zeichen, dass man sagen kann, es wird ihn Niemand ohne hohe Befriedigung aus der Hand legen.

Wenn auch der Natur der Sache nach in der Akustik nicht leicht Gedanken von so welterschütternder Bedeutung, wie in der Wärme, vorgeführt werden können, Gedanken, wie dieselbe das Princip von der Erhaltung der Kraft und dessen Consequenzen enthalten, so kann man dafür vielleicht dem „Schall" den Vorzug vor der Wärme zugestehen, dass er pädagogisch insofern viel werthvoller ist, als bei der geringeren Schwierigkeit des Gegenstandes weniger grosse Anforderungen an die Aufmerksamkeit und Intensität der Vorstellung der Leser gestellt zu werden brauchten. Nur das erste Capitel, in welchen davon gesprochen wird, dass man die aus der Newton'schen Formel berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles noch mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten der specifischen Wärme der Luft bei constantem Volumen multipliciren müsse, um die wahre Schallgeschwindigkeit in der Atmosphäre zu erhalten, macht hiervon zum Theil eine Ausnahme und ist, wenigstens für ein Laienpublikum, sehr abstrakt. Vielleicht hat aber der Verfasser geglaubt, damit den Eindruck der Einleitung etwas abschwächen zu müssen, denn der Versuch, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch eine Reihe von Molekülen durch eine Reihe von Knaben zu versinnlichen, von denen der hinterste einen Stoss erhält, den dieser auf den nächsten u. s. f. überträgt, bis der erste endlich

infolge dieses Stosses vorn überfällt, kann weder sehr schlagend genannt werden, noch wird man ihm den Charakter des Possenhaften ganz nehmen können. — Wo man aber sonst hinblickt im ganzen Werk, allerorts findet man nur neue Beweise, dass man es in Tyndall mit einem Meister wissenschaftlicher Darstellung, mit einem der besten Lehrer seines Faches zu thun hat. Die schwierigsten und complicirtesten Erscheinungen und Theorien versteht er mit der ihm eigenthümlichen Klarheit auseinander zu setzen und auf das Vorzüglichste durch das Experiment anschaulich zu machen.

In dem verhältnissmässig kleinen Raum findet man fast alle Theile der Akustik abgehandelt, welche auch für Nichtfachleute Interesse haben. Dabei stützt sich der Verfasser überall auf die neuesten Arbeiten und zeigt eine ausserordentliche Vertrautheit mit den classischen Untersuchungen von Helmholtz, und selbst die neuen experimentellen Untersuchungen Hundt's auf akustischem Gebiete findet man sehr vollständig vor.

Nach dem Erscheinen des Epoche machenden Helmholtz'schen Werkes: „Die Tonempfindung" hat man bekanntlich von vielen Seiten die Klage über dasselbe gehört, dass für den Musiker zu viel Physikalisches, für den Naturforscher aber zu viel rein Musiktheoretisches darin enthalten sei und vielleicht aus dem Grunde hat das sonst durchaus nicht schwer verständliche Werk, selbst in den dabei interessirten Kreisen, nicht die allgemeine Verbreitung gefunden, die man seinem inneren Werthe nach hätte erwarten müssen.

Hier im „Schall" findet man den grössten Theil der Resultate der Helmholtz'schen Untersuchungen, soweit sie mit Physik in unmittelbarer Beziehung stehen, und zwar in einer sehr leicht fasslichen und höchst anziehenden Darstellungsform. Alle diejenigen aber, zumal Naturforscher im Allgemeinen, praktische und theoretische Musiker, Instrumentenbauer etc., welche die Mühe bis jetzt gescheut haben, an die „Tonempfindung" selbst heranzugehen, mögen zuerst einmal Tyndall's „Schall" vornehmen. Dieser wird dem Geschmacke eines Jeden zusagen, Jeder wird ihm mit gespannter Aufmerksamkeit folgen und Niemand wird ihn ohne Nutzen gelesen haben.

Vielleicht wird zumal Musikern und ganz jungen Studirenden der „Schall" eine willkommene Einleitung in die Akustik sein und sie werden, wenn sie ihn gelesen haben, wahrscheinlich von selbst das Bedürfniss fühlen, sich in die bedeutungsvollen Untersuchungen zu vertiefen, welche in der „Tonempfindung" niedergelegt sind.

Aber nicht nur dem nicht physikalischen Theile des Publikums ist der „Schall" zu empfehlen, sondern auch den der Wissenschaft Angehörigen kann man ihn aus vielen Gründen als eine höchst vortheilhafte Lectüre anrathen.

Die Kunst des Experimentirens versteht Tyndall in seltenem Grade und zwar die Kunst des Experimentirens in der besten Bedeutung des Wortes. Ihm dient das Experiment überall nur, aber auch im vollkommensten Masse, zur Versinnlichung und zum Beweis, nirgends findet man den Versuch als eine unorganische, neben dem Vortrag liegende Zugabe zu demselben oder in der Form der kleinlichen Spielerei. Viele Versuche sind dabei entweder ganz neu oder in neue Formen gebracht, so dass gewiss jeder Lehrer der Physik das Buch mit Vortheil benutzen können wird.

Erinnern wir uns an den kläglichen Zustand, in welchem sich der experimentelle Theil unserer Wissenschaften in Deutschland nicht nur an den Mittelschulen, sondern zum Theil auch an den Hochschulen befindet, so kann man gewiss nicht angelegentlich genug darauf hinweisen, sich diese Art Experimentalphysik vorzutragen zum Muster zu nehmen.

Die Experimente müssen beim physikalischen Unterricht die Säulen sein, auf denen sich die Hypothesen, Gedanken aufbauen, und diese müssen den ersteren die richtige Verbindung zu einem grossen zusammengehörigen Ganzen verleihen.

Auch in Beziehung auf Darstellung weicht der Schall vortheilhaft von dem sonst bei naturwissenschaftlichen Auseinandersetzungen gebräuchlichen trockenen Tone der Abhandlung ab, wenn auch nicht zu verkennen ist, dass, wenigstens für unseren deutschen Geschmack, die Diction einigemal beinahe über die Grenze des erlaubten Schwunges hinaus an die Phrase heranstreift.

Selbst die Eigenthümlichkeit, dass die Vorlesungen wirklich ganz solche geblieben sind, verleiht dem Ausdrucke eine Frische und gestattet eine Präcision, welche zumal dem Nichtfachmann sehr anziehend sein wird. —

Der „Schall“ ist leichfasslich und doch ist er sogar in höherem Grade als die „Wärme“ wissenschaftlich streng, und zeichnet sich in dieser Hinsicht von den vielen seichten Arbeiten sogenannter populärer Schriftsteller aus; es sind das bekanntlich meist nicht den streng wissenschaftlichen Branchen Angehörige oder gar Dilettanten, welche glauben, alle halbverdauten wissenschaftlichen Studien sofort als populären Zeitungsartikel oder „Vorlesung für gebildetes Publikum“ wieder von sich geben zu müssen.

Das Streben nach Verallgemeinerung und Verbreitung zumal naturwissenschaftlicher Kenntnisse ist ein ganz richtiges, nur sollte es Solchen überlassen bleiben, welche in dem Vorhandenen die gehörige Auswahl zu treffen wissen, und deren wissenschaftliche Leistungen für die Solidität des Gegebenen eine gewisse Garantie gewähren.

Nach den eben hervorgehobenen grossen Vorzügen des besprochenen Werkes ist es mit um so grösserem Danke anzuerkennen, dass eine

deutsche Uebersetzung veranstaltet worden ist und zwar eine Uebersetzung vorzüglichster Art. Wer es nicht weiss, dass es eine Uebersetzung ist wird es nach dem Styl und Ausdrucke gewiss nicht erkannt haben; nach Vergleich mit dem Original können wir aber versichern, dass trotzdem die Uebersetzung eine sehr treue ist.

Die Ausstattung ist, dem Vieweg'schen Verlag entsprechend, in jeder Beziehung musterhaft. Um so auffälliger aber ist es, dass für die Diagramme, welche die Dissonanz der Intervalle graphisch darstellen, Fig. 152 und 153, pag. 367 und 368, einfach die Figuren 52A und B der Helmholtz'schen „Tonempfindung" wieder benutzt sind, welche Theile enthalten, die zum Text des „Schalles" in gar keinen Beziehungen stehen, während doch Tyndall im Original: „*On Sound*" Fig. 152 und 153 pag. 305 und 306 ganz richtig die seinen Auseinandersetzungen allein entsprechenden Theile der Helmholtz'schen Figuren gegeben hat.

Schon der Umstand, dass zwei unserer grössten Naturforscher der deutschen Ausgabe ihren Namen vorgesetzt und sich der letzten Correctur der Uebersetzung unterzogen haben, kann dem deutschen Publikum eine Sicherheit für die Bedeutendheit des Werkes sein.

Mögen auch diese Zeilen dazu beitragen, dem Werke die allgemeine Verbreitung verschaffen zu helfen, die es verdient.

Carlsruhe, 1. März 1869.

Dr. Richard Rühlmann.

Theorie der Cylinderlinsen von Prof. F. E. Reusch. 35 Seiten mit zwei Figurentafeln. Leipzig, Teubner 1868.

Die kleine Schrift des berühmten Verfassers füllt eine recht fühlbare Lücke unserer physikalischen Lehrbücher auf eine ausgezeichnete Weise aus, eine Lücke, die in neuerer Zeit um so fühlbarer geworden ist, eine je höhere, praktische Bedeutung die Cylinderlinsen erhalten haben. Von dem Brechungsgesetze, den Linsen und der Brechung des Lichtes an paraboloidischen Flächen ausgehend, betrachtet der Herr Verfasser vorerst diejenige paraboloidische Linse, an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen zusammenfallen, geht dann über zu derjenigen, an welcher die Hauptschnitte der Grenzflächen einen beliebigen Winkel bilden und kommt so in naturgemässer Fortschreitung zu den Cylinderlinsen selbst, deren Behandlung das Ganze abschliesst. Die Darstellung zeichnet sich durch schlichte Einfachheit aus, so dass auch für diejenigen, welche nur der elementaren Mathematik mächtig sind, das Verständniss der Schrift nicht die geringste Schwierigkeit bietet.

Der Elektromagnetismus, insbesondere als Triebkraft, sowie mehrere neue elektromagnetische Maschinen, Wagen und Locomotiven von Prof. Dr. J. F. Roloff. 192 S. mit 8 Tafeln. Berlin 1868.

Die grossen, übereilten Hoffnungen, welche man anfangs an die elektromagnetischen Maschinen knüpfte, mussten bekanntlich sehr bald aufgegeben werden, als man wahrnahm, dass die Speisung dieser Maschinen viel kostspieliger sei, als die der Dampfmaschinen, und dass dadurch selbst der Vortheil des geringeren Anlagekapitals mit verloren gehe. Die Techniker kümmerten sich seitdem wenig um die praktische Verwerthung der elektromagnetischen Maschinen; sie machten dieselbe einzig und allein abhängig von der Erfindung einer billigeren Kraftquelle, welche sie von der Chemie erwarteten, und thaten wenig für die Verbesserung einzelner Maschinentheile, wodurch der Nutzeffect allerdings hätte gesteigert werden können.

Die obige Schrift nun sucht von Neuem die Aufmerksamkeit der Techniker auf die Elektromagneto-Mechanik zu lenken, und es wird Niemand leugnen können, dass Roloff's Maschinen den älteren gegenüber wesentliche Verbesserungen aufweisen. Sehr wünschenswerth aber wäre es gewesen, wenn Herr Roloff an seinen Maschinen auf Beobachtungen gegründete Rechnungen angestellt hätte über das Verhältniss des Aufwandes zum Nutzeffect. Uebrigens ist die Schrift populär gehalten und für diejenigen, welchen die Kenntniss der elektromagnetischen Erscheinungen und Gesetze mangelt, eine belehrende Einleitung vorausgeschickt.

Einleitung in die theoretische Physik von Prof. Viktor v. Lang. 400 S. Braunschweig, Vieweg 1868.

Wir haben das Unternehmen des Herrn Verfassers, eine Einleitung in die theoretische Physik zu schreiben, mit Freuden begrüsst, weil damit einem von Tag zu Tag immer fühlbareren Mangel in der physikalischen Literatur abgeholfen werden konnte. Leider müssen wir aber, nachdem wir das Buch, in alle Wege seinen Zweck im Auge behaltend, genau durchgelesen haben, gestehen, dass unsere Erwartungen nicht ganz befriedigt worden sind. Einmal sehen wir nicht ein, warum der Herr Verfasser sich auf die Capitel: Mechanik, Schwere, Magnetismus, Electricität und Licht beschränkt hat; zum anderen will es uns an mehreren Stellen dünken, als ob der Herr Verfasser ganz vergessen habe, für wen er schreibt. In dieser Hinsicht durften mehrere Figuren besonders in der zweiten Hälfte des ersten Heftes unbedingt nicht fehlen und die Darstellung musste weniger springend sein. Ganz unverzeihlich aber ist es, dass dem zweiten Hefte kein Druckfehlerverzeichniss beigegeben ist. Denn als vor Jahresfrist das erste Heft erschien, worin dergleichen Mängel mehr als billig zu finden waren, entschuldigten wir es im Stillen

damit, dass der Herr Verfasser vielleicht durch irgend welche Verhältnisse an einer genauen Correctur verhindert gewesen sei, und dem war auch so, wie aus der mit dem zweiten Hefte erschienenen Vorrede hervorgeht. Wir hofften indess sicher, dass das Versäumte nachgeholt werden würde, und das ist nicht geschehen, wodurch nun dem Anfänger das Studium des Buches wesentlich erschwert ist, um so mehr, als viele der Druckfehler auf S. 97, 110, 111, 141, 142, 148, 153, 155, 168, 211 u. s. f. höchst störend sind.

Ueberhaupt scheint der Herr Verfasser Druckfehlerverzeichnisse wenig zu beachten; denn wie hätte er sich sonst auf S. 105 so erheblich irren können? Dort heisst es nämlich: „G (die Beschleunigung der Schwere in einer gewissen Tiefe unter der Erdoberfläche) ist also (nämlich nach Airy) grösser als g (die Acceleration an der Oberfläche), und es ist nicht $G < g$, wie in einem neueren Lehrbuche der Experimentalphysik auseinandergesetzt ist.“

Dies zielt zweifellos auf Wüllner's bekanntes Werk, in welchem sich wirklich im Texte diese Verwechslung der Buchstaben G und g vorfindet, die aber im Druckfehlerverzeichnisse berichtigt ist.

Schliesslich wünschen wir, dass es dem Herrn Verfasser gefallen möge, in einem dritten Hefte das Versäumte nachzuholen.

Dresden, 21. Februar 1869.

Dr. G. Hoffmann.

Bibliographie

vom 15. Februar bis 15. April 1869.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie d. Wissensch. Jahrg. 1869. 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 2 Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie d. Wissensch. 1868, II. 3. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome XII, Nr. 4, 5; Tome XIII, Nr. 1, 2. Leipzig, Voss. 2 Thlr. 11 Ngr.

Repertorium der mathematischen, naturwissenschaftl. und technischen Journal-Literatur. Herausg. v. Schotte. 1. Jahrg. (1869). 1. Heft. Leipzig, Quandt und Hendel. pro compl. 3 Thlr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle, fortges. v. Borchardt. 70. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl 4 Thlr.

Annalen der Physik und Chemie. Herausgeg. v. Poggendorff. Jahrg. 1869. 1. Heft. Leipzig, Barth. pro compl. $9\frac{1}{3}$ Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgeg. v. C. Bruhns. III. Jahrg., 3. und 4. Heft. Leipzig, Engelmann. à $\frac{1}{3}$ Thlr.

Supplementheft zur Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. Neue Hilfstafeln zur Reduction der in der *histoire céleste française* enthaltenen Beobachtungen, von E. v. Asten. Ebendas. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

Annalen der Münchener Sternwarte. 7. Supplementband. München, Franz. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Annalen der Sternwarte in Leiden. Herausgeg. von F. Kaiser. 1. Bd. Haag, Nijhoff. 6 Thlr.

Reine Mathematik.

NEUMANN, K. W., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Barmen, Langewiesche. 28 Ngr.

WÖCKEL's Beispiele und Aufgaben zur Algebra. 5. Aufl., verm. und verb. von Th. Schröder. Nürnberg, Bauer und Raspe. 6 Ngr.

TEGETTHOFF, A. v., Compendium der Differential- u. Integralrechnung. Triest, Essmann. 3 Thlr.

BRETSCHNEIDER, C. A., Beiträge zur Geschichte d. griechischen Geometrie. Gotha, Thienemann. 6 Ngr.

BEEZ, R., Die Elemente der Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie). Plauen i. V., Neupert. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

SCHWEDER, G., Lehrbuch der Planimetrie. Riga, Bacmeister. $12\frac{1}{2}$ Ngr.

KORTUM, H., Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn, Weber. $\frac{2}{3}$ Thlr.

WÖCKEL's Geometrie der Alten, in einer Sammlung von 850 Aufgaben, neu bearb. von Th. Schröder. 8. Aufl. Nürnberg, Bauer u. Raspe. 18 Ngr.

DILLING, A., Algebraisch-trigonometrische Untersuchungen über die regulären Vielecke. Halle, Schmidt. $1\frac{1}{3}$ Thlr.

SCHLESINGER, J., Darstellung der Collinearprojectionen und projectivischen Grundgesetze in einer für die descript. Geom. geeigneten Form. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

—— Die projectivischen Flächen. Ebendas. 2 Ngr.

STAUDIGL, R., Anwendung der räumlichen Central- und Parallelprojection zur Lösung verschiedener, die Flächen zweiten Grades betreffender Probleme. Ebendas. 6 Ngr.

—— Durchführung verschiedener, die Curven zweiten Grades betreffender Constructionen mit Hilfe von Kegel- und Cylinderflächen. (Akad.) Ebendas. 5 Ngr.

WEYR, E., Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

HERTZER, H., Die geometrischen Grundprincipien der Perspective. Berlin, Nicolai. 12 Ngr.

RUBINI, R., *Elementi di calcolo infinitesimale. Parte I. Calcolo differenziale. Napoli.* (Turin, Löscher.) 5 l.

WAGENINGEN, F. VAN, *Théorie des pôles, des polaires et des plans polaires par rapport des surfaces du second degré. La Haye, Belinfante frères.* 75 c.

Angewandte Mathematik.

SCHELL, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. 2. Liefg. Leipzig, Teubner. 28 Ngr.

WAND, Th., Ueber die Elasticität der festen Körper und die optischen Erscheinungen. München, literarisch-artist. Anstalt. 2 Thlr. 4 Ngr.

BEER, A., Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität. Herausgeg. v. A. Giesen. Leipzig, Teubner. 1⅙ Thlr.

BOLTZMANN, L., Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

AUWERS, A., Untersuchungen über die Beobachtungen von Bessel und Schlüter am Königsberger Heliometer zur Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni. Berlin, Dümmler. 1 Thlr.

STRUVE, O., Beobachtungen des grossen Kometen v. 1861. Leipzig, Voss. 17 Ngr.

Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss d. J. 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. Nr. 1. Beobachtungen von Dr. E. Weiss. Nr. 2. von Dr. Oppolzer. Nr. 3. Spektralbeobachtungen von Riha. Nr. 4. Littrow's Methode der Zeitbestimmung. Wien, Gerold. 18½ Ngr.

DOMKE, J., Nautische, astronomische und logarithmische Tafeln etc. 5. Aufl. Berlin, Geh. Oberhofbuchdruckerei. 1⅙ Thlr.

Physik.

DITSCHEINER, L., Ueber eine neue Methode zur Untersuchung des reflectirten Lichtes. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

GYLDÉN, H., Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. (2. Abhandlung.) Leipzig, Voss. ⅓ Thlr.

OETTINGEN, A. v., Meteorologische Beobachtungen, angestellt zu Dorpat im Jahre 1868. Dorpat, Gläser. 18 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

C. A. Bretschneider, **Beiträge zur Geschichte der griechischen Geometrie.** Programm des herzoglichen Gymnasium Ernestinum zu Gotha. Ostern 1869.

Dass Referent sich jedesmal freut, wenn ein neuer Beitrag zu denjenigen Untersuchungen in die Oeffentlichkeit gelangt, welche ihn selbst mit Vorliebe beschäftigen, ist leicht erklärlich; ein doppelt freudiges Gefühl erweckt es aber, wenn wieder ein neuer Anhänger solcher Ansichten an den Tag tritt, welche noch immer theilweise bestritten werden, wenn durch das Gewicht neuer Gründe und neuer Vertreter derselben die wahre Anschauung auch an Wahrscheinlichkeit gewinnt. Mit solcher doppelten Freude haben wir das uns vorliegende Programm begrüsst, den Vorläufer einer ausführlichen „Geschichte der griechischen Geometrie und Geometer“, mit welcher der Verfasser uns hoffentlich bald beschenken wird. In dem gegenwärtigen Programme sind fünf Punkte aus jener Geschichte besprochen: der angebliche Geometer Euphorbos, welches als Beiname des Pythagoras sich enthüllt; die Isoperimetrie als nicht nachweislich bei Pythagoras; der Ursprung der indirecten Beweise vor der Zeit des Euclid; die Methode der Höhenmessung des Thales, und als erster und am ausführlichsten behandelter Gegenstand: der Charakter der ägyptischen Geometrie. Nur aus dieser ersten Abhandlung wollen wir kurz berichten, um unsere Uebereinstimmung mit dem Verfasser zu bestätigen, um einen bevorstehenden Controlbeweis anzukündigen. Herr Bretschneider macht zuerst darauf aufmerksam, dass, wenn auch ganz zweifellos die Geometrie aus Aegypten herstamme, die Meinung, als sei sie durch die infolge der jährlichen Nilüberschwemmungen nothwendige Wiederholung der Landesvermessung entstanden, nur gemäss einer Hypothese des Herodot bei den Griechen sich verbreitete, ohne selbst ägyptisch zu sein. Er zeigt weiter, dass die ägyptische Geometrie im Wesentlichen Reisskunst war, dass sie praktische Regeln zum Berechnen von Längen und Flächen enthielt, dass ihr die den Griechen vielfach noch eigenthümlichen Einzelbetrachtungen in so und so vielen Fällen entstammt, dass endlich die Form derselben uns

in den griechischen Elementen erhalten ist. Mit allen diesen Behauptungen sind wir durchaus einverstanden und haben selbst zu wiederholten Malen Aehnliches ausgesprochen. Herr Bretschneider wünscht ferner, die Auffindung eines Papyrus möge uns endlich schwarz auf weiss mit der ägyptischen Mathematik bekannt machen. Hier sind wir in der Lage, ihn zu ergänzen. Dem gelehrten Verfasser scheint nämlich entgangen zu sein, dass ein solcher geometrischer Papyrus existirt und dass alle Hoffnung vorhanden ist, denselben bald in autographirter Vervielfältigung zu besitzen. Wir verweisen dafür auf den Aufsatz: *Geometric Papyrus by S. Birch* in der Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde von Professor Lepsius. 1868. September und October. S. 108—110. Dieses geometrische Werk ist unter König Ra-aa-usr verfasst auf Grundlage älterer Untersuchungen; die hieratischen Schriftzüge und die Qualität des Papyrus weisen auf eine Zeit, die nicht höher hinaufliegt, als die XX. Dynastie. Eine untere Zeitgrenze giebt Herr Birch nicht an, auch nicht in einem Briefe über denselben Gegenstand, mit welchem er uns beehrte; vielleicht dürfte darnach die Vermuthung begründet sein, Herr Birch halte die XX. Dynastie selbst für die Abfassungszeit. Diese Könige regierten aber (nach Brugsch) von 1288—1110 vor Chr. Geb.!!! Der kurze Auszug, welchen Herr Birch in der genannten Notiz veröffentlicht, stimmt nun in seinem Wesen durchaus mit der sogenannten heronischen Geometrie überein, d. h. also mit den Ansichten, welche Herr Bretschneider entwickelt hat.

CANTOR.

Leibnitz und die Differentiation mit beliebigem Index. Wenn es das Kennzeichen des wahren Erfinders einer Wissenschaft ist, überall in derselben seine Spuren zurückgelassen zu haben, überall die Fundgrube werthvoller Dinge eröffnet zu haben, so ist Leibnitz, abgesehen von chronologischen Streitfragen, der einzige Urheber des Infinitesimalcalcüls. Man kann in der That kaum eine Frage besprechen, deren Beantwortung in das Gebiet dieser Wissenschaft fällt, ohne die Vorarbeiten bei Leibnitz zu finden. So ist es auch allgemein anerkannt, dass Leibnitz schon die Vergleichung der Differentiation mit der Potenzirung zum Gegenstande seiner Ueberlegung gemacht hat, dass er mit dem Briefe an Joh. Bernoulli vom Mai 1695 ebenso den Grund zum gegenwärtigen Operationscalcül legte, wie die Anfänge jener Theorie schuf, welche man als Differentiation mit beliebigem Index zu benennen pflegt. Zwei italienische Gelehrte haben sich in der jüngsten Zeit um die Geschichte dieser Untersuchungen bemüht, die Herren Tardy und Genocchi. Ersterer veröffentlichte im Junihefte 1868 des *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche* des Prinzen Boncompagni einen Aufsatz unter dem Titel: „*Intorno ad una formola di Leibniz*“, Letzterer legte der Turiner Akademie am 10. Januar 1869

eine Arbeit vor, welche die Ueberschrift führt: „*Di una formola del Leibniz e di una lettera di Lagrange al Conte Fagnano*“. Beide Abhandlungen lassen den Verdiensten des deutschen Gelehrten gleiche Gerechtigkeit widerfahren, indem die einschlagenden Stellen aus dem Briefwechsel Leibnitzens mit Bernoulli sowohl, als mit L'Hopital vollständig abgedruckt und erläutert werden; beide Abhandlungen führen dann später zu Lagrange über, welcher in seiner Erstlingsarbeit vom 23. Juli 1754 dieselbe Formel nachentdeckte und dem Grafen Fagnano mittheilte. Sowohl Lagrange als Fagnano waren damals mit der Leibnitz'schen Untersuchung unbekannt, so dass der Brief des jungen kaum 18jährigen Gelehrten alsbald veröffentlicht wurde. Die Exemplare dieses Abdrucks sind sehr selten, so dass es nur dankbar anzuerkennen ist, dass Herr Genocchi der genannten Abhandlung den Lagrange'schen Brief im italienischen Originaltexte beifügte. Als der Brief bereits in die Oeffentlichkeit gedrungen war, erfuhr Lagrange erst, dass seine vermeintliche Entdeckung ihm bereits vorweggenommen war, und er selbst erkannte 1772 in den Memoiren der Berliner Akademie dieses Verdienst Leibnitzens in einer Beide ehrenden Weise an. Aus der Abhandlung des Herrn Tardy ist noch hervorzuheben, dass er die Richtigkeit der Leibnitz'schen Formel:

$$D^\mu uv = u.D^\mu v + (\mu)_1.Du.D^{\mu-1}v + (\mu)_2.D^2u.D^{\mu-2}v + (\mu)_3.D^3u.D^{\mu-3}v + \ldots$$

auch für gebrochene und negative μ durch einen bisher noch nicht veröffentlichten Beweis begründet. CANTOR.

Der Constructeur. Ein Handbuch zum Gebrauche beim Maschinenentwerfen von F. REULEAUX. Dritte Auflage, 1869, bei Vieweg & Sohn.

Die neue Auflage dieses bekannten Buches enthält in ihrer erschienenen ersten Lieferung manche Zusätze und Bereicherungen, von denen § 11 über Scheerfestigkeit in der neutralen Axe, § 12 über Träger mit gemeinsamer Belastung, § 19 über Festigkeit der Gefässwände, § 20 über Federn (auch Kautschuk), § 63 über Schraubenschlüssel, § 64 über Schraubenverbindungen, §§ 68—70 über Keilverbindungen und Sicherungen, und § 71 über Nietformen zu erwähnen sind.

Besonders aber hat das Handbuch durch die in dem zweiten Abschnitte gegebenen Hilfslehren aus der Graphostatik gewonnen. Dieser neue Wissenszweig ist in kurzer Zeit auf den meisten deutschen polytechnischen Schulen eingeführt worden. Seine Anwendung auf viele Constructionsfälle des Maschinenbaues hat der Verfasser schon in der letzten Auflage des „Constructeur“ durchgeführt und wenn die graphostatische Methode noch nicht die ihr gebührende Beachtung bei den Praktikern gefunden hat, so lag dies jedenfalls an dem Mangel eines geeigneten kurzen Leitfadens zur Erlernung der so einfachen Elemente dieser Methode. Diesem Mangel hel-

fen die §§ 21—53 des „Constructeur" ab, in welchen klar und fasslich die wichtigsten Sätze aus der graphischen Arithmetik und dann die Zusammensetzung, Zerlegung, sowie das Gleichgewicht von Kräften mit Hilfe von Kraft- und Seilpolygonen behandelt werden. Zahlreiche Anwendungen der Methode auf einfache Beispiele aus dem Gebiete des Maschinen- und Bauwesens zeigen die Kürze und Uebersichtlichkeit des Verfahrens.

Dr. W. Fränkel.

Stereoskopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte von Dr. Chr. Wiener, Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe.

Durch die Veröffentlichung dieser stereoskopischen Photographien seines sorgfältig ausgeführten Gypsmodells wird Herr Professor Wiener gewiss sehr viele Fachgenossen angenehm überraschen, welche das so merkwürdige System der 27 Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung interessirt. Sie sind sehr gut gelungen und zeigen den wesentlichsten Theil der Fläche mit seinen eigenthümlichen Biegungen und Oeffnungen in trefflicher Plastik; sie bringen das Modell in zwei etwa um einen Quadraten verwendeten Stellungen zur Abbildung, so dass man sich sehr deutlich die Gesammtanschauung des Modells bilden kann, welches aus einem Würfel von etwa ½ Meter Seite geschnitten ist.

Die Erläuterungen sind kurz und zweckentsprechend; sie beschreiben die Construction des Modells, zunächst die der 27 Geraden; dann die der 16 in gleichen Winkelabständen gelegenen Kegelschnitte, die als Schnitte der Fläche mit Ebenen durch eine dieser Geraden zu Erzeugenden derselben gewählt wurden; endlich die von drei äquidistanten Horizontalschnitten der Fläche. Die Notiz, dass Gypsabgüsse des Modells (Preis 50 Fl.) durch Herrn Professor Wiener übermittelt werden können, ist sicherlich Vielen willkommen; denn den Besitz eines solchen Modells werden die Photographien sicherlich mehr noch wünschen lassen, als ersetzen. Das System der 27 Geraden mit seinen 135 Schnittpunkten kann nicht wohl in den gewohnten Dimensionen der stereoskopischen Photographie zu voller Deutlichkeit gebracht werden.

Rücksichtlich der Construction eines Modells ist vielleicht ein kurzer Bericht von Nutzen über Art und Entstehung eines Drahtmodells desselben Systems der 27 Geraden und der Fläche, das ich seit 1865 besitze.

Mein Streben nach einem solchen Modell ward im Sommer 1861 durch die mehrseitigen Mittheilungen in den „*Comptes rendus*" der Pariser Akademie lebhaft erregt und ich unternahm im Ferienmonat zunächst die Berechnung des ganzen Systems nach der Schläfli'schen Doppelsechs. Ich suchte eine solche Anordnung zu erlangen, dass die 135 Schnittpunkte des

Systems in einem Parallelepiped von nicht zu ungleichen Dimensionen untergebracht und zugleich in den einzelnen Geraden selbst so vertheilt wären, dass die Abstände der zehn Punkte unter einander nirgends zu klein ausfielen, um bei der für eine Zeichnung nöthigen Reduction darstellbar zu bleiben; ich wollte sodann zwei grosse stereoskopische Centralprojectionen des Systems construiren und dieselben, wenn ich ihre Combination zur räumlichen Anschauung nicht zu schwierig fände, vervielfältigen lassen; ich hatte mich gewöhnt, ohne Vermittelung des Stereoskopenkästchens zu combiniren und war durch grössere Dimensionen der Bilder, als dasselbe sie erlaubt, nicht gestört gewesen. Aber es glückte mir bei dreimaliger Berechnung des ganzen Systems nicht, jene Ziele zu erreichen und ich verzichtete ermüdet. Aus dem laufenden (X.) Bande des „*Quarterly Journal of Mathematics*“ (pag. 58—71), wo Sir A. Cayley eine solche Berechnung mittheilt, ersehe ich, dass auch ihm das nicht gelungen ist; ich benutze den Anlass, auf seine Formeln aufmerksam zu machen, wer etwa die Berechnung unternehmen möchte. Mit den Vorbereitungen zur deutschen Bearbeitung von G. Salmon's „*Treatise on the analytic geometry of three dimensions*“, besonders mit der Ausarbeitung des zweiten Theiles (Leipzig, Teubner 1865), während deren ich nach Prag übersiedelte, kam ich auf das Vorhaben zurück, jedoch nicht auf den Plan der Berechnung, Construction und stereoskopischen Combination zweier Centralprojectionen des Systems; es ward nun auf dem Wege der Modellirung ausgeführt, freilich mit Verzicht auf die volle durch Rechnung und Construction erreichbare Genauigkeit, doch aber mit sehr befriedigendem Erfolg.

Der Assistent der darstellenden Geometrie am Prager Polytechnikum, Herr R. Morstadt, als geschickter Constructeur und Modelleur durch seine relief-perspectivischen Modelle auch weiter bekannt, löthete nach meinen Angaben aus 27 geraden schwachen Drähten — nachdem es nach einigen Versuchen gelungen war, eine genügende Anordnung auszuprobiren — das System zusammen. Es wurden an einen Stab a_1 die 5 Stäbe b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 angelöthet, die Lagen der zweiten Transversalen der Gruppen von je einer derselben, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 und der gemeinschaftlichen Transversale b_1 dieser letzteren 5 sorgfältig ermittelt; dann war es leicht, die 15 Geraden c_{ik} durch Einvisiren zu bestimmen, da sie als Durchschnitte der Paare von Ebenen $a_i b_k$, $a_k b_i$ erhalten werden. (Vergl Analytische Geometrie des Raumes II, §. 293.) Nach der festen Verlöthung wurden die Stäbe a, b, c roth, schwarz und weiss respective gefirnisst und mit Ziffertäfelchen versehen. Sehr leicht knüpfte sich dann hieran die Darstellung der Fläche. Durch eine der Geraden c ward ein ebener Schnitt der Fläche einvisirt, die 16 Punkte an den das gewählte c nicht schneidenden Stäben markirt und durch einen schwachen Messingdraht der verbindende Kegelschnitt dargestellt, um so die doppeltberührende Ebene zur Anschauung zu bringen. Sodann wurden parallel dieser Ebene und annähernd äquidistant in glei-

cher Weise 9 weitere Querschnitte der Fläche einmodellirt, Curven dritter Ordnung, die durch die Schnittpunkte der Visirebene mit den 27 Geraden sehr ausreichend gegeben waren. Sie zeigen sehr schön den Uebergang der verschiedenen Formen dieser Curven in einander und durch das System von Kegelschnitt und Gerade hindurch.

So giebt das Modell als Stabmodell doch die vollständige Anschauung der Fläche mit ihren höchst merkwürdigen Oeffnungen. Es ist circa 0,6 Meter breit, lang und hoch. Ich habe es immer ganz vortrefflich brauchbar gefunden, um die allgemeinen Anschauungen der Theorie algebraischer Flächen daran zu verdeutlichen; seine Genauigkeit reicht dafür völlig aus. Ich habe gelegentlich ein Paar der Steiner'schen conjugirten Trieder markirt, ich habe die Doppelpunkte der Involutionen auf den Geraden einer dreifach berührenden Ebene bestimmt und dadurch anschaulich gemacht, wie solche sechsparabolische Punkte der Fläche in derselben Ebene viermal zu dreien in einer Geraden liegen etc.

Die verhältnissmässige Leichtigkeit der Herstellung macht eine Wiederholung derselben behufs Bildung von Varietäten und Specialfällen möglich; vielleicht regt diese Mittheilung mehrfach dazu an. Möge sie wenigstens nicht verfehlen, für die Modelle und Photographien des Herrn Professors Wiener vielseitig Interesse zu erwecken.

Fluntern bei Zürich. W. Fiedler.

Bibliographie

vom 15. April bis 15. Juni 1869.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Bayr. Akademie der Wissenschaften. 10. Bd., 2. Abtheil. München, Franz. 4 Thlr.

Sitzungsberichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Classe. 1868, III. Leipzig, Hirzel. ⅙ Thlr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Aus dem Jahre 1868. Bern, Huber & Comp. 1⅕ Thlr.

Annalen der Sternwarte zu Leiden, herausgegeben von F. Kaiser. 1. Bd. Haag, Nijhoff. 10 Fr.

Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde. Herausgegeben von Ph. Carl. 5. Bd., 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. 6 Thlr. 12 Ngr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. H. Guthe. 18. Jahrg., 2. Heft, Juli — December 1868. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅙ Thlr.

Reine Mathematik.

Hankel, H., Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Antrittsrede. Tübingen, Fues. ⅙ Thlr.

Ehrlenholtz, A., Ueber die Lösung der binomischen Gleichung. Celle, Schulze. 3 Ngr.

Lehmann, W., Geometrische Formenlehre. Berlin, Akademische Buchhandlung. 3 Ngr.

Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, bearbeitet von C. Bremiker. 52. Aufl. Berlin, Weidmann. 1¼ Thlr.

Müller, E., Elemente der Geometrie, streng systematisch dargestellt. 1. Theil: Grundvorstellungen; 2. Theil: Formenlehre. Braunschweig, Vieweg. ⅚ Thlr.

NIEMTSCHIK, R., Ueber die Construction der Durchschnitte von Kreisen mit Kegelschnitten (Akad.). Wien, Gerold. 4 Ngr.

WEYR, E., Construction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven (Akad.). Wien, Gerold. 3 Ngr.

NIEMTSCHIK, R., Einfaches Verfahren, um durch ausserhalb liegende Punkte Normalen zu Flächen zweiter Ordnung zu ziehen (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

FISCHER, E., Ueber äquidistante Niveaucurven Aarau, Sauerländer. ¼ Thlr.

Angewandte Mathematik.

BRUHNS, C., J. F. Encke, sein Leben und Wirken. Leipzig, Günther. 2⅙ Thlr.

CHRISTOFFEL, E. B., Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke (Akad.). Berlin, Dümmler. 1 Thlr.

BOLTZMANN, L., Lösung eines mechanischen Problemes (Akad.). Wien, Gerold. 2 Ngr.

Physik.

HULLMANN, C., Die repulsive Kraft des Aethers. Jever, Wettcker und Söhne. ⅓ Thlr.

ZEHFUSS, G., Die kosmische Bedeutung der Aerolithen, namentlich gegenüber der Sonne, den Eiszeiten und dem Magnetismus der Himmelskörper. Frankfurt a. M., Hermann-sche Buchhandlung. 3 Ngr.

FAURO, J., Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss von 1868, angestellt von den Vätern der Gesellschaft Jesu zu Manila auf den Philippinen. Brief an P. Secchi. Halle, Schmidt. ⅙ Thlr.

Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss des Jahres 1868 nach Aden unternommenen österreichischen Expedition. 5. Bericht. Beitrag zur Klimatologie von Aden. Von E. Weiss. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

ANGSTRÖM, A. J., *Recherches sur le spectre solaire.* Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1868.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Aerodynamik.

1. *On the dynamical theory of gases.* Maxwell. *Phil. Mag.* XXXV, 129, 185.

Analytische Geometrie der Ebene.

2. Weitere Betrachtungen über das ebene Dreieck. Grunert. Grun. Archiv XLVIII, 465, 473. [Vergl. Bd. XII, Nr. 188.]
3. Ueber zwei merkwürdige Punkte des Dreiecks. Grunert. Grun. Archiv XLVIII, 37.
4. *Cercle roulant autour un autre, dont le rayon n'est que la moitié de celui du premier.* Niébylowski. *N. ann. math.* XXVII, 37.
5. Ueber die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problems von der Duplication des Würfels verwenden lassen. Matthiessen. Grun. Archiv XLVIII, 229.
6. Ueber eine gewisse Klasse von Curven dritten Grades. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 263.
7. Ueber eine besondere Art der Conchoïden. Külp. Grun. Archiv XLVIII, 97.
8. *Sur les lignes spiriques.* De la Gournerie. *Compt. rend.* LXVI, 283.
9. *Sur une involution spéciale du quatrième ordre et son application aux lignes spiriques.* De la Gournerie. *Compt. rend.* LXVI, 832.
10. *Sur les courbes considérées comme enveloppes d'une droite.* Dyrion. *N. ann. math.* XXVII, 176.
11. Bedeutung und Eigenschaften der Curve $r = a \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}$. Streckly. Grun. Archiv XLVIII, 109.

Vergl. Ellipse. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung. Parabel. Quadratur.

Analytische Geometrie des Raumes.

12. *Propriété des secteurs, nommant secteur tout corps terminé d'une part par une surface conique de l'autre par une surface quelconque.* Laisant. *N. ann. math.* XXVII, 88.

Vergl. Ellipsoid. Geodätische Linien. Hyperboloid. Kugel. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung.

Astronomie.

13. *Comparaison de la théorie de la lune de Mr. Delaunay avec celle de Mr. Hansen.* Newcomb. *Compt. rend.* LXVI, 1197.

Vergl. Geschichte der Mathematik 43.

B.

Bestimmte Integrale.

14. *Sur une intégrale double de Gauss.* *Le Cordier.* *Compt. rend. LXVI*, 707.
15. Bemerkungen über einige bestimmte Integrale. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 250.

Binomialformel.

16. *Démonstration directe de la formule de Moivre.* *Lemonnier.* *N. ann. math. XXVII*, 284.

C.

Chronologie.

17. Zwei wichtige chronologische Regeln. Maercker. Grun. Archiv XLVIII, 8.

Complanation.

18. Ableitung der Complanationsformel in Polarcoordinaten aus der Figur. Unferdinger. Grun. Archiv XLVIII, 106.

D.

Determinanten.

Vergl. Mechanik 77.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

19. Ueber die Bedingungen, dass vier Punkte auf einem Kreise und fünf Punkte auf einer Kugelfläche liegen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 261.
   Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 94.

Differentialgleichungen.

20. *Sur les équations différentielles du premier ordre.* *Radau.* *Compt. rend. LXVI*, 904.
21. *On the integration of the general linear partial differential equation of the second order.* *Moon.* *Phil. Mag. XXXV*, 118, 219.
22. *Note relative à l'intégration d'une équation différentielle remarquable.* *Allégret.* *Compt. rend. LXVI*, 1144. — *J. A. Serret & Liouville ibid.* 1174. — *Picart ibid.* 1192.

E.

Elasticität.

23. Ueber die Formveränderung prismatischer Stäbe durch Biegung. Peschka. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 38.
24. *Sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique.* *Mathieu.* *Compt. rend. LXVI*, 530.
25. *Choc longitudinal de deux barres élastiques, dont l'une est extrèmement courte ou extrèmement roide par rapport à l'autre.* *De Saint-Venant.* *Compt. rend. LXVI*, 650.
26. *Solution en termes finis du problème du choc longitudinal de deux barres élastiques en forme de tronc de cône ou de pyramide.* *De Saint-Venant.* *Compt. rend. LXVI*, 877.

Electricität.

27. Die mathematische Bestimmung der Vertheilung der Electricität auf Conductoren im Allgemeinen und speciell auf gewisse Systeme von Conductoren, die von Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe begrenzt sind. Kötteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 121.

Ellipse.

28. Merkwürdige Eigenschaft derjenigen Curve, welche vom Brennpunkte einer Ellipse beschrieben wird, wenn diese auf einer Geraden rollt. Spitzer. Grun. Archiv XLVIII, 235.

29. *Théorème sur l'ellipse et deux cercles osculateurs.* *Pellet.* *N. ann. math. XXVII,* 40.
Vergl. Maxima und Minima 74.

Ellipsoid.

30. Punktweise Construction des Ellipsoides aus den Axen. Unferdinger. Grun. Archiv XLVIII, 118.

Elliptische Functionen.

31. *Les premières notions de la théorie des fonctions elliptiques.* *Björling.* Grun. Archiv XLVIII, 121.
32. *Sur les équations modulaires.* *C. Jordan.* *Compt. rend. LXVIII,* 308.

F.

Factorenfolge.

Vergl. Reihen 110.

Functionen.

33. *Sur les paramètres différentiels simples ou simultanés des fonctions.* *Morin.* *Compt. rend. LXVI,* 601.
34. *Théorèmes généraux sur les substitutions.* *C. Jordan.* *Compt. rend. LXVI,* 836.
Vergl. Elliptische Functionen. Homogene Functionen. Kettenbrüche.

G.

Geodäsie.

35. Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie. Helmert. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 73, 163.

Geodätische Linien.

36. Verallgemeinerung des Problems der kürzesten Linie. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 156.
37. *Sur la flexion des lignes géodésiques tracées sur une même surface quelconque.* *Allégret.* *Compt. rend. LXVI,* 342.

Geometrie (höhere).

38. *Sur la théorie des séries de courbes et de surfaces.* *De Jonquières.* *N. ann. math. XXVII,* 111.
39. *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales; applications diverses.* *Mannheim.* *Compt. rend. LXVI,* 591.
40. Lineare Construction des Punktepaares, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren gleichzeitig harmonisch ist. Grelle. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 148.

Geschichte der Mathematik.

41. *L'Espagne scientifique.* *Mailly.* Grun. Archiv XLVIII, 376.
42. *Débats entre Mr. Chasles et divers autres savants sur la science du XVII S.* *Compt. rend. LXVI,* 29—170. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 271.]
43. *De la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par Aboul-Wefa et Tycho Brahe.* *Sédillot.* *Compt. rend. LXVI,* 286.
44. Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya. F. Schmidt. Grun. Archiv XLVIII, 217.
45. *Discours prononcés aux funérailles de Poncelet le 24 Déc.* 1867 *par le Baron Charles Dupin et Mr. Dumas.* *Compt. rend. LXVI,* 85.
46. Nekrolog von Simon Plössl (10. Sept. 1794 bis 29. Jan. 1868). Pisko. Grun. Archiv XLVIII, Literar. Ber. II, 1.
47. Nekrolog von Josef Georg Boehm (28. März 1807 bis 27. Jan. 1868). Grun. Archiv XLVIII, Literar. Ber. II, 6.
48. Nekrolog von Mathias Schaar (28. Dec. 1817 bis 26. April 1867). Ad. Quételet. Grun. Archiv XLVIII, Literar. Ber. IV, 3.

49. Nekrolog von Bernhard Riemann (17. Sept. 1826 bis 20. Juli 1866). Schering. Grun. Archiv XLVIII, Literar. Ber. III, 1.
Vergl. Logarithmen.

Gleichungen.

50. *De la séparation des racines.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XXVII,* 25, 57.
51. *Démonstration de deux théorèmes d'algèbre.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XXVII,* 97.
52. *Sur la réalité des racines d'équations algébriques.* *Björling.* Grun. Archiv XLVIII, 363.
53. Auflösung der Gleichungen $x^3+y^3=a$, $x^2y+xy^2=b$. Strehlke. Grun. Archiv XLVIII, 1.
54. *Equation du troisième degré.* *Vériot.* *Compt. rend. LXVI,* 619, 730.

H.

Homogene Functionen.

55. *Sur les covariants et invariants des formes binaires.* *Jordan.* *Compt. rend. LXVI,* 117.

Hydrodynamik.

56. *Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide.* *Bertrand.* *Compt. rend. LXVI,* 1227.

Hyperboloid.

57. Ueber eine das Hyperboloid betreffende Aufgabe. Gordan. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 59.

I.

Imaginäres.

58. *Application de l'algèbre directive à la géométrie.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XXVII,* 145, 193, 241.
59. *Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky.* *Battaglini.* *N. ann. math. XXVII,* 209, 265.
Vergl. Binomialformel. Gleichungen 51.

Irrationalität.

60. Bedingungen der Rationalität von $\cos \frac{1}{n} . 360^0$ für ein gerades und ein ungerades n. Hessel. Grun. Archiv XLVIII, 81.

K.

Kegelschnitte.

61. *Si trois angles ont leur sommets en ligne droite, leurs côtés sont les côtés opposés d'un hexagone inscriptible dans une conique.* *Tuffraud.* *N. ann. math. XXVII,* 185. — *Barbier ibid.* 186.
62. *Réciproque d'une proposition sur les coniques homothétiques qui ont le même centre.* *Barbier.* *Compt. rend. LXVI,* 907.
63. *Propriété d'une conique passant par trois points et touchant une droite.* *Neuberg.* *N. ann. math. XXVII,* 221.
Vergl. Ellipse. Kreis. Krümmung 67. Parabel. Quadratur.

Kettenbrüche.

64. Zur Anwendung der Kettenbrüche. Lieblein. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 63. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 107.]
65. Ueber Näherungswerthe periodischer Kettenbrüche. Strehlke. Grun. Archiv XLVIII, 2.

Kreis.

66. *Par un point fixe* O *sur la circonférence d'un cercle ou même deux cordes* OA, OB *dont le produit est constant; on demande l'enveloppe de la sécante* AB. *De Lajudie & Salvy. N. ann. math. XXVII,* 187.
    Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Determinanten in geometrischer Anwendung.

Krümmung.

67. *Sur le rayon de courbure des coniques. Ribaucour. N. ann. math. XXVII,* 171.
68. *Relations entre les rayons de courbure de quelques systèmes de courbes. Chemin. N. ann. math. XXVII,* 120.
69. *D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique ou même toutes les tangentes à cette courbe; on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe, d'où émanent les tangentes: la somme des quotients ainsi obtenue est nulle. Maffiotti. N. ann. math. XXVII,* 181.

Kugel.

70. *Point d'intersection des sphères décrites des différents points d'un plan donné comme centre avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à une sphère donnée. Macé. N. ann. math. XXVII,* 42.
    Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung.

L.

Logarithmen.

71. *Méthode due à Huyghens inédite pour calculer les logarithmes. Bertrand. Compt. rend. LXVI,* 565.
72. *Sur la méthode de Huyghens pour calculer les logarithmes. Thoman. Compt. rend. LXVI,* 662.
    Vergl. Gleichungen 54.

M.

Maxima und Minima.

73. $u = \cos x + \cos y + \cos z$ soll Maximum oder Minimum werden, während $x + y + z = a$ constant ist. Grunert. Grun. Archiv XLVIII, 73.
74. Ueber das grösste einer Ellipse eingeschriebene n-Eck. Grelle. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 153.
75. *Formule donnant le volume du tétraèdre maximum compris sous des faces de grandeurs données. Le Besgue. Compt. rend. LXVI,* 248.

Mechanik.

76. Allgemeine analytische Entwickelung der Theorie der Kräftepaare. Grunert. Grun. Archiv XLVIII, 412.
77. *Sur l'équilibre des forces dans l'espace Spottiswoode. Compt. rend. LXVI,* 97.
78. Beitrag zu der Lehre vom Stosse der Körper. Külp. Grun. Archiv XLVIII, 102.
79. *Sur une transformation des équations différentielles du problème des trois corps. Brioschi. Compt. rend. LXVI,* 710.
80. *Sur l'application des formules générales du mouvement permanent des liquides à l'écoulement des corps solides. Tresca. Compt. rend. LXVI,* 1027, 1244.
81. *Calcul du mouvement des divers points d'un bloc ductile, de forme cylindrique, pendant qu'il s'écoule sous une forte pression par un orifice circulaire. De Saint-Venant. Compt. rend. LXVI,* 1311.
82. *Example of the application of a graphical method to the problem of rectilinear motion in a homogeneous resisting medium. Merrifield. Phil. Mag. XXXV,* 420.
83. *Sur le tautochronisme des epicycloïdes, quand on a égard au frottement. Haton de la Goupillière. Compt. rend. LXVI,* 533.
84. *Trouver dans un plan vertical la courbe sur laquelle doit être assujetti à se mouvoir un point pesant partant d'un point donné avec une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction pour que la pression du mobile sur cette courbe soit à la composante normale de son poids dans un rapport constant. Graindorge. N. ann. math. XXVII,* 78.

85. *Sur un théorème de mécanique.* Radau. *Compt. rend. LXVI*, 1262.
86. *On governors.* Maxwell. *Phil. Mag. XXXV*, 385.
Vergl. Aerodynamik. Elasticität. Electricität. Hydrodynamik. Molecularphysik. Optik. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Molecularphysik.

87. *Sur la théorie moléculaire des corps.* Guldberg. *Compt. rend. LXVI*, 39, 95. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 333.]
88. Beiträge zur Molecularphysik. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 211.
89. *Détermination des volumes* v *et* w, *l'un plein, l'autre vide de matière pondérable, constituant le volume* V *apparent d'un corps.* Volpicelli. *Compt. rend. LXVI*, 912.

O.

Oberflächen.

90. *Étude des surfaces algébriques.* Bertrand. *N. ann. math. XXVII*, 5, 49.
91. *Théorèmes relatifs à la théorie des surfaces.* Morin. *Compt. rend. LXVI*, 741.
92. *Sur le plan tangent en un point d'une surface.* Laisant. *N. ann. math. XXVII*, 116.
93. *Intersection d'une surface par un plan.* Housel. *N. ann. math. XXVII*, 277.
Vergl. Geodätische Linien.

Oberflächen zweiter Ordnung.

94. *Axes de la section d'une surface de second ordre donnée par un plan donné.* Maffiotti. *N. ann. math XXVII*, 91.
95. *Propriété d'une surface de révolution du second ordre ayant un de ses foyers au centre d'une surface donnée du second ordre.* Maffiotti. *N. ann. math. XXVII*, 183.
Vergl. Ellipsoid. Hyperboloid. Kugel.

Optik.

96. Ueber Isophoten. Burmester. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 227.
97. Zur Theorie der nicht interferirenden polarisirten Lichtstrahlen. Külp. Grun. Archiv XLVIII, 78.

P.

Parabel.

98. Ein parabolisches Segment zu halbiren. Lindman. Grun. Archiv XLVIII, 238.
99. *Trajectoires orthogonales de paraboles.* Lemaitre. *N. ann. math. XXVII*, 132.
Vergl. Quadratur.

Pascal's Sechseck.

Vergl. Kegelschnitte 61.

Philosophie der Mathematik.

100. *Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère.* Hoüel. *N. ann. math. XXVII*, 73.

Planimetrie.

101. *L'angle du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés d'un triangle équilatéral excède un demiangle droit.* Lionnet. *N. ann. math. XXVII*, 285.
102. Ueber Dreiecke, in welchen ein Winkel halb so gross oder um 90° grösser als halb so gross als ein zweiter ist. Sachse. Grun. Archiv XLVIII, 358.
103. Ueber ein aus dem regelmässigen 14-Eck hergeleitetes Dreieck. Weihrauch. Grun. Archiv XLVIII, 116.
104. Ueber den Zusammenhang der Seiten des regelmässigen Fünf- und Zehnecks und des Radius. Sachse. Grun. Archiv XLVIII, 354.
105. Geometrisches Paradoxon. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 162.

Q.

Quadratische Formen.

106. Zwei Sätze aus der Theorie der binären quadratischen Formen. G. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 259.

Quadratur.

107. Einfacher Beweis des Lambert'schen Theorems vom parabolischen Sector. Strehlke. Grun. Archiv XLVIII, 5.

R.

Reihen.

108. *Sur le nombre* e. *S. Realis. N. ann. math. XXVII*, 16, 158. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 393.]
109. Ueber Erweiterung endlicher Reihen durch beliebige Parameter. Most. Grun. Archiv XLVIII, 104.
110. Ableitung der Partialbruch- und Product-Entwickelungen für die trigonometrischen Functionen. Schröter. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 254.
111. *Sur les nombres d'Euler. Catalan. Compt. rend. LXVI*, 415.
112. *Sur le développement de* $(1-x)^{-k^2}$ *et de* $(1+x)^{k^2}$. *Pellet. N. ann. math. XXVII*, 227.
113. Summe der dritten Potenzen der natürlichen Zahlen. Unferdinger. Grun. Archiv XLVIII, 361.

S.

Schwerpunkt.

114. Ueber die Bestimmung des Schwerpunktes gewisser Körper. Ligowski Grun. Archiv XLVIII, 482.
115. *Centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique dont la densité est supposée répartie proportionellement à la courbure. Gelski. N. ann. math. XXVII*, 128.
116. *Centre de gravité d'un arc de chainette. Touren & Quitteray. N. ann. math. XXVII*, 39. — *Gelski ibid.* 131.
117. *Centre de gravité d'un arc de cycloide. Gelski. N. ann. math. XXVII*, 130.

Stereometrie.

118. Das Prismatoid als specieller Fall des Obelisken. A. Bauer. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 161.
119. Ueber einige Anwendungen des Census-Theorems. Listing. Grun. Archiv XLVIII, 166.
120. Oberfläche und Inhalt der Körper, welche durch Rotation eines regulären Polygons um einen beliebigen Durchmesser entstehen. Sohncke. Grun. Archiv XLVIII, 457.

T.

Tetragonometrie.

121. *Propriétés nouvelles du quadrilatère en général avec application aux quadrilatères inscriptibles, circonscriptibles etc. Dostor.* Grun. Archiv XLVIII, 245.

Trajectorien.

Vergl. Parabel 99.

Trigonometrie.

122. Ableitung der Formeln zur Berechnung der dritten Dreiecksseite aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Phragmén. Grun. Archiv XLVIII, 243.

Trisection des Winkels.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 5.



W.

Wärmelehre.

123. *Sur les spirales que décrit la chaleur en se répandant, à partir d'un point intérieur, dans un milieu homogène dissymétrique.* Boussinesq. *Compt. rend. LXVI*, 1194.
124. *Sur la distribution des flux de chaleur et des conductibilités dans les milieux homogènes cristallisés.* Morin. *Compt. rend. LXVI*, 1332.

Z.

Zahlentheorie.

125. *Sur les diviseurs d'un nombre entier.* Lionnet. *N. ann. math. XXVII*, 68.
126. Jede decadische Zahl $ab7ab7$ ist durch 7 und 13 theilbar. Booth. Grun. Archiv XLVIII, 117.
127. Ueber die Sätze von Wilson und Fermat und über die Theilbarkeit der Factorenfolgen und Facultäten. Oettinger. Grun. Archiv XLVIII, 159.
128. *Sur une identité, qui conduit à toutes les solutions de l'équation* $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Le Besgue. *Compt. rend. LXVI*, 396.
129. *Sur le caractère biquadratique du nombre 2.* Halphen. *Compt. rend. LXVI*, 190.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Chr. Huygens „*De circuli magnitudine inventa*", als ein Beitrag zur Lehre vom Kreise elementar entwickelt von H. Kiessling. Flensburg, Herzbruch's Verlag.

Da sowohl die erste, 1654 erschienene Ausgabe der in der Ueberschrift genannten Abhandlung als auch die von Gravesande im Jahre 1724 veranstaltete Gesammtausgabe der Huygens'schen Werke nicht eben häufig anzutreffen ist, so werden es die Freunde der Geschichte der Geometrie ohne Zweifel dem Verfasser danken, dass er einen unveränderten Abdruck jener interessanten Abhandlung besorgt hat. Ausserdem giebt der Verfasser eine eigene kurze Herleitung der hauptsächlichsten von Huygens entwickelten Resultate, namentlich der doppelten Ungleichung

$$E_n + \frac{1}{3}(E_n - E_{2n}) < K < U_n - \frac{1}{3}(U_n - E_n),$$

worin K die Kreisfläche, E_n und U_n die Flächen der ein- und umschriebenen regelmässigen Vielecke von n Seiten bezeichnen. Vielleicht darf Referent bei dieser Gelegenheit daran erinnern, dass sich mittelst des bekannten Satzes $\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a+b)$ sehr leicht noch engere Grenzen für K finden lassen, nämlich:

$$\frac{3 E_n U_n}{2 E_n + U_n} < K < \sqrt[3]{E_n U_n^2}.$$

Für $n = 8$ z. B. geben die Huygens'schen Ungleichungen

$$3{,}10457 < K < 3{,}15195,$$

die letzteren dagegen

$$3{,}13445 < K < 3{,}14334.$$

Schlömilch.

Die Elemente der Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie). Ein Leitfaden für den geometrischen Unterricht an höheren Lehr anstalten von Dr. RICHARD BEEZ, Oberlehrer am K. Gymnasium und der Realschule zu Plauen i. V. Plauen, Verlag von Neupert. 1869.

Die Anzahl der Lehrbücher für Elementarmathematik wächst heut zu Tage in so schreckenerregender Progression, dass es eine kaum lösbare und überdies ziemlich undankbare Aufgabe sein würde, jedes derselben besprechen zu wollen; um so mehr ist es aber Pflicht der periodischen Presse, auf wirklich bedeutendere Erscheinungen aufmerksam zu machen und sie dadurch vor dem Versinken in der Fluth des Gewöhnlichen zu bewahren. Unter diese werthvollen Erscheinungen dürfte der vorgenannte nur 14 Bogen zählende Leitfaden ohne Zweifel gehören, und wenn auch Referent nicht überall dem Verfasser beipflichten kann, so muss er doch andererseits den strengen wissenschaftlichen Geist und das pädagogische Geschick des Verfassers anerkennen.

Nach einer Erörterung der allgemeinen Eigenschaften des Raumes geht der Verfasser zu den Definitionen von Ebene, Gerade und Winkel über, die er im Sinne von Leibniz (Mathem. Schriften, herausgegeben von Gerhardt, I, p. 196 und 199) und Bertrand (*Developpement nouveau de la partie élementaire des Mathématiques, II, p.* 3, 4, 6) sehr sorgfältig ausführt. Die Ebene wird hierbei als diejenige Fläche definirt, „welche den Raum in zwei congruente Räume theilt, die einander decken, wie man auch die Grenzflächen auf einander legen möge". Dem entsprechend bezeichnet der Verfasser eine Linie als gerade, „wenn sie die Ebene in zwei congruente Theile zerlegt, die stets zur Deckung gebracht werden können, wie man auch ihre Ränder aneinander legen mag". Den Winkel endlich betrachtet der Verfasser als einen „Ausschnitt aus einer Ebene", d. h. als eine endliche, von zwei Geraden begrenzte Fläche. — Dass sich diese Anschauungsweise streng durchführen lässt, ist nicht zu bezweifeln, und des Verfassers Arbeit liefert selber den Beweis dafür; die Freiheit von logischen Fehlern ist aber in den Augen des Referenten doch nur das Minimum der Forderungen, die er an einen mathematischen Gedankengang stellt, und namentlich bei den ersten Anfängen der Geometrie dürfte wohl das Verlangen berechtigt sein, dass schwerbegreifliche Hypothesen vermieden werden und dass die wissenschaftliche Entwickelung parallel gehe zur psychologischen Entwickelung. Nach diesen Gesichtspunkten lassen sich gegen des Verfassers Gedankengang ein paar wesentliche Bedenken erheben. Die Definition der Ebene läuft auf das Postulat hinaus, den ganzen unendlichen Raum in zwei gleiche Theile zu zerlegen, d. h. zu halbiren, und ebenso beruht die Definition der Geraden auf der Möglichkeit, die unendliche Ebene zu halbiren. Nun hat zwar Jedermann eine klare Vorstellung von der Hälfte einer endlichen Grösse, dass aber auch ein Unend-

liches in zwei gleiche und sogar in jeder Lage congruente Theile zerlegt werden könne, ist gar nicht beweisbar, sondern eine, wenigstens dem jugendlichen Verstande ziemlich fern liegende Hypothese. Das Missliche derselben tritt gleich hervor, wenn man die Consequenz jenes Gedankenganges verfolgt; ist man nämlich durch Halbirung des Raumes auf die Ebene und durch Halbirung der Ebene auf die Gerade gekommen, so müsste man folgerichtig durch Halbirung der Geraden zum Punkte gelangen, d. h. letzteren als Das definiren, was die unendliche Gerade in zwei congruente Theile zerlegt; diese Definition hat der Verfasser selber nicht riskirt. — Ohne Zweifel bedarf die Geometrie gewisser, nicht weiter definirbarer Grundanschauungen oder, wenn man will, gewisser Postulate, Voraussetzungen u. dergl., die hier dieselbe Rolle spielen, wie in der Chemie die Elementarstoffe; welche Grundanschauungen aber die natürlichsten sind, das wird sich doch nur durch psychologische Beobachtungen entscheiden lassen, und zwar müssen diese Beobachtungen an Kindern gemacht werden, denn bei dem fertigen Mathematiker sind die Grundanschauungen und die hieraus durch Abstraction gewonnenen Begriffe so innig mit einander verwachsen, dass er beide nicht mehr zu trennen weiss. Bei dem Worte „Richtung" z. B. denken wir sofort und unwillkürlich an eine unendlich lange Gerade, welche nach einer bestimmten Richtung verläuft, und umgekehrt bei dem Worte „Gerade" denken wir an eine durch die Gerade bestimmte Richtung. Sind nun diese Vorstellungen gleichzeitig uns zum Bewusstsein gelangt, oder, wenn nicht, welche war früher da? Theoretisch lässt sich das gar nicht entscheiden, wohl aber praktisch durch ein *experimentum crucis* mit dem ersten besten kleinen Dorfjungen. Man sage ihm: „geh' einmal gerade auf den Baum dort los" und er weiss recht gut, was das heissen will; er behält den Baum im Auge (er visirt ihn an), um während des Gehens nicht aus der Richtung zu kommen. Man wird ferner bemerken, dass er keine grössere Entfernung kennt, als die, welche er selber zurückgelegt hat; er besitzt also eine sichere Vorstellung von einer bestimmten Richtung, er kennt auch die begrenzte Gerade, aber von einer unendlichen Geraden weiss er noch nichts. Nach der scharfen Kant'schen Terminologie ist also „Richtung" eine frühzeitig auftretende Anschauung, dagegen „Gerade" ein später durch Abstraction erworbener Begriff. Ebendeswegen hält es Referent für psychologisch, mithin auch pädagogisch und wissenschaftlich für gerechtfertigt, von der Richtung aus zur Geraden überzugehen. — Was ferner die vom Verfasser benutzte Definition des Winkels betrifft, so leidet sie an dem Uebelstande, dass in allen übrigen Theilen der Wissenschaft von ihr gar keine Rede ist; die analytische Geometrie, die Geodäsie, Astronomie, Physik etc. betrachten den Winkel nie anders als das Maass für Richtungsdifferenzen; dies ist eine nicht zu verachtende Garantie für die Natürlichkeit der gewöhnlichen und daher ein Grund zur Vermeidung der

vom Verfasser benutzten Definition. Man wende nicht ein, dass auch sonst (z. B. für die Kegelschnitte) verschiedene Definitionen neben einander existiren; bei complicirten Gebilden, welche der Betrachtung viele verschiedene Seiten darbieten, lässt sich das ertragen, bei fundamentalen Begriffsbestimmungen aber nicht.

Die Congruenzlehre behandelt der Verfasser in der gewöhnlichen Weise und knüpft daran mehrere, die Vielecke und den Kreis betreffende Sätze. Das folgende (zweite) Buch enthält die Aehnlichkeitslehre und scheint mit einer besonderen Vorliebe behandelt worden zu sein; in demselben wird mehrfach auf die neuere Geometrie (Transversalen, harmonische Verhältnisse, Kreisverwandtschaft) Rücksicht genommen, was gewiss nur gebilligt werden kann. Zugleich sind darin die Berührungsaufgaben kurz und elegant behandelt. Den Inhalt des dritten Buches bildet die Vergleichung der Flächenräume ebener Figuren; unter dieser Rubrik sind auch die Quadratur und die Rectification des Kreises subsummirt, womit die Planimetrie schliesst.

Referent möchte hier eine allgemeine Bemerkung anreihen. In der Planimetrie gehen offenbar zwei Eintheilungsgründe neben einander, der eine ist das Princip der geometrischen Verwandtschaften (Congruenz, Flächengleichheit, Aehnlichkeit, Collineation), der andere entspringt aus der Unterscheidung von geradlinigen und krummlinigen Gebilden. Offenbar steht jenes Princip höher als diese Unterscheidung, denn in der höheren Geometrie verliert letztere gewaltig an Bedeutung, trotzdem bleibt aber immer noch die Frage, ob man jenes Princip, so zu sagen, rücksichtslos durchführen und demgemäss die Sätze vom Kreise in die einzelnen Capitel Congruenz, Aehnlichkeit etc. vertheilen, oder ob man die Theorie der Verwandtschaften erst an den geradlinigen Gebilden zu einem gewissen Abschlusse bringen und sie dann auf den Kreis anwenden soll. Das Erste scheint jetzt Mode geworden zu sein, und dieser Mode huldigt auch der Verfasser; dagegen hat sich Referent von jeher für den zweiten Modus entschieden und zwar aus dem einfachen Grunde, weil dann die elementare Geometrie dieselbe Gliederung erhält wie die analytische Geometrie, in welcher sich doch Niemand einfallen lassen würde, irgend eine für gerade Linien entwickelte Formel sofort auf die Sehnen der Ellipse, die Tangenten der Lemniscate anzuwenden, nach diesem Excurse eine zweite Formel für gerade Linien abzuleiten, daran eine ähnliche Digression zu knüpfen u. s. w.

Die Trigonometrie und Stereometrie hat der Verfasser zwar ziemlich knapp, für einen „Leitfaden" aber wohl ausreichend dargestellt. Zahlreiche gut gewählte Uebungsaufgaben (ohne Angabe der Auflösung) sind überall eingestreut und werden den Lehrern jedenfalls willkommen sein.

Schlömilch.



Lehrbuch der Physik für höhere Schulen von Dr. Wilhelm Krumme, Oberlehrer an der Realschule I. Ordnung zu Duisburg. Mit 144 in den Text gedruckten Abbildungen. Berlin, G. Grote'sche Verlagshandlung 1869. X und 245 Seiten 8⁰.

Für die Zwecke, welche der Verfasser im Auge hatte, kann dieses Buch musterhaft genannt werden. Ein Unterricht, welcher den Inhalt desselben den Schülern im Wesentlichen zu eigen machte, würde wohl Alles geleistet haben, was man in diesem Fach von den besten Realschulen verlangen könnte. Namentlich ist die didactische Seite durchaus getroffen. Durch die Eintheilung in den Text, welcher das Faktische der Erscheinungen kurz und präcis darlegt, die darauf abgesondert folgende Begründung und endlich das überall zugefügte Uebungsmaterial ist sowohl der Uebersichtlichkeit als auch der Gründlichkeit Rechnung getragen. Andererseits knüpft sich an die ersteren Theile der Vortrag und seine Verarbeitung während des Unterrichts, an letzterem findet Repetition und Privatfleiss ein reiches Feld.

Die Behandlung ist knapp und oft nur andeutend. Breite ist mit einer gewissen Kunst vermieden, so dass auf Dinge, welche als aus der Erfahrung bekannt vorausgesetzt werden können, meist nur mit einem Wort hingewiesen ist und jede Beschreibung der Maschinen, die der Schüler anderswo leicht finden kann, ganz weggeblieben ist. So sucht man die Dampfmaschine, welcher andere solche Bücher mehrere Seiten zu widmen pflegen, im Register und Text vergeblich. Dagegen sind die Vorgänge und Gesetze, auf welchen sie beruht, an den betreffenden Orten genügend dargelegt. Dieses Beispiel zeigt schon, dass dem Verfasser daran lag, den Schwerpunkt des Buches auf die Gedankenarbeit, auf das eigentlich Wissenschaftliche in der Physik zu legen. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, dass es der Lehrer an den Hinweisungen auf jene äusseren Beispiele und Anwendungen, wo es nöthig ist, auch an Veranschaulichungen durch Bild, Modell, Experiment nirgends fehlen lasse. Das Buch braucht deshalb solchen Bedürfnissen nicht auch noch abzuhelfen. An eine Benutzung desselben zum Selbstunterricht, ohne Lehrer, ist daher auch nicht gedacht. Der Lehrer muss beständig zur Hand sein und namentlich scheint uns auch für die Lösung vieler Uebungsaufgaben — in welchen sich oft noch ein schöner Theil eigentlichen Lernstoffes enthalten findet — eine vorherige Besprechung unerlässlich. Besonders unter den späteren sind welche, die ohnehin sehr reife Schüler voraussetzen. Die Anleitung zur gelegentlichen schriftlichen Ausführung geeigneter Capitel an der Hand der Stuart Mill-schen inductiven Methode ist hier recht am Platz und wird den Schüler mehr fördern als noch so viel Gedächtnisswerk.

Die gegebenen Beweise nehmen keine Vorbereitung in Anspruch, welche über die Trigonometrie und etwa die Anfangsgründe der analytischen Geometrie hinausgingen. Dass die Methode derselben bisweilen noch

eine mehr künstliche als anschauliche geblieben ist, kann dem Verfasser nicht zur Last gelegt werden, so lange man die besseren nicht hat.

Die Anordnung des Stoffes ist sachgemäss. Dass der schwierige Theil der Optik vom elementareren getrennt wurde, ist didactisch längst gerechtfertigt. Vielleicht hätten solcher Trennungen im Interesse des Unterrichts noch mehrere stattfinden dürfen.

Von Einzelheiten vermissten wir kaum etwas. Die Hydrodynamik scheint noch einer Erweiterung zu bedürfen. So fehlen die Erscheinungen, welche auf der sogenannten Reaction des ausfliessenden Wassers beruhen. Vielleicht hätte auch bei Gelegenheit der Rotation noch der Fessel'schen Versuche über freie Axen, sowie der Ursache der Präcession etc. Erwähnung geschehen können.

Die Ausstattung ist gut. Doch ist jeder Luxus, z. B. bei den Figuren, mit Recht vermieden; der Schüler lerne bei Zeiten schematisch zeichnen und das Unwesentliche vom Wesentlichen sondern.

Eins würde noch das Buch geziert und nicht belastet haben: etwas mehr Historisches. Wenn der Verfasser sein Talent für prägnante Kürze auch einmal darauf gewendet hätte, würde es ihm leicht geworden sein, eine Anzahl Entdeckernamen und Jahreszahlen (etwa im Text nur durch Hinweisung auf eine im Anhang folgende tabellarische Zusammenstellung) einzufügen. Dieselben unterstützen unser Gedächtniss und wir sind gewohnt, sie im Zusammenhang mit gewissen Gesetzen im Kopf zu haben. Auch ist ja das Gebäude dieser Naturwissenschaft ebenso wesentlich ein Pantheon des menschlichen Genius. Dies vielleicht für eine folgende Auflage, an welcher es nicht fehlen wird.

F. C. F.

Bibliographie

vom 15. Juni bis 1. August 1869.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der Königl. Bayer'schen Akademie der Wissenschaften. 1869, I, 2. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwissensch. Classe. 49. Bd. 1. Abth. 1. Heft und 2. Abth. 1. Heft. Wien, Gerold. pro 1—10. Heft 8 Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von C. Bruhns. 4. Jahrg., 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 24 Ngr.

Reine Mathematik.

Friedlein, G., Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen, Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen, Deichert. 28 Ngr.

Hattendorff, K., Die elliptischen Functionen im Nachlasse von Gauss. Hannover, Schmorl und von Seefeld. 3 Ngr.

Winckler, A., Die vollständigen Abel'schen Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Stolz, O., Ueber die Kriterien zur Unterscheidung der Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabeln. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Winckler, A., Ueber einige Gegenstände der elementaren Analysis. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Pluecker, J., Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. 2. Abth. Herausgeg. von F. Klein. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

Fialkowski, N., Ueber den geometrischen Ort der Theilungspunkte der Kreistransversalen. Wien, Sallmayer u. Co. 4 Ngr.

Staudigl, R., Ellipsenconstruction. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Frischauf, J., Die geometrischen Constructionen von Mascheroni und Steiner. Graz, Leuschner und Lubensky. 8 Ngr.

Brennecke, Einführung in das Studium der darstellenden Geometrie. Berlin, Enslin. ⅔ Thlr.

WITTSTEIN, TH., Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 1. Bd., 2. Abth. Planimetrie. 4. Aufl. Hannover, Hahn. ⅚ Thlr.

SCHUMANN, H., Lehrbuch der Stereometrie für Gymnasien und Realschulen. Berlin, Weidmann. ⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Generalbericht über die Europäische Gradmessung für das Jahr 1868. Berlin, G. Reimer. 1⅙ Thlr.

WIEGAND, A., Grundriss der mathematischen Geographie. 7. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

Ingenieurs Taschenbuch; herausgeg. von dem Verein „Die Hütte". 8. Aufl. 1. Hälfte. Berlin, Ernst und Korn. 1⅚ Thlr.

WEHRLE, J., Projective Abhandlung über Steinschnitt, erläutert durch Constructionen von Mauerflächen, Gewölben etc. 1. Lieferung. Zürich, Kraut und Bosshart. 1⅚ Thlr.

WERNER, R., Theorie der Turbinen, Kreiselpumpen und Ventilatoren. Berlin, Gärtner. 24 Ngr.

Astronomische Mittheilungen der K. Sternwarte zu Göttingen. 1. Thl. Göttingen, Rente. 5 Thlr.

KRAHL, TH., *De orbita cometae tertii* 1853. *Diss. inaug.* Gleiwitz, Leuckart. ½ Thlr.

Physik.

MOHR, F., Allgemeine Theorie der Bewegung und Kraft als Grundlage der Physik und Chemie. Braunschweig, Vieweg. ⅚ Thlr.

KRUMME, W., Lehrbuch der Physik für höhere Schulen. Berlin, Grote'sche Verlagshandlung. 1 Thlr.

OBERMAYER, A. v., Versuche über einige Capillarerscheinungen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

PFAUNDLER, L., Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität von Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

LOSCHMIDT, J., Ueber den zweiten Satz der mechanischen Wärmetheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

MILITZER, H., Ueber die Bestimmung der Constanten eines galvanischen Elementes. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

WORM-MÜLLER, J., Untersuchungen über Flüssigkeitsketten. 1. Abth. Leipzig, Breitkopf und Härtel. 1½ Thlr.

BRÜCK, R., *L'origine des étoiles filantes.* Brüssel, Mucquardt. 1⅚ Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Notice sur la vie et les ouvrages du général J. V. Poncelet par M. le général Didion lue à l'Académie impériale de Metz dans la séance du 18 *mars* 1869. *Paris* 1869.

Am 22. December 1867 starb General Poncelet, einer der erfindungsreichsten Techniker, der geistvollsten Mathematiker, welche Frankreich in diesen Jahrhunderte besass, ein Mann, dessen Lebensgeschichte zugleich mit den wechselnden Geschicken seines Vaterlandes von spannendem Interesse ist, da er die vielen politischen Umwälzungen, deren Zeuge er war, zum Theil wenigstens nicht blos als stummer Zuschauer an sich vorübergehen liess. Die gelehrte Gesellschaft seiner Heimath Metz, welche seit ihrer ersten Sitzung am 14. März 1819 sich seiner Theilnahme rühmen durfte, deren Sitzungsprotokolle sogar durch eine Arbeit von Poncelet eröffnet worden sind, hat einer Ehrenpflicht wie einem Ehrenrechte genügt, indem sie eine Gedächtnissrede auf ihr ältestes Mitglied durch eine dazu befähigte Feder ausarbeiten liess, und diese Gedächtnissrede haben wir augenblicklich in Gestalt einer Brochüre von 59 Octavseiten vor uns liegen. Wir selbst bedurften deren kaum, um in uns die Erinnerung an die körperlich und geistig gleich hohe, gleich kräftige Gestalt aufzufrischen, in welcher uns Poncelet 1856 in Paris bei einmaligem Zusammentreffen persönlich bekannt wurde. Der Wuchs stattlich; die Haare graugemischt; die Sprache etwas rauh, wie zum Commandorufe geschaffen; die Ausdrucksweise gerade und offen, der Schmeichelei oder auch nur einer ihr nahe stehenden den Franzosen nicht ungewohnten übermässigen Höflichkeit unfähig; die Gedanken tief, die Darstellung lichtvoll, wenn er mitten unter nichtmathematischen Tischgenossen auf einen Augenblick von dem gewöhnlichen Gespräche zu einem gelehrten Thema abbog: so steht Poncelet heute noch vor uns, und so muss ihn auch der Leser des genannten Nekrologes vor sich sehen. Oder kann man sich ein anderes Bild von dem Manne machen

dessen Entwickelungsgang vom General Didion in folgende wenige Sätze zusammengefasst werden durfte: „In seiner Kindheit und bis zum Alter von 16 Jahren ohne Lehrer oder Lehrbücher fühlt er das Bedürfniss nach Ausbildung. Die Hilfsmittel sind ihm spärlich zugemessen, aber Arbeitskraft und Willensstärke übersteigen die Schwierigkeiten. In drei Jahren erlernt er, was für Andere sechs oder acht Jahre in Anspruch nimmt, er öffnet sich den Eingang zur polytechnischen Schule. Ein Jahr geht ihm durch Krankheit verloren. In den beiden folgenden Jahren durchläuft er die Anwendungsschule, leitet Befestigungsarbeiten in Holland, nimmt an dem russischen Feldzuge Theil. Auf dem Rückzuge gefangen, sieht er sich nach Saratoff an die äusserste Grenze Europas nach Asien zu geschleppt. Dort muss er ohne geistige Unterstützung, ohne Geldmittel, ohne Bücher seine Kenntnisse selbstständig wieder auffrischen, seinen Bildungsgang so zu sagen wiederholen." Und dort schreibt er, der noch nicht 26jährige Gefangene, jene Hefte nieder, in welchen bereits die Keime seines Meisterwerkes, des „*Traité des propriétés projectives des figures*", zu finden sind, wie die 1862 und 1864 erfolgte Herausgabe derselben unter dem Namen „*Applications d'Analyse et de Géometrie*" beweist. Er findet die geistige und körperliche Kraft zu dieser Thätigkeit fast noch auf dem Krankenlager, auf welches ihn die Anstrengung der viermonatlichen Fusswanderung von Smolensk nach Saratoff ohne Mantel bei 26 Centigraden unter dem Nullpunkte des Thermometers geworfen hatte! Wir könnten einen weiteren Beweis dieser fast unerhörten Zähigkeit seiner Natur in dem Umstande anführen, welcher sonst uns beinahe ein Lächeln abzwingen müsste, dass er aus Russenhass verschmähte, ihm angebotene Unterrichtsstunden zu ertheilen, durch deren Erlös er seine Lage doch jedenfalls beträchtlich hätte verbessern können. Nach geschlossenem Frieden kehrte Poncelet nach Metz zurück, wo er etwa 20 Jahre verweilte und seinen Namen den wichtigsten Entdeckungen und Erfindungen aufdrückte. Von dort aus hat er 1822 das schon genannte geometrische Meisterwerk veröffentlicht; dort schrieb er die drei grossen Abhandlungen: „*Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*", *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*", „*Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques*", welche 1829—1832 in Crelle's Journal erschienen; dort erfand er 1824 das unter seinem Namen bekannte Wasserrad mit gekrümmten Schaufeln; dort erbaute er 1820 die erste Poncelet'sche Zugbrücke, bei welcher die aufgerollte Kette das Gegengewicht gegen die Brücke in allen Stellungen bildet; dort endlich verfasste er 1826 bis 1832 seine angewandte Mechanik. Poncelet war verschiedentlich aufgefordert worden, nach Paris zu kommen und als Candidat für die Stelle eines Mitgliedes der Akademie aufzutreten. Er hatte sich dessen geweigert, so lange seine Mutter in Metz lebte. Erst durch ihren Tod lösten sich die Bande, welche ihn an den langjährigen Aufenthalt fesselten. Er begab

sich 1835 auf neues Andringen nach Paris, um den Sitz in der Akademie einzunehmen, zu welchem er als Nachfolger von Hachette mit allen gegen eine Stimme erwählt worden war. 1838 gründete er in der für ihn neuerrichteten Professur die Vorlesungen über physikalische und experimentelle Mechanik, welche zahlreiche Schüler versammelten. Zu seinen engsten Freunden zählte Arago. Als daher die Februarrevolution diesen zum Kriegsminister erhob, wurde Poncelet Commandant der polytechnischen Schule und fast gleichzeitig gewählter Abgeordneter von Metz zur constituirenden Versammlung. „In der constituirenden Versammlung (hier lassen wir General Didion reden) zeigte sich Poncelet als das, was er immerwar: geraden Geistes, gewissenhaft, klar, voll Liebe zum Volke, ohne ihm zu schmeicheln, voll Ehrerbietung gegen die Regierung, ohne ihr Weihrauch zu streuen, Anhänger des Fortschrittes, aber nicht der Zügellosigkeit. Wenn er, wegen seiner Unabhängigkeit, der Mann keiner Partei war, so genoss er dafür die Achtung aller seiner Mitabgeordneten, und ihre Hochschätzung seiner edeln Persönlichkeit zeigte sich in den Wahlen, durch die man ihn ehrte." Die Doppelstellung als Abgeordneter und als Commandant des Polytechnikums benutzte er in den stürmischen Mai- und Junitagen des Jahres 1848 im Interesse der öffentlichen Ordnung. Unter seiner Leitung eilten die Schüler der polytechnischen Schule zum Schutze der constituirenden Versammlung, dieselbe rasch entflammte Jugend, welche man bei früheren Aufständen als Befehlshaber der schnell sich erhebenden Barrikaden zu sehen gewohnt war. General Poncelet zog sich am 4. November 1850 von der Commandantur des Polytechnikums zurück, seine militärische Laufbahn ist damit abgeschlossen. Die nächste anstrengende Thätigkeit, welche er entwickelte, hatte eine friedliche Veranlassung, die allgemeine Industrieausstellung in London von 1851, bei welcher er Vorsitzender der Jury für die Classe der Maschinen und Werkzeuge war. Als solcher widmete er 7 Jahre voll Arbeit und Mühen der Herstellung seines „*Rapport fait au jury international de l'Exposition universelle de Londres sur les machines et outils employés dans les manufactures*", welcher 1857 in zwei starken Octavbänden von zusammen über 1100 Seiten erschien. Diese Riesenarbeit hatte den fast 70jährigen Körper nahezu erschöpft. Poncelet erkrankte und genas zu neuer Thätigkeit nur unter der Pflege und Beihilfe der Gefährtin seiner 20 letzten Lebensjahre, der vortrefflichen Frau, welche, wie Baron Ch. Dupin am Grabe des Entschlafenen sagte, für seine Arbeiten der aufopferndste, verständigste Secretär und fast ein Mitarbeiter war. Frau Poncelet und die Herren Moutard und Mannheim dürfen nicht ungenannt bleiben, wenn man von der Herausgabe der früher erwähnten „*Applications d'Analyse et de Géométrie*" und von der neuen zweibändigen Ausgabe des „*Traité des propriétés projectives des figures*" (1865—1866) spricht. Mit derselben Unterstützung hoffte er noch seine Mechanik zu veröffentlichen, da rief der unerbittliche Tod ihm das letzte Halt zu. Aber auch ohne diese

letzte Leistung, so wünschenswerth ihre Erfüllung gewesen wäre, war Poncelet ein grosser Meister, und nicht blos um ihretwillen können wir in die Worte einstimmen, welche Herr Dumas, der Secretär der Akademie der Wissenschaften ihm nachrief: „Er hat eine grosse Lücke in der französischen Wissenschaft zurückgelassen".

CANTOR.

Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange, discorso letto nel R. Liceo Galilei di Pisa per la festa letteraria commemorativa dal CAV. ANGELO FORTI. *Seconda edizione accresciuta di nuove notizie. Roma* 1869.

Wenn sieben Städte sich um die Ehre stritten, der Geburtsort Homer's zu sein, so können drei Städte fast mit gleichem Anrechte den grossen Mathematiker den ihren nennen, dessen Biographie das uns vorliegende Programm gewidmet ist. Turin sah ihn zur Welt kommen, Berlin besass die Blüthe seiner Manneskraft, Paris birgt seine Asche. Gönnen wir es den Italienern, ihren Landsmann ganz vorzugsweise zu beanspruchen und sich seiner als einer Zierde ihrer Nation zu rühmen; Lagrange's Unsterblichkeit mag ihnen gehören, seine Werke gehören der ganzen Welt. Die Lebensgeschichte von Ludwig Lagrange ist mehrfach dargestellt worden. Delambre und Menabrea sind die beiden Vorgänger, an welche Hr. Forti nach eignem Eingeständnisse sich hauptsächlich anlehnt. Die Würdigung der mathematischen Leistungen Lagrange's dagegen dürfen wir wohl dem neuesten Schriftsteller selbst beimessen, und in ihrer Beurtheilung wie in der Werthschätzung der ganzen 3⅛ Bogen starken Brochüre dürfen wir den Zweck nicht ausser Augen lassen, zu welchem sie entstanden ist. Auch Deutschland besitzt eine reiche Programmliteratur, und doch dürfen wir die deutschen Festschriften nicht mit den uns in italienischer Sprache vorliegenden vergleichen. Der Unterschied lässt sich in zwei Worte fassen: die deutschen Schulprogramme wenden sich, wenigstens ihrem Inhalte nach, sammt und sonders an die Lehrer, das Programm des Hrn. Forti ist eine Rede an und für die Schüler. Wie er sich in der Ansprache direct an diese wendet, wie er an die Kenntnisse anknüpft, welche sie aus seinen eigenen Vorträgen geschöpft haben können, wie er in den Schlussworten sie zu immer neuem Studium der Werke Lagrange's auffordert, so lässt er niemals ausser Augen, dass Schüler ihn hören, dass sie ihn verstehen sollen. Damit ist aber auch der ganzen Darstellung ihr nothwendiges Gepräge aufgedrückt. Wir haben es nicht mit einem Giesel'schen Programme zu thun, jedes Wort quellenmässig belegt, jeder Satz fest begründet, jede Anschauung die Frucht langer Untersuchung, dagegen kaum ein Wort, welches dem Satzbau zu Liebe eingeschaltet wäre. Hier haben wir vor allem

eine Rede und zwar eine schöne Rede. Der äussere Prunk mannichfacher Wiederholung fehlt nicht; Citate dagegen sind nur dann vorhanden, wenn sie von der Natur sind, einer Rede eingefügt werden zu können, d. h. wenn sie schon beim Anhören leicht verständlich sind und zugleich selbst für den Laien ein gewisses Interesse bieten. Tiefgehende Erörterungen über die Einzelleistungen Lagrange's, über seine Methoden, sein wissenschaftliches System, wie es namentlich in seiner „*Théorie des fonctions*" und in seinen „*Leçons sur le calcul des fonctions*" niedergelegt ist, vermissen wir vielleicht beim Lesen, aber die Zuhörer dürften mit diesen Weglassungen zufrieden gewesen sein, und auf die Zuhörer ist Alles berechnet. Wir müssen also unser Bedauern über das, was wir als Lücke empfinden, unterdrücken und in der kleinen, angenehm geschriebenen Abhandlung das loben, was wirklich gut darin ist: die schwungvolle Anpreisung der Werke Lagrange's, deren allgemeinster Inhalt fasslich genug dargestellt ist, und die gewandte Vermischung dieses mehr mathematischen Theiles mit dem biographischen. Der Leser dürfte die Brochüre zwar ungesättigt, aber nicht unbefriedigt aus der Hand legen.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. August bis 1. October 1869.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-phys. Classe. 1869, I. Leipzig, Hirzel. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Mathematische Abhandlungen der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus d. Jahre 1868. Berlin, Dümmler. $1\frac{5}{6}$ Thlr.

Physikalische Abhandlungen der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1868. Berlin, Dümmler. $1\frac{2}{5}$ Thlr.

Reine Mathematik.

CLEBSCH, A., Zur Theorie der binären Formen dritter Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. Göttingen, Dieterich. 1 Thlr.

SCHERING, E., Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Göttingen, Dieterich. $\frac{1}{3}$ Thlr.

HEIME, A., Untersuchungen über relative Primzahlen, primitive und secundäre Wurzeln u. s. w. 2. Aufl. Berlin, Thiele. $\frac{2}{3}$ Thlr.

SCHLÖMILCH, O., Compendium der höheren Analysis. 3. Aufl. 1. Bd. 2. Hälfte. Braunschweig, Vieweg. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

WINCKLER, A., Auszug aus der Abhandlung: „Der Rest der Taylor'schen Reihe." (Akad.) Wien, Gerold. $\frac{1}{10}$ Thlr.

HECHEL, C., Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra. Reval, Kluge. 1 Thlr.

UNFERDINGER, F., Ueber die Integrale

$$\int x^n \cos\left[m \lg(a+bx)\right] dx \text{ und } \int x^n \sin\left[m \lg(a+bx)\right] dx.$$

(Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

WIENER, CHR., Stereoscopische Photographien des Modelles einer Fläche dritter Ordnung mit 27 reellen Geraden. Mit erläuterndem Texte. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

NIEMTSCHIK, R., Construction der Durchschnittspunkte zweier Kegelschnitte. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

DUDA, TH., Versuch einer naturgemässen Entwickelung der Aehnlichkeitslehre. Brieg, Bänder. ⅙ Thlr.

ZIEGLER, A., Grundriss der ebenen Geometrie zum heuristischen Unterrichte. Landshut, Krüll. ⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

SCHLESINGER, J., Darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie. Wien, Gerold. $2^2/_5$ Thlr.

—— Darstellung der räumlichen Collinearprojection in orthogonalen Abbildungen. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

WOLF, R., Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. 1. Bd. 1. Lief. Zürich, Schulthess. $1^1/_5$ Thlr.

HANSEN, P. A., Entwickelung eines neuen Verfahrens zur Ausgleichung eines Dreiecksnetzes. Leipzig, Hirzel. 1 Thlr.

KAYSER, E., Construction und Theorie eines Marinedistanzmessers. Untersuchung des Mondes hinsichtlich seiner ellipsoidischen Gestalt. Danzig, Anhuth. ⅔ Thlr.

STAMPFER, S., Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. 6. Aufl., bearb. von J. Herr. Wien, Gerold. 2 Thlr.

BOLTZMANN, L., Ueber die Festigkeit zweier in Druck übereinander gesteckter cylindrischer Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_{10}$ Thlr.

FÖRSTER, W., Sammlung von Hilfstafeln der Berliner Sternwarte. Berlin, Dümmler. 1⅓ Thlr.

LITTROW, K. v., Zählung der nördlichen Sterne im Bonner Verzeichniss nach Grössen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

BRIOT, CH., *Théorie mécanique de la chaleur. Paris, Gauthier-Villars.* *7½ frcs.*

Physik.

EMSMANN, H., Sechzehn mathematisch-physikalische Probleme. Leipzig, Quandt und Händel. ¾ Thlr.

JELINEK, C., Normale fünftägige Wärmemittel für 88 Stationen, bezogen auf die Zeit von 1848 bis 1867. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1868.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Aerodynamik.

130. *Essai théorique sur la loi de M. Graham relative à la diffusion des gaz.* Boussinesq. *Compt. rend. LXVII*, 319.
131. *On the communication of vibration from a vibrating body to a surrounding gas.* Stokes. *Phil. Mag. XXXVI*, 401.

Analytische Geometrie der Ebene.

132. *Transformations relatives à la sous-tangente et à la sous-normale.* Laisant. *N. ann. math. XXVII*, 318.
133. *Les différents points d'une courbe mobile engendrent une série de courbe dont l'enveloppe est la même que l'enveloppe de la courbe mobile.* Laisant. *N. ann. math. XXVII*, 545.
134. *On the order of the conditions that four curves may have two points in common.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. IX*, 176.
135. *On the centres of curves and surfaces.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. IX*, 25.
136. *On the centres of mean distances of certain points of intersection of curves and surfaces.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. IX*, 63.
137. *Équation ayant lieu pour tout triangle inscrit à un triangle et tangent à trois courbes données.* Bauquenne. *N. ann. math. XXVII*, 442.
138. *On the figure formed by sixteen cotangential chords of a curve of the third degree.* S. Roberts. *Quart. Journ. math. IX*, 232.
139. *On successive involutes to a circle.* Sylvester. *Phil. Mag. XXXVI*, 295, 459.
140. *On a certain envelope depending on a triangle inscribed in a circle.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 31, 175. — Walton *ibid.* 142. — Ferrers *ibid.* 147. — Griffiths *ibid.* 346. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 7.]
141. *Generalisation of a problem of Bobillier (Annales de Mathématiques XVIII, 185).* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 275.
142. *On the cubical divergent parabolas.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 185.

Vergl. Asymptoten. Biangularcoordinaten. Cycloide. Doppeltangenten. Kegelschnitte. Triangularcoordinaten.

Analytische Geometrie des Raumes.

143. *On the cubic curves inscribed in a given pencil of six lines.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 210.

144. *Déterminer tous les conoïdes droits tels, qu'en chacun de leurs points les rayons de courbure des deux sections principales de la surface soient égaux et dirigés en sens contraires.* Pasalagna. *N. ann. math. XXVII*, 453.
Vergl. Kegelschnitte 232, 234, 240. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

Astronomie.

145. *Exposition, d'après les principes de Jacobi, de la méthode suivie par Mr. Delaunay dans sa Théorie du mouvement de la lune autour de la terre.* Tisserand. *Journ. Mathém. XXXIII*, 255.
146. *On the lunar theory.* Godfray. *Quart. Journ. math. IX*, 126, 231. — Walton *ibid.* 226. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 18.]
147. Ueber das Problem der drei Körper. Scheibner. Crelle LXVIII, 390. [Vergl. Bd. XII, Nr. 7.]
148. *Sur le problème des trois corps.* Radan. *Compt. rend. LXVII*, 171.
149. *Sur l'élimination directe du noeud dans le problème des trois corps.* Radan. *Compt. rend. LXVII*, 841.
150. Ueber den Einfluss der Dichtigkeit der Luft auf den Gang einer Pendeluhr. Förster. Berl. Akad. Ber. 1867, 239.
Vergl. Refraction.

Asymptoten.

151. *Théorie des asymptotes.* H. Laurent. *N. ann. math. XXVII*, 413.

Attraction.

152. Aufgaben aus der Anziehungslehre von Kugelschalen. Krumme. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 347, 445.
153. *Démonstration élémentaire des lois de Newton.* Lespiault. *Compt. rend. LXVII*, 38.
154. *Nouveau théorème sur les attractions locales.* Yvon Villarceau. *Compt. rend. LXVII*, 1275.

B.

Balistik.

155. *Sur la similitude des trajectoires décrites par les projectiles initialement semblables et variables, même divisibles, pendant leur traject.* Martin de Brettes. *Compt. rend. LXVII*, 896.

Biangularcoordinatenten.

156. *On biangular coordinates.* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 47.

C.

Cartographie.

157. Ueber Karten-Projectionen. Veltmann. Astr. Nachr. LXXI, 65, 367.
158. Ueber conforme Kartenprojectionen. Wittstein. Astr. Nachr. LXXI, 369.

Combinatorik.

159. *On triads of once-paired elements.* Horner. *Quart. Journ. math. IX*, 15. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 27.]

Cycloide.

160. *Sur les roulettes extérieures et intérieures dans les courbes planes.* Gigon. *N. ann. math. XXVII*, 464.

D.

Determinanten.

161. *Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants.* *N. ann. math. XXVII*, 403.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

162. *Investigation of the equations of the four pairs of circles which pass through the six points common to three given circles.* Griffiths. *Quart. Journ math. IX*, 358.
163. Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen. Clebsch. Crelle LXVIII, 151.
164. Ueber Polartetraeder und die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung. Lüroth. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 404.
165. *Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XXVII*, 481, 529.
166. Ueber die developpabele Fläche, welche zwei gegebenen Flächen umschrieben ist. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 322.
167. *On a certain sextic developable.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 129, 374.
168. *On conicoids referred to tangential coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. IX*, 309.

Differentialgleichungen.

169. *On reversible symbolical factors.* Cockle. *Quart. Journ. math. IX*, 242. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 42.]
170. *On Riccati's equation.* Cayley. *Phil. Mag. XXXVI*, 348.
171. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. Fuchs. Crelle LXVIII, 354. [Vergl. Bd. XII, Nr. 222.]
172. *Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles du second ordre.* Laguerre. *Compt. rend. LXVII*, 1130.
173. Ueber zwei Systeme von partiellen Differentialgleichungen. Du Bois-Reymond. Crelle LXVIII, 180.
174. Integration einer partiellen Differentialgleichung n-ter Ordnung. Tychsen. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 441.

Differenzengleichung.

175. *On an equation in finite differences.* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 108.

Doppeltangenten.

176. *Sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre.* Cayley. *Crelle LXVIII*, 176.

E.

Elasticität.

177. *Sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique.* Emile Mathieu. *Journ. Mathém. XXXIII*, 137. [Vergl. Nr. 24.]
178. *On the impact of compressible bodies considered with reference to the theory of pressure.* Moon. *Phil. Mag. XXXVI*, 154.
179. *Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes.* De Saint-Venant. *Journ. Mathém. XXXIII*, 242.
180. *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés.* Boussinesq. *Journ. Mathém. XXXIII*, 209. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 335.]

Vergl. Mechanik.

Electricität.

181. Ueber die Vertheilung der statischen Electricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper. Mehler. Crelle LXVIII, 134.

Ellipse.

182. *Investigation of the geometrical properties of the ellipse from the definition by focus and directrix.* Day. *Quart. Journ. math. IX*, 246.
183. *Sur le rayon de courbure de l'ellipse.* Pasalagna. *N. ann. math. XXVII*, 518.
184. *Trouver dans une ellipse le lieu des milieux des cordes normales, le lieu de pôles de ces normales, la corde normale minimum et la corde normale qui détache le plus petit segment.* Paillotte. *N. ann. math. XXVII*, 519.
185. *Propriété de la développée de l'ellipse.* Giard. *N. ann. math. XXVII*, 449.

Vergl. Rectification.

F.

Functionen.

Vergl. Determinanten. Gammafunctionen. Homogene Functionen. Kugelfunctionen. Logarithmen. Maxima und Minima. Operationscalcül. Sturm's Functionen. Ultraelliptische Functionen.

G.

Gammafunctionen.

186. *On certain properties of the gammafunction.* Blissard. *Quart. Journ. math. IX*, 280.

Geodäsie.

187. Ueber die Aufstellung bisher noch nicht angewandter Bedingungsgleichungen bei Ausgleichungen geodätischer Dreiecksketten. von Prondzynski. Astr. Nachr. LXXI, 145.
188. Ueber die Ausgleichung einer um ein Polygon gelegten geodätischen Dreieckskette. Börsch. Astr. Nachr. LXXI, 265.
189. Ueber einige Ortsbestimmungen und die dazu gebrauchten Mittel. Erman. Astr. Nachr. LXXI, 209.
190. Ueber die Pothenot'sche Aufgabe. Searle. Astr. Nachr. LXXI, 365.

Vergl. Attraction 154. Cartographie.

Geodätische Linie.

191. Ueber die Berechnung sphäroidischer Dreiecke und den Lauf der geodätischen Linie. von Baeyer. Astr. Nachr. LXXI, 289.

Geometrie (descriptive).

192. *Sur l'enseignement de la géométrie descriptive.* Vazeille. *N. ann. math. XXVII*, 423.

Geometrie (höhere).

193. Erweiterung einiger bekannter Eigenschaften des ebenen Dreiecks. Schröter. Crelle LXVIII, 208.
194. Ueber die Unlösbarkeit einer als gelöst vermeinten Aufgabe. Hertzer. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 352. [Vergl. Nr. 40.]
195. Die projectivischen Eigenschaften der gewöhnlichen und ausgezeichneten Elemente ebener Curven. Scholz. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 267, 355.
196. *Propriétés des réseaux de courbes et de surfaces algébriques.* De Jonquières. *Compt. rend. LXVII*, 1338.
197. Construction der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte. Steiner. Crelle LXVIII, 191.
198. *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre.* Cremona. Crelle *LXVIII*, 1.
199. Ueber Curvenbündel dritter Ordnung. Reye. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 521.

Geschichte der Mathematik.

200. *Sur l'astronomie de Boèce.* Chasles. *Compt. rend. LXVII*, 221.
201. Ueber die Handschrift *R.* 4°. 2, *Problematum Euclidis explicatio* der königlichen Gymnasialbibliothek zu Thorn. Curtze. Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplem. 45.
202. Zur Geschichte der Algebra in Deutschland. Gerhardt. Berl. Akad. Ber. 1867, 41.
203. Ueber Leibnizens Entwickelung des Kreisbogens in eine nach Potenzen der Tangenten fortschreitenden Reihe. Kummer. Berl. Akad. Ber. 1867, 387.
204. Erhard Weigel, Bartholomaei. Zeitschr. Math. Phys. XIII, Supplem. 1.
205. *Débats entre Mr. Chasles et divers autres savants sur la science du XVII S.* *Compt. rend. LXVII*, 9—473. [Vergl. Nr. 42.]

Vergl. Imaginäres 225.

Gleichungen.

206. *Théorème relatif à la théorie des substitutions.* Cayley. *Compt. rend. LXVII,* 784.
207. *Sur deux nouvelles séries de groupes.* C. Jordan. *Compt. rend. LXVII,* 229.
208. *On equal roots.* Horner. *Quart. Journ. math. IX,* 59.
209. *On the general solution of algebraic equations.* Kirkman. *Phil. Mag. XXXVI,* 169, 264.
210. *On the solvibility of equations by means of radicals.* Cayley. *Phil. Mag. XXXVI,* 386.
211. *Sur la résolution algébrique des équations primitives de degré* p^2 (p *étant premier impair).* Camille Jordan. *Journ. Mathém. XXXIII,* 111. [Vergl. Bd. XIII, 279.]
212. *Sur la résolution des équations à plusieurs inconnues.* H. Laurent. *Compt. rend. LXVII,* 491.

Vergl. Imaginäres.

H.

Homogene Functionen.

213. Theorie der bilinearen Functionen. Christoffel. Crelle LXVIII, 253.
214. Ueber bilineare Formen. Kronecker. Crelle LXVIII, 272. [Vergl. Bd. XII, Nr. 279.]
215. Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Christoffel. Crelle LXVIII, 246.
216. Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und cubischen binären Form. Clebsch. Crelle LXVIII, 162.

Homographie.

217. *On homographic systems of points, direct and inverse, on skew surfaces of the second order.* Townsend. *Quart. Journ. math. IX,* 249, 296.

Hydrodynamik.

218. Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. H. Weber. Crelle LXVIII, 286.
219. *Sur le mouvement le plus général d'un fluide.* Helmholtz. *Compt. rend. LXVII,* 221, 754, 1034. — Bertrand *ibid.* 267, 469, 773. [Vergl. Nr. 56.]
220. *On discontinuous movements of fluids.* Helmholtz. *Phil. Mag. XXXVI,* 337.
221. *Sur la théorie du mouvement des liquides.* Touche. *Compt. rend. LXVII,* 1219.
222. *On waves in liquids.* Rankine. *Phil. Mag. XXXVI,* 52.
223. *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides.* Boussinesq. *Journ. Mathém. XXXIII,* 377.
224. *On the theory of pressure in fluids.* Moon. *Phil. Mag. XXXVI,* 27, 116.

Hyperboloid.

Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 280.

I.

Imaginäres.

225. *Travaux de Mr. Bellavitis sur la théorie des quantités imaginaires en date de l'année* 1826. Abel Transon. *N. ann. math. XXVII,* 419.
226. *Sur les symptômes d'imaginarité des racines des équations algébriques.* Colombier. *N. ann. math. XXVII,* 308.
227. *On imaginary roots.* Horner. *Quart. Journ. math. IX,* 57, 221.
228. *Résolution graphique des équations algébriques, qui ont des racines imaginaires.* Lill. *N. ann. math. XXVII,* 363. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 282.]
229. *Considérons la suite des fonctions de Sturm* $V, V_1, V_2 \ldots V_n$; *si une des équations* $V_r = 0$ *a* p *racines imaginaires, la proposée a au moins* p *racines imaginaires.* Pellet. *N. ann. math. XXVII,* 384.

K.

Kegelschnitte.

230. *On the foci of a conic referred to areal coordinates.* Watson. *Quart. Journ. math. IX*, 278.
231. *On plane conics referred to tangential coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. IX*, 189.
232. *On conics, plane and spherical, referred to three-point tangential coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. IX*, 1, 97. [Vergl. Bd XIII, Nr. 94].
233. *Réciproque d'une proposition sur les coniques homothétiques qui ont le même centre.* Barbier. *N. ann. math. XXVII*, 433. [Vergl. Nr. 62.]
234. Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden. Lüroth. Crelle LXVIII, 185.
235. *Un angle constant tourne autour du foyer d'une conique; au point où les côtés de l'angle rencontrent la courbe, ou même des tangentes à cette courbe. Trouver le lieu des points d'intersections de ces tangentes.* Gigou. *N. ann. math. XXVII*, 471.
236. Ueber Kegelschnitte, die einer gewissen Bedingung genügen. Bauer. Crelle LXVIII, 293.
237. *Si par un point ou même trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique* *N. ann. math. XXVII*, 550.
238. *Enveloppe d'une perpendiculaire à un point d'une corde mobile d'un cercle.* Morges *N. ann. math. XXVII*, 447.
239. *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre.* Darboux. *Compt. rend. LXVII*, 1333.
240. *Sur la détermination graphique des axes principaux des courbes et des surfaces du second ordre.* P. Serret. *N. ann. math. XXVII*, 352.

Vergl. Ellipse. Kreis. Krümmung 244. Mechanik. Pascal's Satz. Sphärik.

Kreis.

241. *Loci of the centres of the escribed circles of a triangle whose base and vertical angle are constant.* Turnbull. *Quart. Journ. math. IX*, 62.
242. *Points dont la somme des puissances par rapport à deux cercles qui se coupent orthogonalement est nulle.* Arnoye. *N. ann. math. XXVII*, 552.
243. *Remarques sur les solutions d'un problème de géométrie.* Turquan. *N. ann. math. XXVII*, 437.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 139, 140. Determinanten in geometrischer Anwendung 162.

Krümmung.

244. Ein Steiner'scher Satz über Krümmungskreise bei Kegelschnitten und ein allgemeinerer Steiner'scher Satz über osculirende Kegelschnitte bei Curven dritten Grades. August. Crelle LXVIII, 235.
245. *Sur la courbure des surfaces.* Aoust. *Compt. rend. LXVII*, 768.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 144. Ellipse 183.

Kugelfunctionen.

246. Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen. Heine. Crelle LXVIII, 386.

L.

Logarithmen.

247. *Sur la méthode de Huyghens pour calculer les logarithmes.* Thoman. *N. ann. math. XXVII*, 304. [Vergl. Nr. 71, 72.]

M.

Magnetismus.

248. Ueber magnetische Fernwirkung electrischer Ströme und Stromringe. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 414.

249. *Sur la distance polaire et la quantité du fluide des barreaux aimantés.* Pouillet. *Compt. rend. LXVII*, 853. — Radau *ibid.* 1002.

Maxima und Minima.

250. Zur Theorie der Maximal- und Minimalwerthe. Kleinfeller. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 515.
251. *Des Maxima et Minima des sommes composées de valeurs d'une fonction entière et de ses dérivées.* Tchébychef. *Journ. Math. XXXIII*, 9.
252. *Sur le maximum de* $x^p y^q z^r$. Haton de la Goupillière. *N. ann. math. XXVII*, 525.
253. Ueber eine besondere Gattung von Minimalflächen. Weierstrass. Berl. Akad. Ber. 1867, 511.

Mechanik.

254. *Sur une transformation orthogonale applicable aux équations de la dynamique.* Radau. *Compt. rend. LXVII*, 316.
255. *An analytical demonstration of the rectangle of forces.* Walker. *Quart. Journ. math. IX*, 173.
256. *Reproduction of Euler's memoir of* 1758 *on the rotation of a solid body.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 361.
257. *On the equilibrium of a heavy body bounded by a surface of revolution and resting on a rough surface also of revolution.* Curtis. *Quart. Journ. math. IX*, 41.
258. *On the equilibrium of an aggregation of spherules.* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 76.
259. *On the debility of large animals and trees.* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 179.
260. *Theorem with regard to the three axes of invariable direction in a strained elastic body.* Warren. *Quart. Journ. math. IX*, 171.
261. *Mouvements relatifs à la surface de la terre.* Page. *N. ann. math. XXVII*, 337. [Vergl. Bd. XIII, 338.]
262. *Sur le mouvement d'un point matériel dans les sections coniques conformément aux principes des aires.* Jacquier. *Compt. rend. LXVII*, 289.
263. *Solution du problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'un solide ductile ou d'un liquide contenu dans un vase pendant son écoulement par un orfice inférieur.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXVII*, 131, 203, 273. [Vergl. Nr. 80, 81.]
264. *Calcul de l'influence de l'élasticité de l'anneau bimétallique du balancier compensateur des chronomètres sur l'isochronisme indépendamment des variations de température.* Phillips. *Compt. rend. LXVII*, 508.
265. *Sur le tautochronisme des epicycloïdes, quand on a égard au frottement.* Haton de la Goupillière. *Journ. Mathém. XXXIII*, 204.

Vergl. Aerodynamik. Astronomie. Attraction. Ballistik. Elasticität. Electricität. Hydrodynamik. Magnetismus. Molecularphysik. Optik. Schwerpunkt. Wärmelehre.

Molecularphysik.

266. *Recherches concernant la mécanique des atomes.* Lucas. *Compt. rend. LXVII*, 163, 688, 990, 1025, 1222.

N.

Normale.

267. Geometrische Betrachtung der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf eine algebraische Fläche fällen lassen. August. Crelle LXVIII, 242.

Vergl. Ellipse 184.

O.

Oberflächen.

268. *On a singularity of surfaces.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 332.
269. *Sur les surfaces algébriques.* Clebsch. *Compt. rend. LXVII*, 1238.
270. *Sur les systèmes de surfaces orthogonales.* Darboux. *Compt. rend. LXVII*, 1101.

271. *Sur une classe de systèmes triples de surfaces orthogonales.* Morin. *Compt. rend.* LXVII, 788.
272. *Par une droite tangente à une surface quelconque en un point* M *ou même différents plans sécants; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui surosculе la section au point* M: *le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle.* Doucet. *N. ann. math.* XXVII, 417.
273. *On the cyclide.* Maxwell. *Quart. Journ. math.* IX, 111.
274. *On some theorems connected with the wave-surface.* Niven. *Quart. Journ. math.* IX, 22.
275. *Étude analytique de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre.* Painvin. *Compt. rend.* LXVII, 816.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 135, 136. Determinanten in geometrischer Anwendung 163, 166, 167, 168. Geodätische Linien. Geometrie (höhere) 196, 198. Krümmung 245. Maxima und Minima 253. Normalen.

Oberflächen zweiter Ordnung.

276. *Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre.* Zeuthen. *N. ann. math.* XXVII, 385.
277. *Construction des axes d'une surface du second degré.* Picquet. *N. ann. math.* XXVII, 456.
278. Einfache lineare Construction der Flächen zweiter Ordnung aus neun und ihrer Durchdringungscurven aus acht Punkten. Reye. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 527.
279. *Faiseau de plans dont le rapport anharmonique est constant et dont la construction depend de deux surfaces du second ordre données.* Barbier. *N. ann. math.* XXVII, 445.
280. *Un trièdre trirectangle est circonscrit à une surface du second degré. Démontrer que les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.* Pellet. *N. ann. math.* XXVII, 331.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 164, 165. Geometrie (höhere) 197. Homographie. Kegelschnitte 240. Pascal's Satz 294.

Operationscalcül.

281. *On the symbol of operation* $x\frac{d}{dx}$. Walton. *Quart. Journ. math.* IX, 318.
282. *On the operation* $e^x\frac{d}{dx}$. Walton. *Quart. Journ. math.* IX, 355.
283. *Correction of two mistakes pointed out by M. Worontzof.* Blissard. *Quart. Journ. math.* IX, 71. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 148.]
284. *On the properties of the* $\Delta^m 0^n$ *class of numbers.* Blissard. *Quart. Journ. math.* IX, 82, 154. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 149.]

Optik.

285. *Théorie nouvelle des ondes lumineuses.* Boussinesq. *Journ. Mathém.* XXXIII, 313, 425. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 362.]
286. *Sur la théorie de la scintillation.* Jamin. *Compt. rend.* LXVII, 938.
287. *Sur les vibrations intérieures des molécules.* Briot. *Journ. Mathém.* XXXIII, 301.
288. *Sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction dans les milieux isotropes et dans l'éther des cristeaux.* Boussinesq. *Journ. Mathém.* XXXIII, 340.
289. *Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans les cristaux.* Sarrau. *Journ. Mathém.* XXXIII, 59. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 368.]
290. *On rotatory polarisation in isotropic media.* Niven. *Quart. Journ. math.* IX, 235.
Vergl. Refraction.

P.

Parabel.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 142.

Pascal'scher Satz.

291. *On Pascal's theorem.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 318.
292. *A notation of the points and lines in Pascal's theorem.* Cayley. *Quart. Journ. math. IX*, 268.
293. Ueber die Reciprocität der Pascal-Steiner'schen und der Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum. Hesse. Crelle LXVIII, 193.
294. *On the theorems corresponding in three dimensions to those of Pascal and Brianchon.* Ellis. *Quart. Journ. math. IX*, 344.

Planimetrie.

295. *Demonstration of the similitude of two triangles.* Walton. *Quart. Journ. math. IX*, 241.
296. *Théorème relatif à un triangle démontré par la géométrie de la règle.* Imbert. *N. ann. math. XXVII*, 367. — *Démonstration par analyse.* Jouffray *ibid.* 369.
297. *Construire un triangle connaissant les trois parallèles aux trois côtés qui passent par le centre du cercle inscrit.* Aubanel. *N. ann. math. XXVII*, 451.

Q.

Quadratische Formen.

298. *Sur deux équations qui se rapportent au nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair en une somme de quatre carrés impairs.* Liouville. *Journ. Mathém. XXXIII*, 1.

R.

Rectification.

299. Arithmetisches Mittel der Umfänge aller Ellipsen mit gemeinschaftlicher grosser Axe, deren kleine Axen alle Werthe von 0 bis zur Länge der grossen Axe stetig durchlaufen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 530.

Refraction.

300. Zur Refraction auf der Sonne. Peters. Astr. Nachr. LXXI, 241.

Reihen.

Vergl. Geschichte der Mathematik 203.

S.

Schwerpunkt.

301. *On an easy construction of the centre of gravity of the trapezium.* Walker. *Quart. Journ. math. IX*, 338.
302. *Centre de gravité de certains poids placés aux sommets d'un polygone donné.* Laisant. *N. ann. math. XXVII*, 443.

Singularitäten.

303. *Sur les singularités ordinaires des courbes géométriques à double courbure.* Zeuthen. *Compt. rend. LXVII*, 225.

Vergl. Geometrie (höhere) 195. Oberflächen 268.

Sphärik.

304. *On spherical conics referred to tangential coordinates.* Jeffery. *Quart. Journ. math. IX*, 205.

Vergl. Attraction 152. Kegelschnitte 232.

Stereometrie.

305. *Recherches sur les polyèdres.* Camille Jordan. *Crelle LXVIII*, 297.
306. *Deux pyramides convexes qui ont les faces triangulaires égales chacune à chacune et semblablement disposées sont égales.* Battaglini. *N. ann. math. XXVII*, 440.

Sturm's Functionen.

Vergl. Imaginäres 229.

T.

Triangularcoordinaten.

307. *On trigonic coordinates.* *Walton.* *Quart. Journ. math. IX*, 340.

U.

Ultraelliptische Functionen.

308. Ueber Abel'sche Integrale dritter Gattung. Roch. Crelle LXVIII, 170.
309. *Sur la théorie des intégrales ultra-elliptiques.* *Bouquet.* *Compt. rend. LXVII*, 989.

W.

Wärmelehre.

310. Beitrag zur mechanischen Theorie der Wärme. Eibel. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 491.
311. Ueber den Temperaturzustand eines von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers. Frosch. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 497.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

312. *On a problem in chances.* *Day.* *Quart. Journ. math. IX*, 354.

Z.

Zahlentheorie.

313. *On unitation, a novel arithmetical operation.* *Walenn.* *Phil. Mag. XXXVI*, 346.
314. Ueber die Summe von Cubikzahlen. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XIII, 348. [Vergl. Bd. XII, Nr. 172.]
315. *De quelques propriétés des fractions périodiques.* *Laisant & Beaujeux.* *N. ann. math. XXVII*, 289.
316. *Sur un théorème de Cauchy.* *Genocchi.* *Compt. rend. LXVII*, 1035.
317. *Specimen table* $M \equiv a^\alpha b^\beta$ (mod N) *for any prime or composite modulus.* *Cayley.* *Quart. Journ. math. IX*, 95.


3 2044 102 937 885
Digitized by Google